



СИНХРОНИЗАЦИЯ В ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Д.Э. Постнов, А.Г. Баланов

Исследуются связанные динамические системы, сложный хаотический режим каждой из которых может быть охарактеризован набором нескольких характерных времен. Вариация параметров вызывает изменение характерных времен системы и при определенных условиях позволяет наблюдать ряд эффектов, которые могут быть интерпретированы на языке общих представлений о синхронизации хаотических систем как явления согласования временных характеристик процессов. Показано, что понятие захвата может быть применено как к среднему времени пребывания состояния системы в окрестности одной из точек равновесия, так и к времени, характеризующему среднюю скорость дрейфа состояния системы.

Введение

За два последних десятилетия бурное развитие нелинейной теории колебаний, во многом инициированное открытием динамического хаоса, заставило по-новому взглянуть на многие классические эффекты и явления. Одним из наиболее ярких примеров в этой области можно считать эволюцию взглядов на понятие синхронизации, первоначально сформулированное как установление колебаний одинаковой частоты в двух взаимодействующих неидентичных осцилляторах. Продвижение в область более сильной нелинейности привело к расширению понятия синхронизации на гармоники и субгармоники – теперь уже условием синхронности двух колебаний являлось рациональное соотношение их частот. Наиболее общее определение для случая нехаотических режимов можно найти в [1], где в рассмотрение введены как колебательные, так и вращательные движения.

Результаты исследований синхронизации систем с динамическим хаосом заставили взглянуть на проблему с более широких позиций [2]. Поскольку требование кратности частот на новом уровне понимания оказалось трудноприменимым, было предложено под критерием синхронизации понимать установление определенных соотношений между функционалами, отражающими характерные временные свойства рассматриваемых процессов. Стало ясно, что многообразие проявлений синхронизации в хаотических системах требует применения расширенного набора диагностических средств, например, вычисления метрических характеристик аттракторов, анализа их топологии и др. Было найдено, что все характерные черты классических механизмов синхронизации наблюдаются и в случае взаимодействия хаотических седло–фокусных аттракторов [3–6]. В настоящее время детали механизмов синхронизации хаоса,

возникающего в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, для которого характерно наличие четко различимого пика в спектре мощности, продолжают интенсивно исследоваться [7–9].

Однако уже сегодня имеются результаты, позволяющие взглянуть на проблему синхронизации с еще более общих позиций. В [10] обнаружено, что введенное для детерминированных динамических систем понятие захвата частоты может быть с полным правом применено к стохастической системе, проявление нелинейных свойств которой управляется интенсивностью шума. При этом эффект синхронизации внешним периодическим сигналом наблюдается для средней частоты переключений в бистабильной системе, которая даже не отражена пиком в Фурье–спектре. Несколько ранее аналогичный по сути эффект был обнаружен при взаимодействии двух стохастических систем и получил название «стохастической синхронизации» [11].

Совокупность имеющихся на сегодняшний день результатов в определенной степени позволяет вернуться к наиболее общим определениям [1,2], заменив требование кратного соотношения частот на аналогичное для характерных времен изучаемой нелинейной системы, под которыми могут пониматься не только детерминированные величины типа периода предельного цикла, но и статистические по своей сути характеристики типа среднего времени возврата в плоскость сечения Пуанкаре для седло–фокусного хаоса (именно оно определяет положение пика базовой частоты в Фурье–спектре колебаний) либо среднего времени нахождения траектории в одном из метастабильных хаотических режимов [12]. Указанный подход еще раз подтверждает, что синхронизация выступает как весьма общий эффект, в той или иной форме присущий нелинейным системам вне зависимости от конкретного типа их режима функционирования.

В рамках данной работы мы ставим своей целью показать наличие эффекта синхронизации в указанном выше смысле при взаимодействии хаотических систем с несколькими характерными временами, часть из которых вообще не может быть ассоциирована с колебательным либо вращательным (в смысле, использованном в работе [1] движением).

1. Модель

В качестве исходной была выбрана трехмерная модель модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (ГИН) [13–17], богатая и хорошо изученная динамика которой удовлетворяет всем требованиям базовой модельной системы. К тому же, что немаловажно, она имеет адекватный радиофизический аналог.

Запишем уравнения ГИН в обобщенном виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= mx - zx + Q(y), \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + gF(x),\end{aligned}\tag{1}$$

где x, y, z – фазовые переменные, m и g – управляющие параметры, отвечающие за диссипацию и за инерционное ограничение амплитуды, соответственно.

Выбор функций $Q(y)$ и $F(x)$ позволяет существенно менять свойства исследуемой системы. Так, соотношения $Q(y)=y$ и $F(x)=x^2$ задают генератор с инерционной нелинейностью в его классическом варианте [13,14]. Выбор $F(x)=-\chi(x)x^2$ или $F(x)=\exp(x)$ [17] порождает то многообразие регулярных и хаотических типов колебаний автономного генератора, которое и делает ГИН одной из классических моделей с динамическим хаосом.

В общем случае наличие и характер сложных колебательных режимов

определяется свойствами симметрии $F(x)$, тогда как количество и расположение корней $Q(y)$ задает набор состояний равновесия (1).

