



## ДИНАМИКА ЦЕПОЧКИ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

*Т.Е. Вадивасова, О.В. Сосновцева*

Анализируется пространственная эволюция квазипериодических режимов в цепочке связанных отображений окружности. Исследуются механизмы возникновения странной нехаотической динамики и свойства нерегулярных аттракторов.

### Введение

В последние годы в ряде работ, посвященных проблемам нелинейной динамики, внимание исследователей было привлечено к такому необычному объекту в фазовом пространстве динамических систем, как странный нехаотический аттрактор (СНА). Впервые понятие СНА было введено в [1]. Это притягивающее множество, сложное с точки зрения его геометрии: оно не является совокупностью конечного числа точек, не является кусочно-дифференцируемым и не представляет собой элемента фазового объема с кусочно-дифференцируемой границей. Однако фазовые траектории на нем устойчивы по Ляпунову и, таким образом, динамика не является хаотической.

Как показали исследования, СНА типичен для систем с квазипериодическим воздействием (как потоковых, так и отображений). В таких системах СНА может существовать на множестве значений параметров, имеющем ненулевую меру. В работах [1–14] были обнаружены странные нехаотические аттракторы в различных системах с квазипериодическим возбуждением, а также изучены их характеристики. Показана грубость СНА по отношению к слабому сигналу и шуму [1,12]. Установлено, что СНА характеризуется целым значением емкостной размерности [5,7], имеет особый тип спектра (так называемый сингулярно-непрерывный спектр) и спадающую до определенного уровня автокорреляционную функцию [10]. Были разработаны методы, позволяющие отличить СНА от квазипериодического аттрактора, в основе которых лежит чувствительность к фазе воздействия и сложное устройство множества точек, получаемого при рациональной аппроксимации числа вращения, определяемого соотношением частот воздействия [9].

Обнаружены два универсальных механизма возникновения СНА из квазипериодических режимов [8,11–13]: 1) кризис эргодического тора, наступающий в результате касания устойчивого тора с неустойчивым и сопровождающийся мгновенным разрушением квазипериодического режима и возникновением множества, не являющегося кусочно-дифференцируемым;

2) постепенная потеря гладкости эргодическим тором, в результате чего предельное множество перестает быть дифференцируемым. Было установлено, что возникновению хаотической динамики в системах с грубыми квазипериодическими движениями всегда предшествует образование СНА [4,6,12,13]. Не исключено, что СНА существуют в более широком классе систем, чем системы с квазипериодическим воздействием. В автономных и периодически возбуждаемых системах странные нехаотические аттракторы, также как и квазипериодические аттракторы, не могут быть грубыми, но, возможно, существуют на множестве ненулевой меры в пространстве параметров [14].

Развитие хаоса через разрушение квазипериодических движений рассматривается как один из типичных сценариев возникновения турбулентности [15]. Если предположить однонаправленный характер взаимодействия элементов среды, то вполне возможным становится возникновение с движений, соответствующих движениям на странном нехаотическом аттракторе, и известный сценарий Рюэля – Такенса – Ньюхауса может принять вид: периодическое движение  $\rightarrow$  квазипериодическое движение  $\rightarrow$  странный нехаотический аттрактор  $\rightarrow$  хаос.

Простейшей моделью среды служит цепочка связанных осцилляторов. Если выбрать в качестве элемента цепочки дискретное отображение, то модель еще более упростится, так как и время и пространственная координата окажутся дискретными. Цепочки и решетки, составленные из простых дискретных отображений (чаще всего логистических отображений), были исследованы в ряде работ [17–27]. Для анализа развития квазипериодических режимов и СНА в качестве базового элемента цепочки наиболее подходит отображение окружности, для которого характерно периодическое, квазипериодическое и хаотическое поведение [16]. Исследование пространственно–временного поведения цепочки отображений окружности с однонаправленным взаимодействием и анализ роли странных нехаотических аттракторов в динамике такой цепочки является целью настоящей работы.

## 1. Цепочка отображений окружности

### Отображение окружности

$$x(n+1) = x(n) + \Omega - K/(2\pi)\sin(2\pi x(n)), \text{ mod } 1$$

моделирует динамику фазы в автогенераторе с сильной фазовой нелинейностью, находящемся под действием периодических толчков. Параметр  $K$  (параметр нелинейности) характеризует интенсивность воздействия, а параметр  $\Omega$  (число вращения) – соотношение частот,  $n$  – дискретное время. Периодическая модуляция параметра  $\Omega$  с частотой, определяемой иррациональным числом, соответствует квазипериодическому возмущению фазы автогенератора. Если в качестве одной из мод воздействия рассматривать сигнал другого, аналогичного автогенератора, то можно перейти к цепочке однонаправленно связанных отображений окружности

$$x_j(n+1) = x_j(n) + \Omega_j - K_j/(2\pi)\sin(2\pi x_j(n)) + \gamma_j \cos(2\pi x_{j-1}(n)), \text{ mod } 1$$

где  $j$  – номер парциальной ячейки (пространственная координата),  $n$  – дискретное время. Пусть цепочка ограничена с одного конца,  $j=0,1,2,\dots$  и  $\gamma_0=0$ . Если предположить  $K_0=0$  и  $\Omega_0=(5^{1/2}-1)/2$ , то два первых звена цепочки составят хорошо изученную систему: отображение окружности с квазипериодическим воздействием, в которой наблюдаются двух- и трехчастотные квазипериодические движения, странные нехаотические и хаотические аттракторы [2,4,6,11]. Объектом исследования в настоящей работе является цепочка идентичных отображений

окружности ( $\Omega_j = \Omega$ ,  $K_j = K$ ,  $\gamma_j = \gamma$  при  $j \geq 2$ ), на первый элемент которой подается квазипериодическое воздействие с амплитудой  $\gamma_1 = A$  и иррациональным числом вращения  $\Omega_0$ .

