



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДИКИ РЕКОНСТРУКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ К ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАММЕ

А.Н. Павлов, Н.Б. Янсон

Подробно изложена методика реконструкции математической модели. Собраны воедино и проанализированы результаты ее применения к ЭКГ. Рассмотрена возможность моделирования в рамках традиционных методов восстановления фазовых портретов, отмечены недостатки такого подхода. Приведены результаты, полученные при применении предложенного авторами способа восстановления координат вектора состояния. Исследована возможность получения грубой математической модели при использовании статистического метода. Обсуждаются проблемы, связанные с адекватностью математического описания, отмечаются серьезные недостатки методики глобальной реконструкции и излагаются рассуждения авторов по поводу перспективности такой методики для задач моделирования.

Введение

Один из способов изучения различных процессов и явлений реальной жизни состоит в построении и исследовании их математических моделей. Такой подход является универсальным, поскольку он позволяет абстрагироваться от изучаемого объекта, рассматриваемого в рамках конкретной области естествознания, путем перехода на язык математического описания. В зависимости от вида модели к исследованиям могут быть привлечены методы нелинейной динамики и теории колебаний (в том случае, если математическое описание представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или дискретных отображений), теории волновых процессов (если модель выбрана в виде уравнений в частных производных) и т.д. Наличие модели исследуемой системы значительно расширяет возможности ее изучения, позволяя решать задачу предсказания как ее поведения во времени, так и эволюцию режимов ее функционирования при изменении управляющих параметров.

Работая с тем или иным математическим описанием, исследователь должен иметь четкое представление об адекватности такого описания реальному явлению. Соответственно, при построении модели в нее должны быть заложены все наиболее существенные факторы, оказывающие влияние на поведение системы. Разумеется, адекватность любого математического описания будет зависеть от степени осведомленности исследователя об изучаемом объекте.

Наиболее сложная, хотя и широко распространенная ситуация будет в случае так называемого «черного ящика», когда доступной для наблюдения является только зависимость одной из характеристик a , описывающих состояние системы в данный момент, от времени. Такая зависимость $a(t)$, измеренная в течение

конечного времени t_0 , называется наблюдаемой (или реализацией) системы, а при дискретизации с шагом Δt ($a(i\Delta t) = a_i, i=1, N; N = [t_0/\Delta t]$) она носит название временного ряда. Делается достаточно серьезное предположение о том, что наблюдаемая $a(t)$ является детерминированно порожденной, то есть представляет собой реализацию некоторой динамической системы (ДС). Это предположение существенно сужает класс систем, пригодных для глобального моделирования описанным в настоящей работе методом.

До 1980 года считалось, что для описания нелинейных динамических систем в терминах фазового пространства (или пространства состояний) необходимо знание временных зависимостей всех фазовых переменных, которые в действительности доступны для наблюдения крайне редко, тогда как ситуация «черного ящика» представляется более типичной. В 1980 году была опубликована работа Паккарда [1], в которой отмечалось, что фазовый портрет динамической системы может быть восстановлен по скалярному временному ряду a_i , если в качестве недостающих координат вектора состояния используется тот же самый ряд a_i , взятый с некоторым запаздыванием. В 1981 году появилась работа [2], где Такенсом была доказана теорема, утверждавшая, что по одномерной незашумленной реализации $a(t)$ ДС, обладающей аттрактором размерности d , методом задержки

$$x(t) = \{a(t), a(t+\tau), \dots, a(t+(m-1)\tau)\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad (1)$$

(τ – задержка по времени, которая может быть практически любой, m – размерность пространства вложения, $m \geq 2d+1$), можно восстановить множество x , являющееся топологически эквивалентным аттрактору исходной системы.

Появление теоремы Такенса создало предпосылки для решения на ее основе задач предсказания по временному ряду [3,4], а в 1987 году была опубликована работа Кремерса и Хюблера [5], где предлагался метод восстановления уравнений ДС по ее одномерной реализации. Таким образом, была продемонстрирована возможность поставить в соответствие экспериментальному сигналу математическую модель в виде системы ОДУ или дискретных отображений, решение которой при удачном априорном задании общего вида эволюционного оператора могло бы с достаточной степенью точности воспроизвести исходный сигнал. Идея такого метода была сразу же воспринята многими исследователями, в результате чего работа [5] получила широкую известность. В течение нескольких лет появился ряд статей по данной тематике, обзор которых с более подробным изложением методики реконструкции математической модели приведен в разделе 1.

В настоящей работе рассматривается применение алгоритма глобальной реконструкции к сигналу, описывающему электрическую активность сердца человека – электрокардиограмме (ЭКГ). Кратко обоснуем наш интерес к этому сигналу.

Во-первых, в последние годы стал очевидным рост интереса к объектам биологического происхождения со стороны специалистов в области нелинейной динамики. Биологические системы представляют собой обширное поле деятельности, где достижения теории динамических систем могут находить свое практическое применение.