Представим $Q(y)$ в виде $Q(y)=\alpha P(y)+\beta L(y)$, где $Q(y)$ – периодический компонент, а $L(y)$ – монотонный по y компонент. Тогда набор возможных состояний равновесия системы будет определяться соотношением

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ \alpha P(y) + \beta L(y) &= 0, \\ z &= -F(0). \end{aligned} \quad (2)$$

Задавая вид $P(y)$, $L(y)$ и коэффициенты α , β , можно управлять количеством и расположением состояний равновесия системы. Из общих соображений выберем

$$P(y) = \sin(\nu y), \quad L(y) = y. \quad (3)$$

Тогда случай $\alpha=0$, $\beta=1$ приводит нас к исходной модели ГИН [17]. Произвольные вариации α и β задают набор из $\alpha\nu/\pi\beta$ пар состояний равновесия, локализованных в интервале $y \in [-\alpha/\beta, \alpha/\beta]$. В рамках данной работы мы исследуем случай $\alpha \neq 0$, $\beta=0$. Он соответствует счетному π/ν периодическому множеству состояний равновесия системы (1).

Выбор вида $F(x)$ осуществлялся из соображений максимальной симметрии, сохраняющей сложную динамику системы

$$F(x) = \begin{cases} (a+\varepsilon)x^4, & x \geq 0, \\ (a-\varepsilon)x^4, & x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Мы использовали значения $a=3.1355$, $\varepsilon=1.5845$. Заметим, что полученная в результате модель имеет ясную радиофизическую интерпретацию в виде системы фазовой автоподстройки (ФАП) с автоматической регулировкой усиления (АРУ) в цепи обратной связи (ОС), структурная схема которой приведена на рис.1. В этом случае $F(x)$ отражает неидеальную характеристику двухполупериодного детектора, а g – постоянную времени фильтра цепи АРУ (блок б); $(m-z)$ задает коэффициент передачи инерционного (с конечной полосой пропускания) усилителя в цепи ОС.

Исследованию динамики ФАП посвящено значительное количество работ (см. обзор в работах [18.19]). В том числе продолжается исследование модели со сложной динамикой [20]. Специфический подход к рассмотрению процессов в стохастической нелинейной системе ФАП реализован в [21], где на ее базе экспериментально моделируются задачи нелинейного броуновского движения. В нашем случае комбинация хаотической динамики и счетного множества состояний равновесия порождает особый тип хаотического режима, образование и характеристики которого обсуждаются ниже.

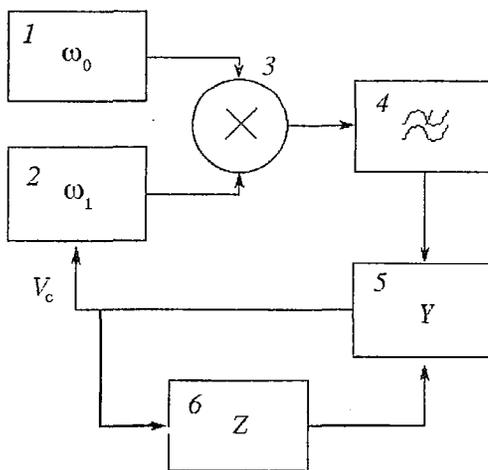


Рис. 1. Блок схема ФАП с усилителем в цепи управляемого генератора: 1 – эталонный генератор, 2 – управляемый генератор, 3 – фазовый детектор, 4 – фильтр низких частот, 5 – усилитель, 6 – цепь обратной связи усилителя, V_c – управляющее напряжение

2. Динамика автономной системы

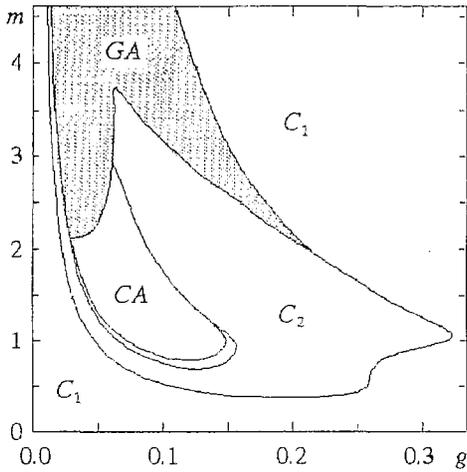


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма парциальной системы: C_1 – область существования однократного цикла, C_2 – двухкратного цикла, CA – хаотического аттрактора, возникшего на базе удвоения, GA – объединенного хаотического режима, характеризуемого дрейфом состояния системы вдоль координаты y . Здесь и далее параметр $\nu=2$

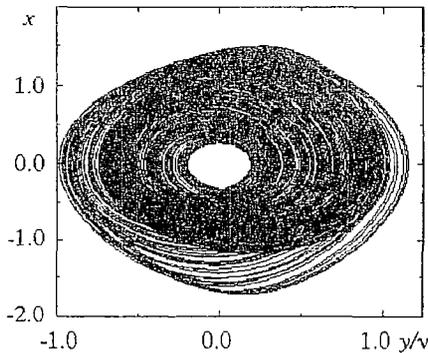
Заметим, что при достаточно больших $\alpha=1/\nu$ функция $\alpha P(y)=\alpha \sin(\nu y)$ близка к линейной в окрестности каждого из состояний равновесия. По этой причине следует ожидать сохранения основных закономерностей динамики [17] с учетом несколько иного выбора $F(x)$. Действительно, для значений $m=0\dots 2.0$, $g=0\dots 0.3$ характерным является наличие бифуркаций удвоения периода и хаотических аттракторов на их базе (рис.2). Заметим, что близкий к симметричному вид $F(x)$ приводит к сосуществованию двух семейств режимов, «опирающихся» на ее левую и правую ветви. В рамках данной работы, однако, нас интересует случай более развитого хаоса, при котором реализуется принципиально иной вид динамики системы.