## 2. Развитие сложной динамики вдоль цепочки

Свойства парциального отображения окружности зависят от того, в какой области значений параметра  $K$  оно рассматривается. При  $K < 1$  отображение окружности обратимо и не может порождать хаотическую динамику. Оно демонстрирует только периодические и квазипериодические режимы. Введение однонаправленной связи между отображениями не может привести к возникновению хаоса в цепочке, но может вызвать возникновение странных нехаотических аттракторов.

В закритической области при  $K > 1$  отображение окружности становится необратимым. Оно обладает периодическими и хаотическими движениями, а квазипериодические режимы перестают существовать. Введение однонаправленной связи между отображениями приводит к развитию хаоса и гиперхаоса вдоль цепочки. Однако квазипериодическое воздействие на первый элемент цепочки может существенно повлиять на ее динамику, приводя к таким эффектам, как прерывание последовательности пространственных бифуркаций удвоения в результате разрушения квазипериодических движений и возникновения странного нехаотического аттрактора, подавление или, напротив, возбуждение хаотической динамики.

**2.1 Возникновение странного нехаотического аттрактора в закритической области парциального отображения.** При отсутствии квазипериодического возбуждения цепочки в закритической области  $K > 1$  при соответствующем выборе параметров можно обнаружить хорошо известный механизм пространственного развития хаоса через конечную последовательность бифуркаций удвоения периодов циклов вдоль цепочки [22]. При введении квазипериодического воздействия на цепочку в первых ее звеньях вместо периодического режима возникает двухчастотный квазипериодический режим, которому соответствует инвариантная кривая отображения. Инвариантная кривая деформируется с ростом пространственной координаты  $j$ . Даже очень слабое квазипериодическое воздействие на цепочку приводит к возникновению СНА. На рис.1,а представлены  $(x_0, x_j)$  проекции фазовых траекторий для ячеек с номерами  $j=4,5,6$  в отсутствие квазипериодического воздействия ( $A=0$ ). При этом в пятой ячейке возникает хаотическая динамика. Соответствующий данной подсистеме ляпуновский показатель положителен  $\lambda = +0.0434$ . Последующие ячейки не добавляют положительных ляпуновских показателей, а как бы ретранслируют хаотическую динамику, возникающую в пятой ячейке. На рис.1,б изображены фазовые портреты в тех же ячейках, при тех же значениях параметров и тех же начальных условиях, но при слабом квазипериодическом воздействии  $A=0.001$  с числом вращения, равным золотому сечению  $\Omega_0 = (5^{1/2} - 1)/2$ . Вместо хаоса в пятой и последующих ячейках наблюдается режим СНА ( $\lambda = -0.0516$ ). Дальнейшее увеличение воздействия приводит к разрушению инвариантной кривой и возникновению СНА в ячейках с номерами  $j < 5$ .

Развитие сложной динамики вдоль квазипериодически возбуждаемой цепочки в закритической области отражено на бифуркационной диаграмме, представленной на рис.2. В соответствии с качественно различным динамическим поведением элементов цепочки на диаграмме выделены три области. Белая область соответствует двухчастотным квазипериодическим движениям, представленным инвариантной кривой, состоящей из двух или четырех частей. В 2СНА области диаграммы инвариантная кривая уже разрушилась, но все ляпуновские показатели