Во-вторых, сигнал ЭКГ является достаточно сложным по форме и обладает некоторыми особенностями, которые выделяют его из реализаций других колебательных систем, демонстрирующих хаотическое поведение как биологического, так и физического происхождения. Кроме того, поскольку исследование электрокардиограмм с давних пор является популярным и эффективным методом диагностики, данный сигнал широко распространен и легко доступен.

Появление в современной нелинейной динамике направления, связанного с изучением сердечной деятельности, произошло сравнительно недавно [6,7]. С одной стороны, стало появляться большое количество работ, имеющих отношение

к задачам анализа по экспериментальным данным: диагностика нормы и патологии [8–13], изучение структуры фазового пространства ЭКГ [14]; с другой стороны, делаются попытки решения задачи синтеза ДС [15,16].

Данная работа представляет собой обзор, в котором будут собраны воедино и проанализированы результаты применения методики реконструкции математической модели к ЭКГ, полученные авторами в разное время. В этом обзоре мы постараемся изложить степень нашего сегодняшнего понимания возможности решения задачи реконструкции применительно к ЭКГ, отметив те сложности и проблемы, с которыми неизбежно будет сталкиваться исследователь при ее решении.

В разделе 2 настоящей работы рассматриваются результаты моделирования с применением традиционных методов восстановления фазовых портретов, отмечаются недостатки такого подхода. В разделе 3 приводятся результаты, полученные при применении предложенного авторами в [17] способа восстановления координат вектора состояния. В разделе 4 рассматривается возможность получения грубой математической модели при использовании статистического метода. И, наконец, в заключении обсуждаются проблемы, связанные с адекватностью математического описания, отмечаются серьезные недостатки методики глобальной реконструкции и излагаются рассуждения авторов по поводу перспективности такой методики для задач моделирования.

1. Описание алгоритма глобальной реконструкции ДС

Задать динамическую систему означает указать набор величин, однозначно определяющих ее состояние в данный момент времени, и оператор эволюции, то есть способ, по которому можно определить состояние в любой момент времени t по известному состоянию в момент t_0 [18]. Само определение ДС подразумевает наличие 2-х этапов реконструкции математической модели по скалярному временному ряду, а именно восстановление фазового портрета ДС и запись конкретного вида эволюционного оператора. Рассмотрим эти этапы более подробно.

1.1. Реконструкция фазового портрета. Предположим, что в результате эксперимента измеряются значения некоторой физической величины a , то есть набор $a_i = a(i\Delta t)$, $i = 1, N$. Считаем, что ряд a_i является детерминированно порожденным некоторой динамической системой с непрерывным или дискретным временем, представляя собой дискретизованную с шагом Δt временную зависимость одной из переменных, определяющих состояние данной ДС, то есть, как отмечается в [19], является одномерной проекцией фазовой траектории динамической системы. Предполагается, что эта траектория принадлежит аттрактору системы, размерность которого равна d . В этом случае, согласно Такенсу, задать вектор состояния можно по методу (1).

На практике при вычислении метрических (размерность) или динамических (ляпуновские показатели) характеристик аттрактора значение m , определяемое формулой Манэ [20] ($m \geq 2d+1$), часто оказывается завышенным [21], и бывает достаточно ограничиться пространством вложения с меньшей размерностью (но, естественно, большей, чем d).

В связи с этим возникает необходимость определения размерности аттрактора. Данная проблема представляет собой отдельное направление в задаче реконструкции, которой посвящено множество работ. Обычно вместо размерности Хаусдорфа d вычисляют так называемую корреляционную размерность D_c [22–25], используя формулу

$$D_c = \lim_{e \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} [\ln C(e, N) / \ln e], \quad (2)$$

где $C(e, N) = N^{-2} \sum_{i \neq j} v(e - |x_i - x_j|)$ – корреляционный интеграл, e – размер ячейки разбиения фазового пространства, N – число точек, используемых для оценки размерности, v – функция Хевисайда.

Несмотря на то, что теорема Такенса не предусматривает никаких ограничений на величину τ , выбор задержки может оказывать очень существенное влияние на значение D_c . В самом деле, в случае малого τ восстановленный аттрактор в фазовом пространстве будет очень вытянут и расположен вдоль прямой, определяемой уравнением $x_1 = x_2 = \dots = x_m$, в результате чего теряется информация о структуре аттрактора, а также уменьшается расстояние между его соседними точками, что приводит к изменению величины размерности (к ее уменьшению). С другой стороны, слишком большое τ также ведет к геометрическим искажениям реконструированного множества, а следовательно, опять – таки к изменению D_c .

Различными исследователями было предложено использовать множество способов выбора оптимального τ . Например, на основе расчета функции взаимной информации [24], первого минимума логарифма обобщенного корреляционного интеграла [25] и т.п.