На рис. 3, *a* приведена фазовая проекция объединенного хаотического аттрактора при $m=4.09$, $g=0.05$, где можно различить два симметрично

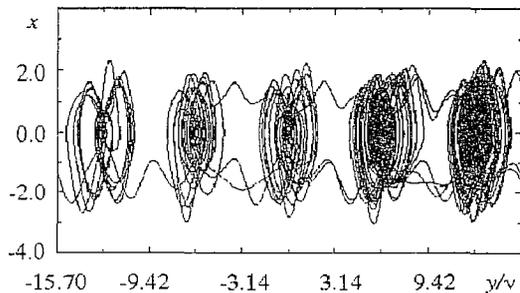
расположенные хаотические подмножества, несколько отличающиеся размерами.

При увеличении m хаотический аттрактор «распухает», приближаясь к границам своего бассейна притяжения, который при достаточно малых m имеет однородный, четко ограниченный вид (рис. 4, *a*). При больших значениях m внутри бассейна появляется множество начальных условий, принадлежащее соседним бассейнам притяжения (рис. 4, *б*)

При дальнейшем увеличении параметра структура локального бассейна притяжения еще более фрактализуется, однако притягивающее хаотическое множество еще существует как таковое в окрестности данного равновесия. Наконец, при $m>3.5$ (рис. 4, *г*) единственным устойчивым видом колебаний системы остается сложно устроенный хаотический режим. Типичный вид соответствующей ему фазовой проекции приведен на рис.3.б. Поведение фазовой траектории в этом случае может быть разбито на два вида движений: вращение



a



б

Рис. 3. Фазовые портреты, характерные для системы (1): *a* – хаотический аттрактор, родившийся на базе бифуркаций удвоения; *б* – сложный хаотический режим, характеризуемый дрейфом по переменной y . Здесь и далее $g=0.05$

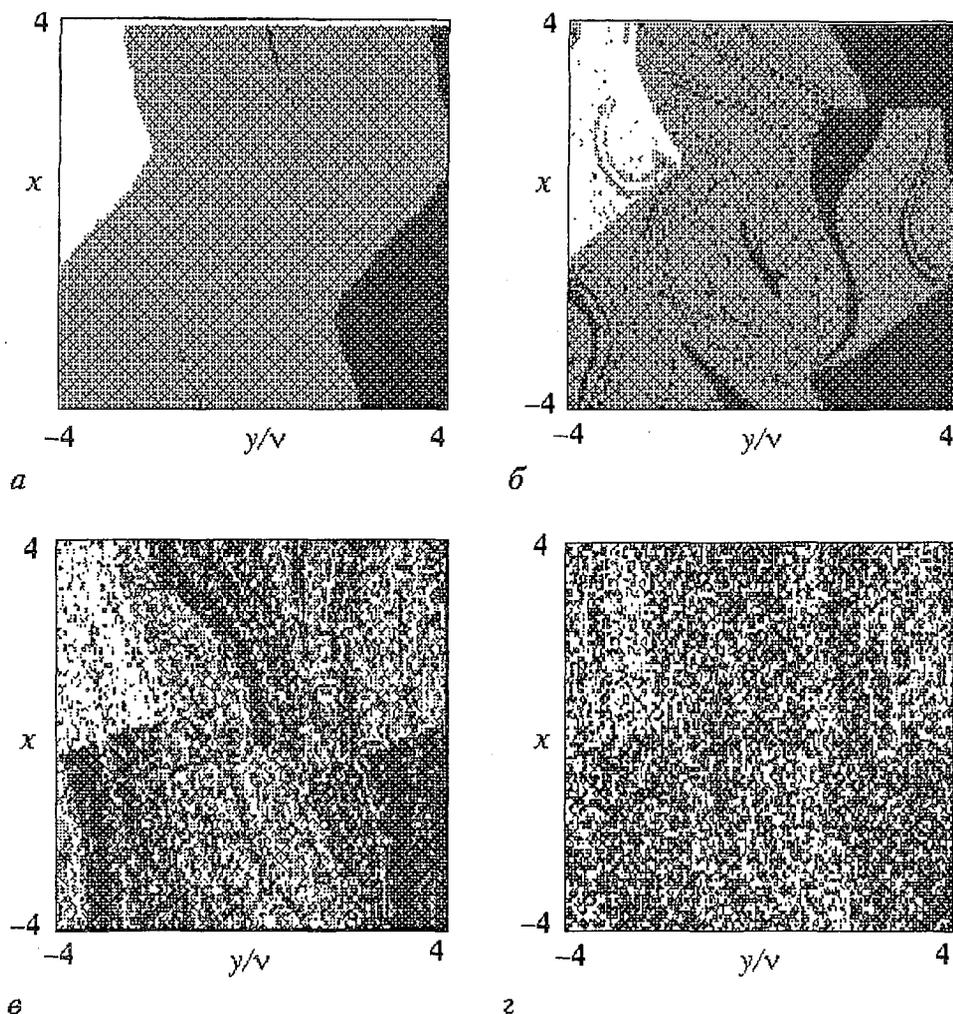


Рис. 4. Бассейн притяжения (серый цвет) хаотического аттрактора в зависимости от параметра m : $a - m=1.8$; $б - 2.5$; $в - 3.5$; $г - 4.2$. С увеличением m возникает и эволюционирует множество начальных условий, приводящих к уходу траектории в окрестность соседних (левого – белый цвет) или правого – черный цвет) состояний равновесия

вокруг одного из состояний равновесия и относительно редкие переходы из одного «бывшего» бассейна притяжения в другой.