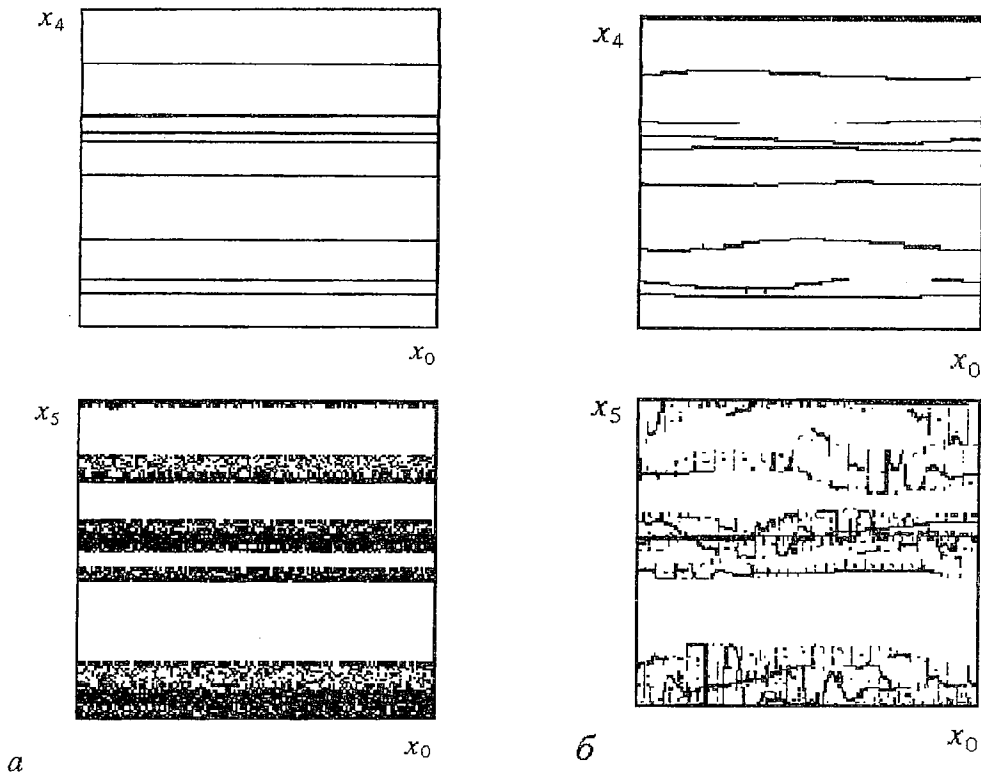


Рис. 1.  $(x_0, x_j)$  проекции фазовых траекторий для  $j=4,5,6$  при  $K=1.55$ ,  $\Omega=0.5$ ,  $\gamma=0.13$ : *a* – в отсутствие внешнего воздействия; *б* – при внешнем квазипериодическом воздействии

еще отрицательны. Это область существования странного нехаотического аттрактора. Можно наблюдать два известных механизма возникновения СНА с ростом пространственной координаты  $j$ . Сплошная линия на рис. 2 соответствует кризису квазипериодического аттрактора, в результате которого происходит объединение его частей и рождается СНА. Второй механизм состоит в постепенной потере дифференцируемости инвариантной кривой при отсутствии кризиса. Ему соответствует часть границы области СНА, отмеченная на рис. 2 штриховой линией. При увеличении амплитуды воздействия происходит переход от СНА к хаотической динамике.

Как уже отмечалось, квазипериодическое воздействие на элементы цепочки в области  $K > 1$  может не только разрушать, но и индуцировать развитие хаотической динамики вдоль цепочки. Например, при  $K=1.65$ ,  $\Omega=0.5$ ,  $A=0.15$ ,  $\Omega_0=(5^{1/2}-1)/2$  в первой ячейке ( $j=1$ ) имеет место режим СНА, а в

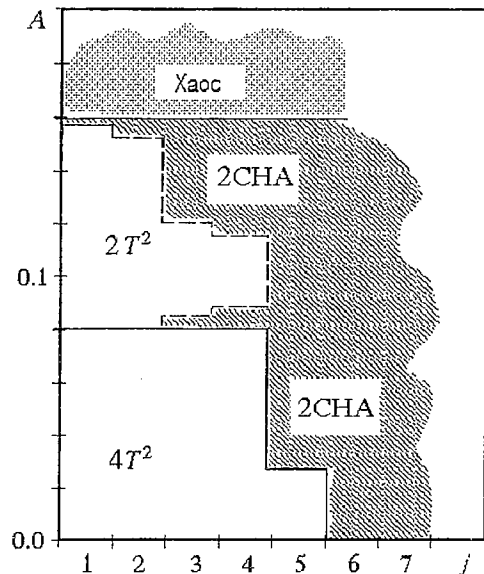


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма режимов на плоскости  $(j, A)$  для значений параметров  $K=1.55$ ,  $\Omega=0.5$ ,  $\gamma=0.1$ ,  $\Omega_0=(5^{1/2}-1)/2$ ;  $2T^2$  – область двухчастотных квазипериодических колебаний, образом которых в фазовом пространстве системы является двухобходный тор;  $4T^2$  – четырехобходный тор;  $2СНА$  – область существования странного нехаотического аттрактора с двумя лентами

последующих в некоторой области изменения параметра связи  $\gamma \in [0.13, 0.29]$  возможно развитие хаоса. Так при  $\gamma=0.2$  каждая последующая ячейка  $j=2, 3, \dots, 9$  добавляет положительный ляпуновский показатель в спектр ляпуновских характеристических показателей (ЛХП). Таким образом, вдоль цепочки развивается гиперхаос. Вне отмеченной области значений  $\gamma$  хаос не возникает ни в одной ячейке.

**2.2. Возникновение странного нехаотического аттрактора в результате разрушения многочастотных квазипериодических колебаний.** В докритической области парциального отображения  $K < 1$ , как уже отмечалось, хаотическая динамика не может возникнуть, но возможны многочастотные квазипериодические движения. Нам уже известно, что двухчастотные квазипериодические режимы разрушаются с ростом пространственной координаты  $j$ , приводя к образованию СНА. Рассмотрим, что происходит при добавлении третьей несоизмеримой частоты. Для этого выберем параметры парциального отображения так, чтобы обеспечить квазипериодическую динамику автономного отображения с числом вращения, приблизительно равным золотому сечению, и подадим на цепочку квазипериодическое воздействие с числом вращения  $\Omega_0 = 2^{1/2} - 1$  (серебряное сечение). Таким образом, мы обеспечили трехчастотный квазипериодический режим, по крайней мере, в первых звеньях цепочки. Для некоторых значений амплитуды воздействия наблюдается синхронизация двух из трех частот и переход к двухчастотному квазипериодическому движению с последующим его разрушением вдоль цепочки и возникновением СНА. Разрушение инвариантной кривой, возникшей в результате резонанса на трехмерном торе (аттракторе, соответствующем трехчастотному квазипериодическому режиму), отражено на рис. 3.