Доказательное исследование описанного выше кризиса хаотического режима мы оставляем на будущее, здесь же нас интересуют свойства и возможная интерпретация колебаний в системе при $m > 3.5$. Двум упомянутым выше типам движения можно поставить в соответствие два характерных времени. Одно из них T – среднее время возврата в секущую плоскость $x=0$. Оно характеризует квазипериод колебаний при вращении вокруг локального состояния равновесия O_i . Второе время τ имеет смысл среднего времени пребывания траектории в окрестности O_i .

Заметим, что в силу ненулевой асимметрии $F(x)$ исследуемый хаотический режим нестационарен в том смысле, что переходы в одну сторону более вероятны, чем в другую. Как результат, состояние системы, хаотически переключаясь между окрестностями точек равновесия, медленно дрейфует в сторону увеличения y . Такому движению может быть поставлено в соответствие еще одно, также зависящее от параметров, характерное время системы, связанное со средней скоростью дрейфа $J = \langle \dot{y} \rangle$, которую мы определяем здесь аналогично определению

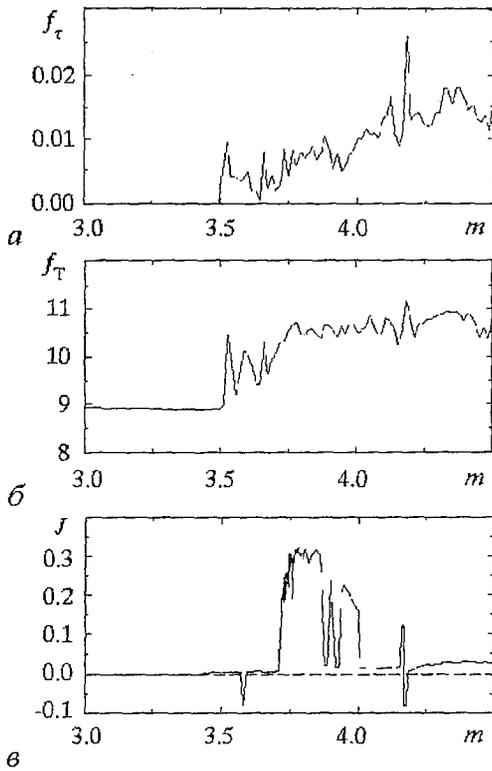


Рис. 5. Зависимость средней частоты переходов из окрестности одного состояния равновесия в окрестность другого (а); средней частоты возврата в секущую плоскость (б); средней скорости движения вдоль координаты y (в) от параметра m

потока вероятности для пространственно периодических стохастических систем [22]¹.

Таким образом, исследуемая трехмерная динамическая модель демонстрирует в широкой области параметров весьма сложный по структуре хаотический режим, в котором, тем не менее, возможно выделить (и измерить!) как минимум три зависящих от параметров характерных времени системы. При численном эксперименте, однако, удобнее пользоваться не временами T , τ , которые для ряда значений параметров исследуемой системы устремляются в бесконечность, а соответствующими частотными характеристиками $f_T=1/T$, $f_\tau=1/\tau$. Изменение указанных величин при вариации m иллюстрирует рис. 5.

Наша дальнейшая задача заключается в выяснении характера взаимодействия этих носящих статистический характер времен в условиях диффузионной связи двух систем типа (1).

3. Динамика двух связанных систем

Введем радиофизически обоснованную связь между двумя системами вида (1) с учетом (3)

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= m_1 x_1 - z_1 x_1 + \alpha \sin(\nu y_1) + \gamma(x_2 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= -x_1, \\
 \dot{z}_1 &= -gz_1 + gF(x_1), \\
 \dot{x}_2 &= m_2 x_2 - z_2 x_2 + \alpha \sin(\nu y_2) + \gamma(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= -x_2, \\
 \dot{z}_2 &= -gz_2 + gF(x_2),
 \end{aligned} \tag{5}$$

где γ – параметр связи. С точки зрения моделирования исследуемой системы двумя ФАП, уравнения (5) соответствуют связи через разностный сигнал управляющего напряжения V_c (см. рис.1).

¹ Доводя до логического завершения идею статистического описания подобного хаотического движения, можно записать (1) в виде пространственно периодической потенциальной системы, возбуждаемой коррелированным шумом, роль которого играет собственный хаотический сигнал.

Следуя подходу одной из первых работ по хаотической синхронизации [3], рассмотрим сначала взаимодействие двух идентичных подсистем, для чего достаточно выбрать $m_1=m_2$. В этом случае существует инвариантное подпространство, задаваемое условиями $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$, на котором связанные подсистемы ведут себя тождественно. Наличие аттрактора, лежащего в указанном подпространстве, соответствует полной хаотической синхронизации [23]. В общем случае для решения этой задачи необходимо записать уравнения в разностях (x_1-x_2) , (y_2-y_2) , (z_1-z_2) и исследовать состояние равновесия полученной системы на устойчивость. В нашем случае указанная выше процедура осложняется тем, что состояние системы неограниченно дрейфует по переменной y . По указанной причине как инструмент исследования предпочтительнее численный эксперимент.

К настоящему времени сама возможность появления полностью синхронных хаотических колебаний в идентичных связанных системах не является неожиданной [3,23–25]. Однако исследуемый нами случай имеет существенные особенности. Действительно, как можно видеть из рис. 4, 2, даже небольшое различие в начальных условиях парциальных подсистем может с большой вероятностью приводить к переходам в противоположные стороны. Будут ли с течением времени траектории в проекциях парциальных подсистем сближаться настолько, чтобы все переходы из окрестности одного состояния равновесия к другому происходили синхронно?

На рис. 6 приведена зависимость дисперсии $\sigma_{\Delta y/\nu}^2$ разности координат $\Delta y/\nu$ от степени связи γ . Заметим, что поскольку режим полной синхронизации в нашей системе определен с точностью до постоянного сдвига, необходимо использование дисперсии взамен обычно применяемого [26] среднеквадратичного отклонения. Нормировка y на ν приводит к 2π -периодичности состояний равновесия. Как можно видеть из графика, увеличению степени связи отвечает спад $\sigma_{\Delta y/\nu}^2$. Режим полной синхронизации², $\sigma_{\Delta y/\nu}^2 \approx 0$, достигается при $\gamma > 0.092$. Таким образом, даже в случае полной идентичности связанных подсистем существует некоторое пороговое значение степени связи, ниже которого синхронный режим не достигается. Интересно, что аналогичные результаты получены для стохастического бистабильного осциллятора [10].

Приведенные выше результаты, по сути, не затрагивают проблему соотношения характерных времен взаимодействующих подсистем, поскольку выбором $m_1=m_2$ еще при $\gamma=0$ мы задали $T_1=T_2$, $\tau_1=\tau_2$, $J_1=J_2$. В этом смысле рассмотренная выше задача, являясь наиболее очевидной в плане ее постановки, относится, по сути, к вопросу «второй очереди»: как меняется при увеличении связи поведение подсистем, когда их характерные времена уже совпадают? Наиболее же общая постановка вопроса требует задания изначального различия парциальных подсистем, для чего, в соответствии с рис. 5, достаточно выбрать $m_1 \neq m_2$.

На рис.7 приведены результаты такого эксперимента в случае $m_1=4.2$, $m_2=3.85$. Сопоставление изменения характеристик колебаний во взаимодействующих подсистемах при увеличении степени связи позволяет выделить соответствующие уровни хаотической синхронизации.

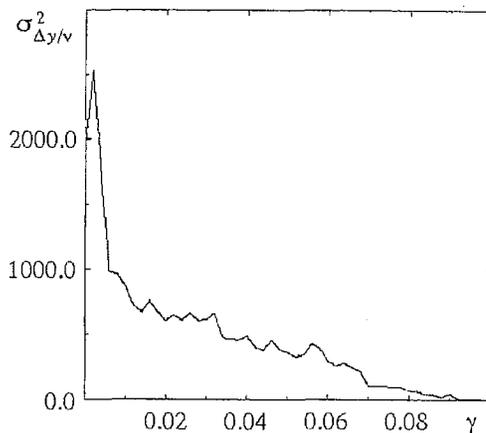


Рис. 6. Квадрат дисперсии величины $\Delta y/\nu$ в зависимости от параметра связи γ (случай идентичных систем)

² Мы использовали условие $\sigma_{\Delta y/\nu}^2 < 0.01$.

При $\gamma > 0.14$ устанавливается $T_1/T_2 \approx 1$ – в окрестности каждой точки равновесия траектории частичных подсистем теперь вращаются с одинаковой частотой. Указанный переход легко диагностируется по виду перекрестной фазовой проекции (рис. 7, а, б), он аналогичен синхронизации седло-фокусного хаоса [5,6,8].

При значениях $\gamma > 0.35$ выравниваются средние скорости дрейфа во взаимодействующих подсистемах $J_1/J_2=1$, однако средние времена пребывания в окрестности состояния равновесия еще не совпадают. Условие их равенства $\tau_1 \approx \tau_2$ выполняется при достижении $\gamma \approx 0.38$ (рис. 7, в).

Однако лишь при $\gamma > 0.6$ достигается синхронизация в смысле $\sigma_{\Delta y/\nu}^2 \approx 0$. Вид логарифмической зависимости $\sigma_{\Delta y/\nu}^2$ от γ приведен на рис. 7, г. Ее характерной