Можно выбрать значение амплитуды воздействия  $A$  так, что синхронизации не будет. На рис. 4, *a* представлены  $(x_0, x_j)$  проекции фазовых траекторий в ячейках с номерами  $j=4, 5, 6$  для случая  $A=0.058$ . В первых элементах цепочки имеет место трехчастотный квазипериодический режим. Его эволюцию с ростом  $j$  трудно проследить по двумерной проекции фазовой траектории. Поэтому для анализа характера динамики вводится сечение фазовой траектории плоскостью, что позволяет снизить размерность исследуемого множества на единицу. На рис. 4, *b* представлены  $(x_0, x_j)$  проекции таких сечений плоскостью  $x_1=0.5$  для  $j=4, 5, 6$ . Точность построения сечений задана равной  $10^{-4}$ . Можно видеть, что при  $j=4, 5$  кривая, получаемая в сечении, еще является гладкой, что соответствует трехчастотному квазипериодическому режиму. В шестой ячейке наблюдается разрушение кривой в сечении, аналогично тому, как происходит разрушение инвариантной кривой, соответствующей двухчастотным квазипериодическим колебаниям (см. рис. 3), что должно приводить к возникновению СНА. По-видимому, та же судьба ожидает и квазипериодические движения с еще большим числом несоизмеримых частот, но численных методов диагностики их разрушения в настоящее время нет.

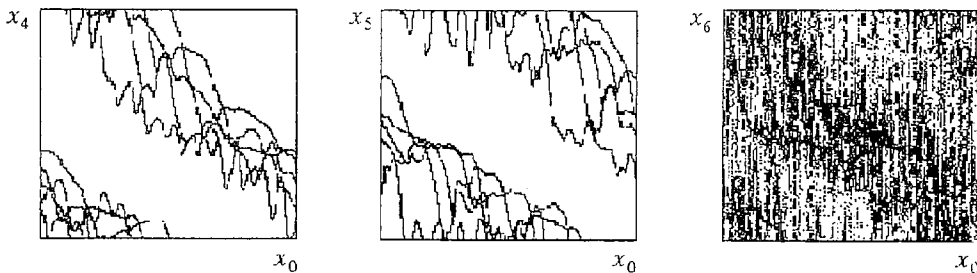


Рис. 3.  $(x_0, x_j)$  проекции фазовых траекторий в ячейках с номерами  $j=4, 5, 6$  для случая квазипериодического воздействия с амплитудой  $A=0.060$  и числом вращения  $\Omega_0=2^{1/2}-1$  при  $K=0.8$ ,  $\Omega=0.610074$ ,  $\gamma=0.2$

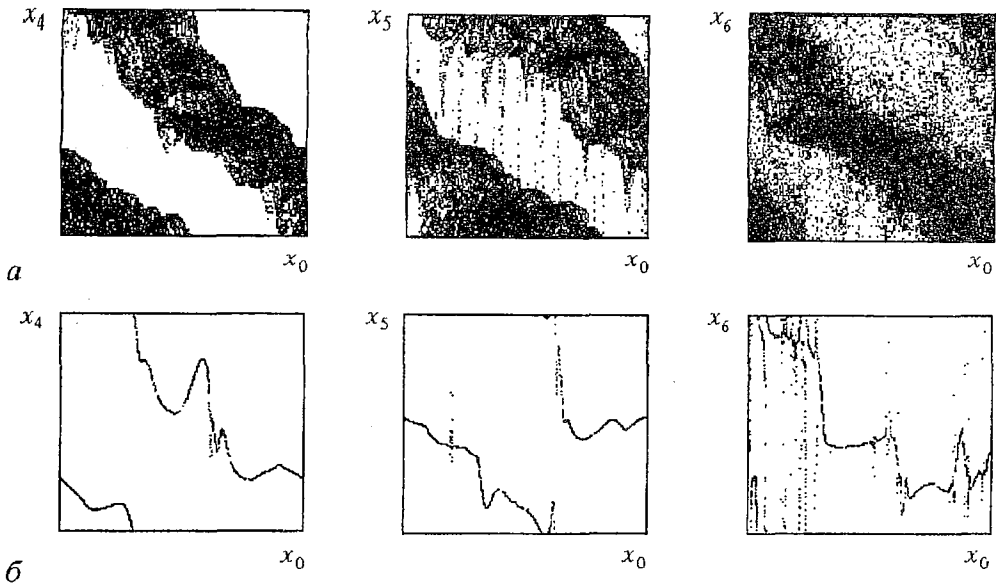


Рис. 4. Аттракторы для  $j=4,5,6$  при  $K=0.8$ ,  $\Omega=0.610074$ ,  $\gamma=0.2$ ,  $A=0.058$ ,  $\Omega_0=2^{1/2}-1$ : а –  $(x_0, x_j)$  проекции фазовых траекторий; б – сечения Пуанкаре плоскостью  $x_1=0.5$

### 3. Исследование пространственных структур

Мы рассмотрели, как происходит эволюция временной динамики в начальных звеньях цепочки. В разных звеньях она носит различный характер, как правило, усложняясь с ростом пространственной координаты. Если, начиная с некоторого значения  $j$ , во всех звеньях цепочки наблюдается качественно одна и та же временная динамика, будем называть ее пространственно установившейся.