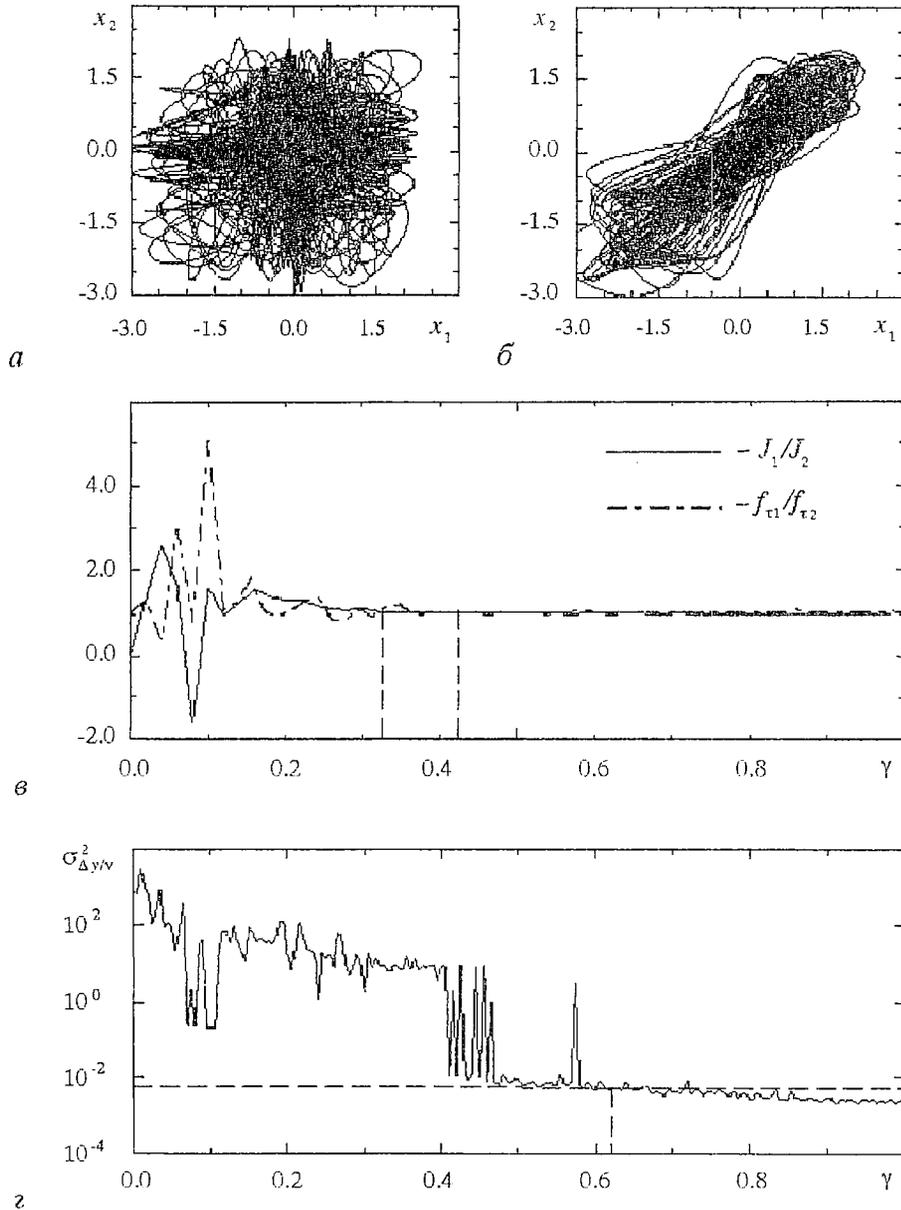


Рис. 7. Взаимодействие временных масштабов в системе с расстройкой $m_1=4.2$, $m_2=3.85$: а, б – перекрестная фазовая проекция в плоскости (x_1, x_2) при $\gamma=0.0$ (а) и $\gamma=0.14$ (б); в – отношение средних скоростей J_1/J_2 и средних частот переходов f_{t1}/f_{t2} в зависимости от параметра связи γ ; г – зависимость квадрата дисперсии величины $\Delta y/\nu$ от параметра γ

особенностью является наличие двух уровней $\sigma^2_{\Delta y/v}$, различающихся в среднем на 3 порядка, что дает возможность четко разделить несинхронный и синхронный режимы с точки зрения этой характеристики. Интересно, что переход между ними осуществляется по типу переключений (см. область $\gamma=0.4\dots 0.47$ на рис. 7, в).

Таким образом, можно говорить о раздельном попарном захвате характерных времен (средних значений) и о последующей эволюции колебаний, при которой они становятся все более похожими. Заметим, что каждое из характерных времен может быть описано как на уровне среднего значения, так и с точки зрения дисперсии. Тогда процесс синхронизации в целом также может характеризоваться как синхронизация первых моментов (среднего) и вторых моментов (дисперсии) по каждому из времен. При этом наиболее жестким критерием остается условие $\sigma^2_{\Delta y/v} \approx 0$, которое можно считать условием полной синхронизации.

Рис. 8 иллюстрирует эволюцию распределения разности фазовых переменных $^3 p(\Delta y/v)$ при увеличении степени связи.

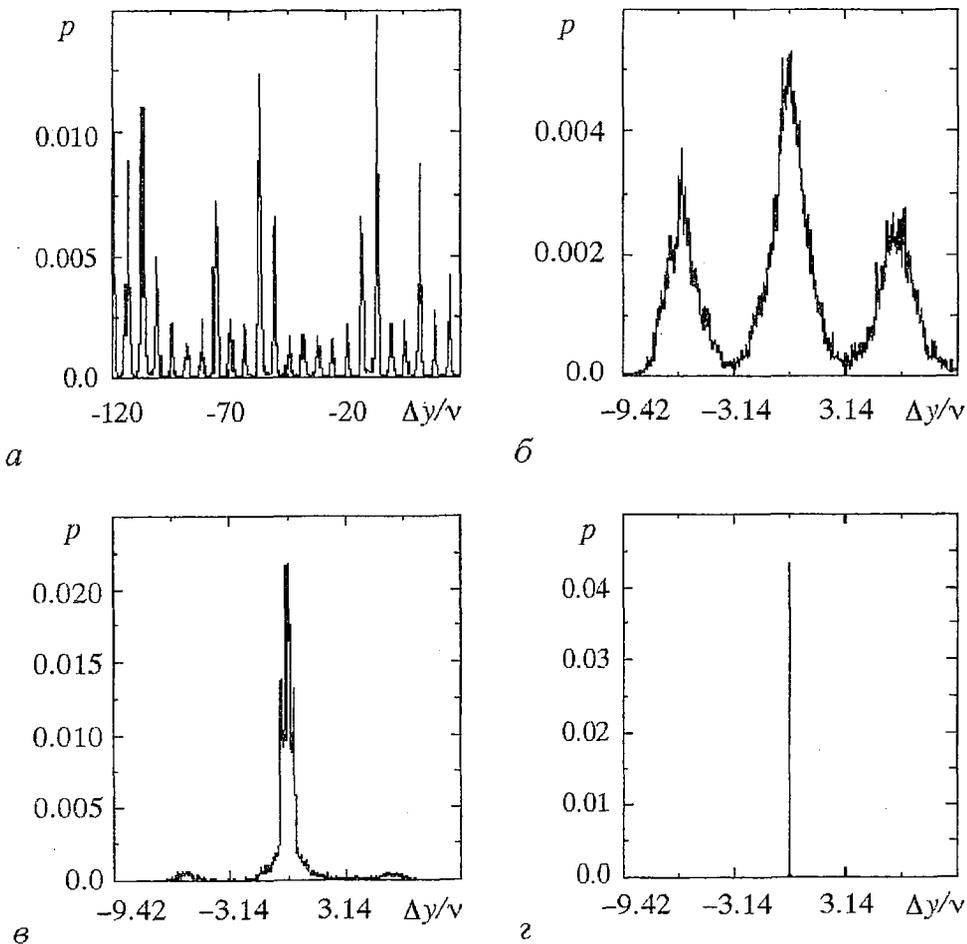


Рис. 8. Эволюция распределения разности фазовых переменных $\Delta y/v$ при увеличении степени связи γ : а - $\gamma=0$; б - 0.05; в - 0.1; г - 0.6

³ Это не есть плотность распределения вероятности $\Delta y/v$, поскольку мы не можем гарантировать стационарности процесса для всех γ . Однако такое распределение, посчитанное за определенное конечное время при определенном начальном $\Delta y/v$, наглядно характеризует динамику системы.

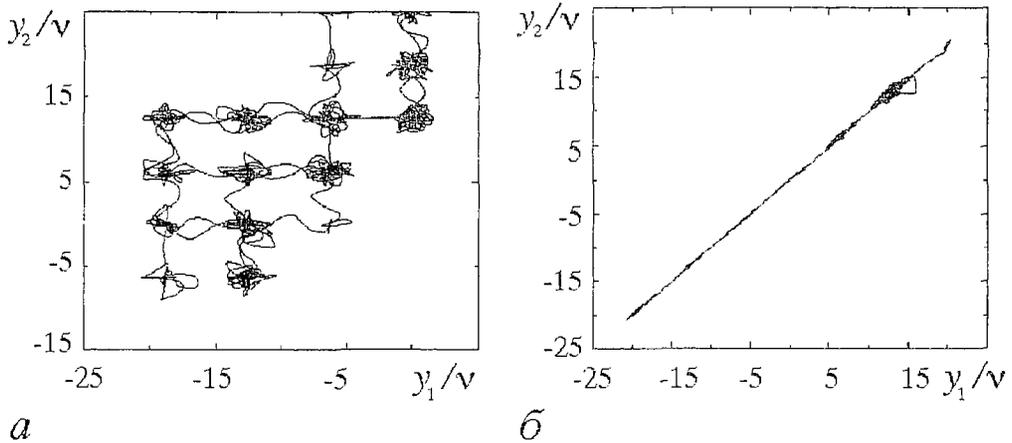


Рис. 9. Перекрестная фазовая проекция в плоскости нормированных координат (y_1, y_2) : $a - \gamma = 0$; $b - \gamma = 0.6$

Случаю $\gamma = 0$ отвечает линейчатая структура, каждый максимум которой соответствует относительно более длительному пребыванию траектории в окрестности одного из состояний равновесия (рис. 8, a). Траектория при этом хаотически блуждает на поле возможных состояний равновесия O_{ij} , где i и j относятся к первой и второй подсистеме, соответственно (рис. 9, a).

Увеличению γ отвечает локализация разности $\Delta y/v$ в окрестности трех соседних состояний равновесия (рис. 8, b , $в$). Наконец, большим значениям γ соответствует δ -пик в распределении рис. 8, $г$, что и отвечает синхронизации в смысле $\sigma^2_{\Delta y/v} \approx 0$. Соответствующая фазовая проекция имеет вид диагонали (рис. 9, b).

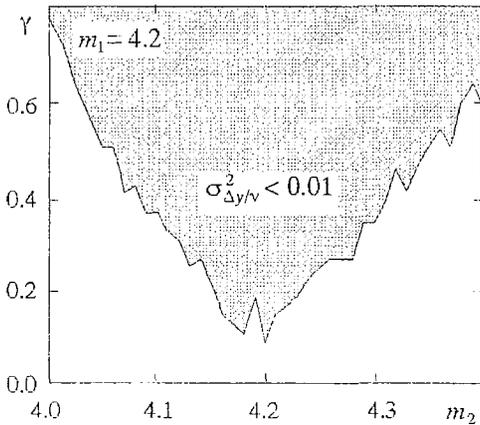


Рис. 10. Область параметров в плоскости (m_2, γ) , соответствующая синхронным движениям в парциальных подсистемах (серый цвет)

Разумеется, обсуждаемые выше процессы существенно зависят от выбора параметров m_1 и m_2 . На рис. 10 приведена зона синхронизации, определенная из условия $\sigma^2_{\Delta y/v} < 0.01$. Хорошо видно, что она имеет характерную треугольную форму, наблюдаемую как в случае классической синхронизации, так и для хаотических или стохастических систем. В нашем случае обращает на себя внимание изрезанность границы области синхронизации, что, по-видимому, обусловлено характером изменения свойств системы при вариации параметра (см. рис. 5).

Выводы

В рамках данной работы мы продемонстрировали подход, основанный на диагностике хаотической синхронизации как явления захвата характерных времен взаимодействующих систем.

Существенно, что указанные времена могут быть связаны не только с колебательным движением. Как было показано выше, это может быть и среднее

же время, характеризующее среднюю скорость дрейфа динамической переменной системы вдоль счетного числа состояний равновесия.

В численном эксперименте по мере увеличения параметра связи обнаружен последовательный, попарный захват характерных времен. Это позволяет выделить определенные уровни в процессе сближения колебаний парциальных подсистем, качественно характеризует степень синхронизации.