Обратимся к рассмотрению пространственно установившихся режимов, наблюдаемых при различных значениях параметров, ставя им в соответствие зависимость динамической переменной от пространственной координаты в фиксированный момент времени (мгновенный профиль волны). В этих целях исследовалась цепочка, состоящая из 900 звеньев, при фиксированных значениях параметров и различных  $K$  и  $\gamma$ . Начальные условия выбирались однородными. Была построена диаграмма пространственно установившихся режимов на плоскости параметров  $(K, \gamma)$  (рис. 5). На диаграмме отмечены 6 областей, соответствующих различным установившимся вдоль цепочки динамическим режимам и различному характеру мгновенного профиля волны. В области 1 во всех звеньях цепочки, начиная с некоторого номера, существует цикл отображения с

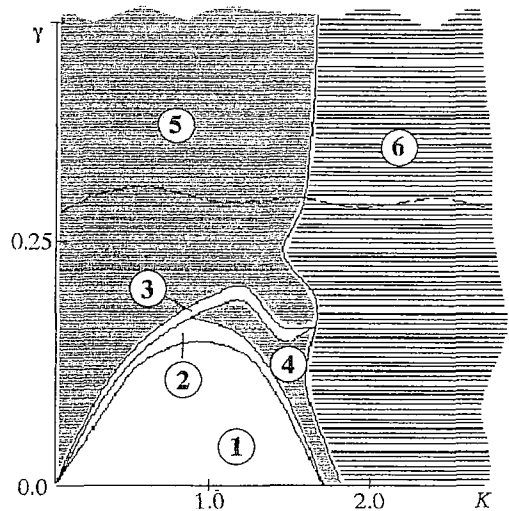


Рис. 5. Диаграмма пространственно установившихся режимов на плоскости параметров  $(K, \gamma)$  при фиксированных значениях параметров  $\Omega=0.5$ ,  $\Omega_0=(5^{1/2}-1)/2$ ,  $A=0.15$  и однородных начальных условиях  $x_j(0)=0.1$

периодом, равным двум. Квазипериодическое воздействие затухает вдоль цепочки и перестает влиять на динамику элементов цепочки, параметры которых соответствуют существованию цикла с периодом 2 в автономном отображении окружности. Все звенья цепочки колеблются в одной фазе, и мгновенный профиль представляет собой прямую линию (пространственно однородный режим, рис. 6, *a*). С ростом параметра нелинейности  $K$  или связи  $\gamma$  происходит разрушение пространственно однородного режима. Сигнал воздействия распространяется вдоль цепочки, влияя на динамику всех ее элементов. В простейшем случае во всех звеньях цепочки происходят двухчастотные квазипериодические колебания. Такое поведение цепочки наблюдается в узкой области, отмеченной на диаграмме цифрой 2. Мгновенный профиль волны в этой области имеет вид периодических (рис. 6, *б*) или квазипериодических колебаний. Область 3, также как и область 1, соответствует существованию цикла с периодом 2 в каждой ячейке, но при этом в разных ячейках возможны два различных цикла, чередование которых вдоль цепочки выглядит хаотическим. На мгновенном профиле волны (рис. 6, *в*) можно различить четыре уровня, соответствующих точкам двух циклов. В области 4 бифуркационной диаграммы вдоль цепочки в результате разрушения инвариантной кривой устанавливается режим СНА. Аттрактор состоит из двух частей, посещаемых изображающей точкой в фазе во всех звеньях цепочки. Мгновенный профиль, характерный для данной области, представлен на рис. 6, *г*.

По-видимому, в цепочке наблюдается явление мультистабильности, и бифуркационная диаграмма должна быть представлена на многолистной поверхности. Мы можем отметить, что пространственно установившийся режим, существующий в области 3, на границе области претерпевает кризис, объединяясь с аттрактором, эволюционирующим из квазипериодического аттрактора в области

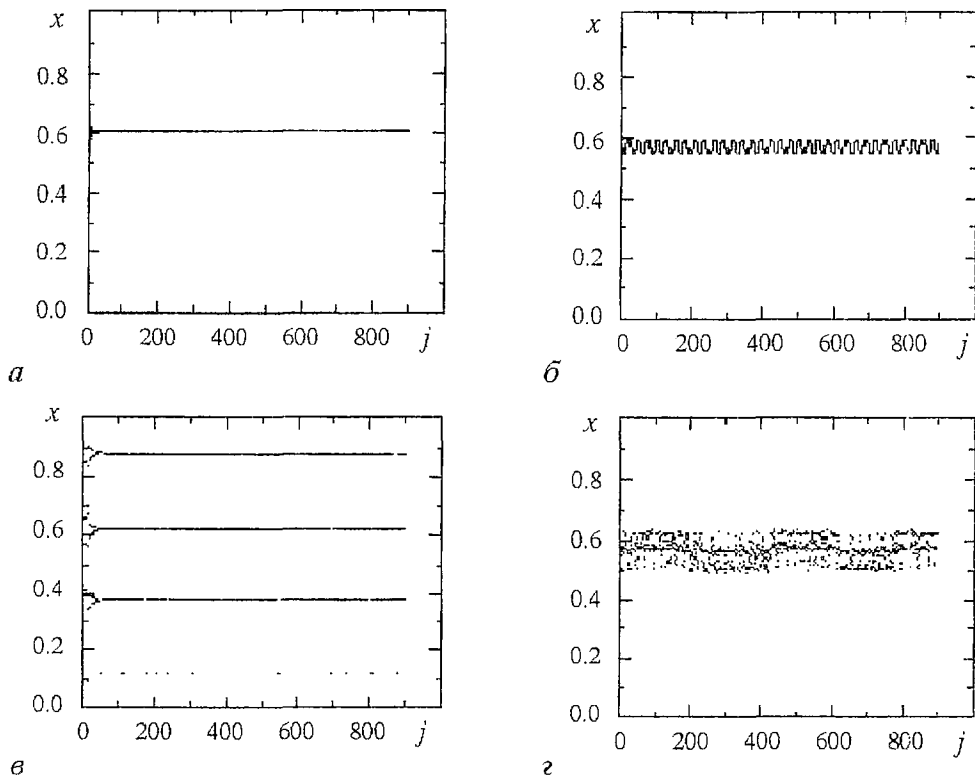


Рис. 6. Зависимости динамической переменной от пространственной координаты в фиксированный момент времени, наблюдаемые в различных областях бифуркационной диаграммы, представленной на рис.5: *a* – в области 1; *б* – в области 2; *в* – в области 3; *г* – в области 4

2. Этот кризис приводит к возникновению развитого странного нехаотического аттрактора, являющегося пространственно установившимся режимом в области 5. Мы не можем с уверенностью сказать, ограничена ли область 5 при малых значениях параметра нелинейности  $K$  или СНА является предельным режимом при любом сколь угодно малом, но конечном значении  $K$ . Дело в том, что в области малых  $K$  в цепочке развиваются многочастотные квазипериодические колебания. Они также могут, разрушаясь, порождать СНА, но диагностировать их разрушение, как уже отмечалось, не представляется возможным.

Область 6, отмеченная на диаграмме, соответствует возникновению в цепочке хаотической динамики. Мгновенные профили волны, типичные для областей 5 и 6, не имеют визуальных отличий. Для более наглядного представления о пространственно-временной динамике цепочки строились диаграммы мгновенных состояний элементов цепочки. Интервал изменения динамической переменной  $[0,1]$  разбивался на 30 частей, которым сопоставлялись 30 различных полутонов от белого до черного цветов. С помощью различных полутонов изображалось мгновенное состояние каждой пространственной ячейки ( $j=0,1,2,\dots,200$ ) в каждый момент времени ( $n=0,1,2,\dots,200$ ). Диаграммы мгновенных состояний цепочки, представленные на рис. 7, а, б, соответствуют пространственно установившимся режимам СНА (область 5, рис. 5) и хаоса (область 6, рис. 5). Обе диаграммы внешне выглядят одинаково нерегулярно.

На бифуркационной диаграмме (см.рис. 5) штриховой линией обозначена граница пространственного роста неустойчивости в цепочке. Если считать, что состояние  $j$ -го элемента цепочки в момент времени  $n$  не зависит от состояния предыдущего,  $(j-1)$ -го элемента в тот же момент времени, а зависит только от его состояния в момент времени  $n-1$ , то малое возмущение фазы воздействия  $\delta x_0$  в начальный момент времени  $n=0$  приводит к возмущению  $\delta x_j$  состояния  $j$ -ой ячейки в момент времени  $n=j$

$$\delta x_j(j) = \mu_j(j)\delta x_0(0),$$

где множитель  $\mu_j(j)$  определяется как

$$\mu_j(j) = \prod_{i=1}^k \partial x_i(i) / \partial x_{(i-1)}(i-1).$$

Можно ввести «пространственный» ляпуновский показатель, характеризующий поведение возмущения вдоль цепочки

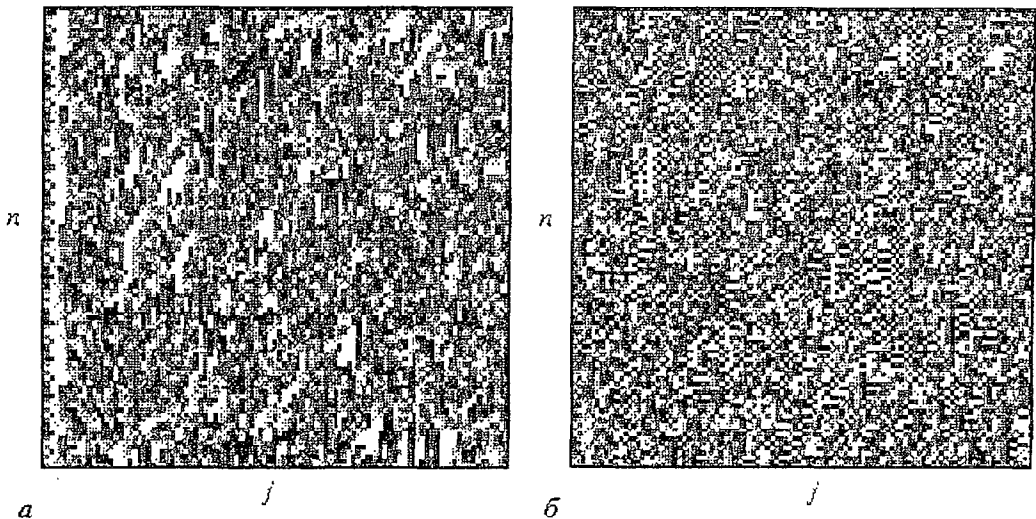


Рис. 7. Диаграммы мгновенных состояний элементов цепочки: а – пространственно установившегося режима СНА (область 5, рис. 5); б – пространственно установившегося режима хаоса (область 6, рис. 5)