Наконец, по каждому из временных масштабов можно различать два этапа синхронизации, первый из которых отвечает синхронизации в среднем (например $f_1=f_2$), а второй – достижению близкой к нулю дисперсии $\sigma^2_{\Delta y/v} \approx 0$ (переходы происходят одновременно). В зависимости от природы взаимодействующих подсистем и их режима функционирования указанные этапы могут как совпадать в пространстве параметров, так и существенно различаться. Так в классическом случае синхронизации гармонических колебаний захват частоты автоматически гарантирует нулевую дисперсию разности фаз. В рамках данной работы проиллюстрирован случай, когда синхронизация в смысле $\sigma^2_{\Delta y/v}$ имеет четко выраженную границу, достигаемую при конечных значениях степени связи. Чем более сложный режим демонстрируют исследуемые системы, тем более удобен описанный подход к рассмотрению явления хаотической синхронизации. При этом само понимание явления синхронизации как процесса уменьшения числа независимых временных масштабов при вариации связи представляется полезной концепцией, помогающей связать понятие синхронизации колебаний в его классическом смысле с актуальными сегодня проблемами кооперативной динамики нелинейных динамических и стохастических систем.

Работа частично была поддержана Госкомвузом России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66) и российско-германским грантом DFG and RFFI 436 RUS 113/334/0 (R).

Библиографический список

1. Блехман И.И. Синхронизация в природе и технике. М.:Наука, 1981.
2. Blekhtman I.I., Landa P.S., Rosenblum M.G. Synchronization and chaotization in interacting dynamical systems // Appl.Mech.Rev. 1995. Vol.48, № 11. P.733.
3. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 29, № 9. С. 1050.
4. Ланда П.С., Перминов С.М. Взаимодействие периодических и стохастических автоколебаний // Изв.вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 4. С.424.
5. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 6. С. 569.
6. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A. Synchronization of chaos // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
7. Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E. Synchronization of chaos // Proc. First International Conference on Applied Synergetic and Synergetic Engineering, Erlangen, Germany. June 21–23, 1994. P. 200.
8. Rosenblum M., Picovsky A. and Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators // Phys. Rev. Lett.. 1996. Vol. 76. P. 1804.
9. Pikovsky A., Rosenblum M. and Kurths J. Effect of phase synchronization in driven chaotic oscillators // IEEE Trans. CAS-I, 1997.
10. Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S. Mean Switching Frequency Locking in Stochastic Bistable Systems Driven by Periodic Force // Phys.Rev.Lett. 1995. Vol. 75. P. 4157.
11. Neiman A.B. Synchronization-like phenomena in coupled stochastic bistable systems // Phys. Rev. E. 1994. Vol.49. P.3484.

12. *Anishchenko V.S., Neiman A.B., Safonova M.A.* Stochastic Resonance in chaotic systems // *J. Stat. Phys.* Vol. 70, № 1/2, 1993. P. 183.
13. *Теодорчик К.Ф.* Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью // *ЖТФ.* 1946. Т. 16, вып. 7. С. 845.
14. *Капцов Л.Н., Сенаторов К.Я.* О работе RC-генератора пилообразных колебаний с инерционным активным двухполосником // *Радиотехника и электроника.* 1964. Т. 9, вып.10. С.1757.
15. *Капцов Л.Н.* Возникновение пикового режима в неавтономном генераторе с инерционной нелинейностью // *Радиотехника и электроника.* 1975. Т.20, вып.12. С.2496.
16. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.:Наука, 1980.
17. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. Механизмы возникновения, структура и свойства хаоса в радиофизических системах. М.: Наука, 1990.
18. *Шахгильдян В.В., Ляховский А.А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972.
19. *Фазовая синхронизация / Под ред. В.В. Шахгильдяна, Л.Н. Белюстиной.* М.: Связь, 1975.
20. *Пономаренко В.П., Заулин И.А.* Роль инерционности и начального рассогласования в развитии колебательных режимов в бистабильной системе с фазовым управлением // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т. 3, № 5. С. 26.
21. *Постнов Д. Э., Никитин А. П., Анищенко В. С.* Управление потоком вероятности в системе фазовой автоподстройки частоты // *Письма в ЖТФ.* 1996. Т. 22, вып. 9. С. 24.
22. *Bartussek R., Hänggi P. and Kissner J. G.* Periodically Rocked Thermal Ratchets // *Europhys. Lett.* 1994. Vol. 28. P.459.
23. *Pecora L. and Carroll T.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 821–823.
24. *Волковский А.Р., Гульков Н.Ф.* Экспериментальное исследование бифуркаций на пороге стохастической синхронизации // *Письма в ЖТФ.* 1989. Т. 15, вып. 7. С. 5.
25. *Chua L., Itoh M., Kocarev L. and Eckert K.* Chaos synchronization in Chua's circuit. Chua's Circuits // *A Paradigma for Chaos / Ed. R.N. Madan.* Singapore: World Scientific, 1993. P. 309.
26. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Суцук М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // *УФН.* 1996, Т. 166, № 4. С. 365.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 14.03.97
после переработки 29.04.97

SYNCHRONIZATION IN CHAOTIC SYSTEMS WITH DENUMERABLE SET OF EQUILIBRIUM STATES

D.E. Postnov, A.G. Balanov

Coupled chaotic systems, in each of which the set of a few characteristic time describes the complex oscillatory regimes, are investigated. Variation of parameters changes these characteristic times and allows us under certain conditions to observe the processes which can be interpreted in terms of synchronization phenomenon. It is shown, that the «locking» mechanism can be extended both to the mean resident time of system's state near the one of the equilibrium points and to the time which corresponds to the mean drift rate of system's state.