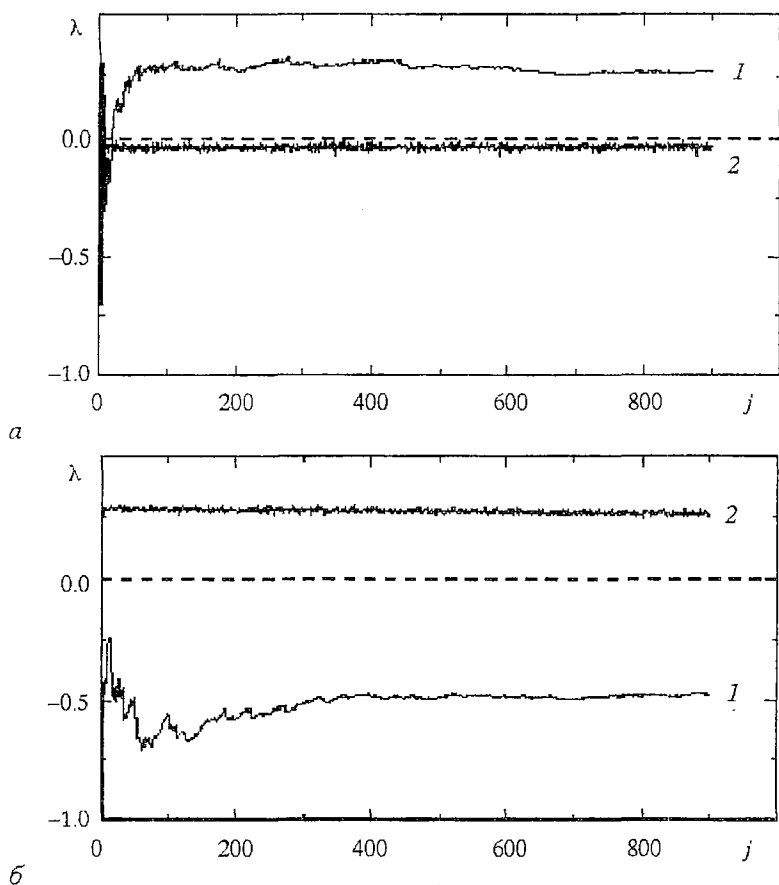


Рис. 8. Зависимости ляпуновских показателей  $\lambda_j$  (линия 2) и  $\lambda_s$  (линия 1) от  $j$ , полученные при  $K=2.0$ ,  $\Omega=0.5$ ,  $A=0.15$ ,  $\Omega_0=(5^{1/2}-1)/2$  и различных значениях параметра связи  $\gamma$ : а -  $\gamma=0.2$  (вче области пространственной неустойчивости); б -  $\gamma=0.4$  (в области неустойчивости)

$$\lambda_s(j) = (1/j) \ln |\mu_j(j)|.$$

Для небольших  $j$  значение  $\lambda_s(j)$  зависит от выбора начального состояния звеньев цепочки, но с ростом пространственной координаты такая зависимость пропадает. Если вдоль цепочки устанавливается  $\lambda_s(j) > 0$ , это означает, что возмущение состояния растет вдоль пространственной координаты. На бифуркационной диаграмме область нарастания неустойчивости по  $j$  располагается выше отмеченной штриховой линией границы.

В области, где вдоль цепочки устанавливается режим странного нехаотического аттрактора, переход через линию пространственного роста неустойчивости не влечет за собой каких-либо заметных изменений пространственно-временной динамики цепочки. Иначе обстоит дело в области хаоса (область б, рис. 5).

Выше границы неустойчивости хаотическая динамика развивается только в первых звеньях цепочки, которые характеризуются положительными ляпуновскими показателями (часто положительный ляпуновский показатель имеется только в первом звене цепочки). Последующие звенья просто ретранслируют хаос вдоль цепочки. Соответствующие зависимости ляпуновских показателей  $\lambda_j$  и  $\lambda_s$  от  $j$  представлены на рис. 8, а. В цепочке наблюдается стабилизация числа положительных ляпуновских показателей и энтропии Колмогорова (стабилизация хаоса).

Ниже линии неустойчивости собственная хаотическая динамика присуща большинству элементов цепочки. Почти каждое (или даже **каждое**) парциальное отображение вносит вклад в экспоненциальную неустойчивость системы во времени, характеризующуюся положительным ляпуновским показателем  $\lambda_j$ . Зависимости обычного ляпуновского показателя (линия 2) и показателя  $\lambda_s$  (линия 1) от пространственной координаты  $j$ , типичные для хаоса в области пространственной неустойчивости, представлены на рис. 8, б. В цепочке развивается гиперхаос, причем число положительных ляпуновских показателей и суммарная энтропия Колмогорова ( $H(j) = \sum_{i=1}^j \lambda_i^+$ ) линейно увеличиваются с ростом пространственной координаты. Стабилизация хаоса, отмечаемая в [25], в данном случае не наблюдается.

Зависимости энтропии Колмогорова от пространственной координаты в областях хаотической динамики ниже и выше границы пространственной неустойчивости представлены на рис. 9.

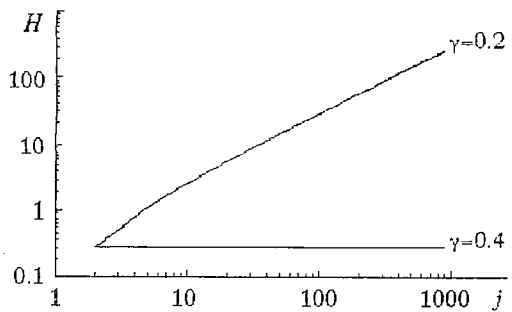


Рис. 9. Зависимость полной энтропии Колмогорова от пространственной координаты в областях хаотической динамики ниже и выше границы пространственной неустойчивости

### Заключение

Таким образом, проведенные исследования показали, что для цепочки отображений окружности характерны как явления, уже исследованные на цепочках с другими парциальными элементами (бифуркации удвоения периода и развитие хаоса вдоль пространственной координаты, мультистабильность, насыщение хаоса вдоль цепочки и т.д.), так и новые явления, связанные с возможностью реализации квазипериодических режимов. Задание квазипериодического режима хотя бы в нулевом элементе цепочки (квазипериодическое воздействие) своим типичным следствием имеет возникновение в ячейках цепочки, начиная с некоторого номера  $j$ , грубых режимов странных нехаотических аттракторов в широкой области значений параметров. Мы предполагаем, что в любой цепочке однонаправленно-связанных осцилляторов с квазипериодической динамикой наиболее типичным режимом, устанавливающимся с ростом пространственной координаты, наряду с хаосом, является странный нехаотический аттрактор. СНА возникает в результате разрушения квазипериодических движений и, как правило, предшествует переходу к хаосу. Можно предположить, что в среде с однонаправленным взаимодействием режим СНА тоже достаточно типичен.

*Работа частично финансировалась на средства гранта Госкомвуза России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66).*

### Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // Physica. 1984. Vol. 13D. P. 261.
2. Romeiras F.J., Bondeson A., Ott E., Antonsen Th.M., Grebogi C. Quasiperiodically forced dynamical systems with strange nonchaotic attractors // Physica. 1987. Vol. 26D. P. 277.

3. Romeiras F.J., Ott E. Strange nonchaotic attractors of the damped pendulum with quasiperiodic forcing // *Phys.Rev.* 1987. Vol. 35A, № 10. P. 4404.
4. Ding M., Grebogi C., Ott E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: From quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic // *Phys.Rev.* 1989. Vol. 39A, № 5. P. 2593.
5. Ding M., Grebogi C., Ott E. Dimension of strange nonchaotic attractors // *Phys.Lett.* 1989. Vol. 137A. P. 167.
6. Kapitaniak T., Ponce E., Wojewoda J. Route to chaos via strange nonchaotic attractors // *J.Phys.* 1990. Vol. 23A. P. L383.
7. Kapitaniak T. On strange nonchaotic attractors and their dimensions// *Chaos, solutions and fractals.* 1991. Vol.1, № 1. P.67.
8. Heagy J.F. and Hammel S.M. The birth of strange nonchaotic attractors // *Physica.* 1994. Vol. 70D. P. 140.
9. Pikovsky A.S., Feudel U. Characterizing strange nonchaotic attractors. Preprint NId-002. Universitat Potsdam, 1994.
10. Pikovsky A.S., Feudel U. Correlations and spectra of strange nonchaotic attractors // *J.Phys.* 1994. Vol. 27A. P.5209.
11. Feudel U., Kurths J., Pikovsky A.S. Strange nonchaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map // *Physica.* 1995. Vol.88D. P.176.
12. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Сосновцева О.В. Механизмы разрушения странного нехаотического аттрактора в отображении кольца с квазипериодическим воздействием // *Изв. вузов, Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т.3, № 3. С.34.
13. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V. Mechanisms of ergodic torus destruction and appearance of strange nonchaotic attractor // *Phys.Rev.* 1996. Vol.53E, № 5. P.4451.
14. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Sosnovtseva O.V. Strange nonchaotic attractors in autonomous and periodically driven systems // *Phys.Rev.* 1996. Vol.54E, № 4. P.3231.
15. Newhouse S., Ruelle D., Takens F. Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flows on  $T^m$ ,  $m \geq 3$  // *Commun.math.phys.* 1978. Vol.64. P.35.
16. Rend D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D. Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // *Phys.Rev.Lett.* 1982. Vol.49, № 2. P.387.
17. Кузнецов С.П. О критическом поведении одномерных цепочек // *Письма в ЖТФ.* 1983. Т.9, вып. 2. С. 94.
18. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // *Письма в ЖЭТФ.* 1984 Т. 39, вып.12. С.561.
19. Кузнецов С.П. О модельном описании цепочки связанных динамических систем вблизи точки перехода порядок-беспорядок // *Изв.вузов. Физика.* 1984. Т.27, № 6. С.87.
20. Кузнецов С.П., Пиковский А.С. Универсальность бифуркаций удвоения периода в одномерной диссипативной среде // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1985. Т.28, № 3. С.308.
21. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Размерность и физические свойства хаотических аттракторов цепочки связанных генераторов // *Письма в ЖТФ.* 1985. Т.12, вып.24. С.1505.
22. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // *ДАН СССР.* 1986. Т.286, № 5. С. 1120.
23. Crutchfield J.P., Kaneko K. Phenomenology of spatio-temporal chaos // *Direction in chaos.* Singapore: World scientific publ. co., 1987.

24. Kaneko K. Spatio-temporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices // Physica. 1989. Vol.37D. P.60.

25. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Пространственные структуры в диссипативных средах у порога возникновения хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т.34, № 2. С.142.

26. Kuznetsov S.P. Universality and scaling in two-dimensional coupled map lattices // Chaos, solitons and fractals. 1992. Vol.2, № 3, P. 281.

27. Belykh V.N., Mosekilde E. One-dimensional map lattices: Synchronisation, bifurcations, and chaotic structures // Phys.Rev. 1996. Vol.54E, № 4. P.3196.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
после переработки

5.02.97  
25.02.97

## DYNAMICS OF THE CHAIN OF COUPLED CIRCLE MAPS WITH QUASIPERIODIC FORCE

*T.E. Vadivasova, O.V. Sosnovtseva*

We analyze a spatio-temporal evolution of quasiperiodic regimes in the chain of coupled circle maps. The mechanisms of appearance of strange nonchaotic dynamics and properties of nonregular attractors are investigated.



*Вадивасова Татьяна Евгеньевна* – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), аспирантуру на кафедре радиофизики СГУ и защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (1986). В настоящее время является доцентом кафедры радиофизики Саратовского университета. Имеет 27 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



*Сосновцева Ольга Владимировна* – родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Работала инженером в НИИ механики и физики при Саратовском университете (1989–1992). Защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1996) по структурам и свойствам аттракторов неавтономных и связанных динамических систем. Имеет 10 публикаций в отечественной и зарубежной печати.