Иногда для практических целей значение τ определяется менее строгим образом, «на глаз», исходя из геометрии реконструированного множества (чтобы аттрактор не был слишком вытянут ни в одном из направлений).

Метод задержки Паккарда – Такенса является не единственным способом задания вектора состояния, хотя, пожалуй, наиболее известным и широко используемым. Альтернативой ему может служить так называемый метод последовательного дифференцирования [26–32]. Как будет показано ниже, он имеет определенные преимущества при решении задачи реконструкции математической модели. В общих чертах идея данного метода состоит в следующем. Также, как и ранее, пусть имеется временной ряд $a(i\Delta t) = a_i$, $i = 1, N$. Вектор состояния в фазовом пространстве может быть задан следующим способом:

$$x(t) = \{a(t), da(t)/dt, \dots, d^{m-1}a(t)/dt^{m-1}\} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}. \quad (3)$$

Поскольку известны значения a_i только в дискретные моменты времени $i\Delta t$, координаты x_j вектора x определяются путем численного дифференцирования исходного временного ряда по приближенным математическим формулам. Очевидно, что точность вычисления производных будет определяться малостью величины шага дискретизации Δt .

Серьезным недостатком метода последовательного дифференцирования является чувствительность к шуму при работе с экспериментальными данными, что делает его практически неприменимым для пространств вложения большой размерности (по крайней мере, без проведения предварительной процедуры фильтрации).

Существует еще ряд способов задания состояния, которые являются менее известными, чем два вышеуказанных [26,33]. К их числу можно отнести метод, предложенный в работе [17] для реконструкции фазового портрета по одномерной реализации фазовой траектории, принадлежащей неоднородному аттрактору, то есть притягивающему множеству, содержащему чередующиеся участки со значительно более медленным и значительно более быстрым движением, чем в среднем по аттрактору. Дифференцирование такой реализации будет приводить к получению временной зависимости, состоящей из участков с еще более медленным и еще более быстрым движением по сравнению с исходной, что в результате сильно затрудняет получение модельных уравнений.

Предложенный метод восстановления фазового портрета состоит в следующем. Типичная экспериментальная реализация $a(t)$ может быть рассмотрена в виде суммы 4-х слагаемых

$$a(t) = O(t) + S(t) + \xi(t) + C, \quad (4)$$

где $O(t)$ – стационарная составляющая автоколебательного процесса, среднее по времени значение которой равно нулю; $S(t)$ – компонент, появляющийся при нестационарности процесса и отвечающий за «плавание» среднего уровня, которое обычно является очень низкочастотным; $\xi(t)$ – аддитивный шум; C – постоянная составляющая сигнала $a(t)$.

После предварительной обработки экспериментальной реализации (фильтрации низкочастотной области спектра, позволяющей избавиться от нестационарности, фильтрации от шума и приведения исходных данных к нулевому среднему) сигнал $a(t)$ будет содержать только компонент $O(t)$.

Если в качестве одной из координат вектора состояния рассмотреть интеграл от $a(t)$ с переменным верхним пределом

$$a_1(t) = \int_0^t a(t_1) dt_1 = \int_0^t O(t_1) dt_1, \quad (5)$$

то поскольку интегрирование медленных участков даст более быстро меняющиеся зависимости и наоборот, фазовые портреты, восстановленные одним из способов

$$x(t) = \left\{ \int_0^t a(t_1) dt_1, a(t), da(t)/dt, \dots, d^{m-2}a(t)/dt^{m-2} \right\} \quad (6)$$

или

$$x(t) = \left\{ \int_0^t a(t_1) dt_1, a(t), a(t+\tau), \dots, a(t+(m-2)\tau) \right\}, \quad (7)$$

будут более однородными, чем при использовании формул (1) или (3).

1.2. Реконструкция математической модели. После восстановления фазового портрета аттрактора ДС любым из вышеперечисленных методов, может быть решена задача реконструкции оператора эволюции [5,17,27–32,34–38]. Наиболее простой способ для этого – создание m -мерного дискретного отображения

$$\begin{aligned} x_{1,i+1} &= f_1(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{m,i}), \\ x_{m,i+1} &= f_m(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{m,i}), \end{aligned} \quad (8)$$

где $x_{j,i}$ – координаты вектора состояния, рассмотренного в моменты времени $i\Delta t$, f_j – нелинейные функции.

В рамках алгоритма глобальной реконструкции для получения конкретного вида эволюционного оператора необходима априорная информация об этих функциях. Иначе говоря, экспериментатор должен сам, из каких-то соображений, сделать предположение о виде нелинейностей в правых частях уравнений.

В простейшем случае задание f_j может осуществляться полиномами некоторой степени ν

$$f_j(x_i) = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_m} \prod_{k=1}^m x_{k,i}^{l_k}, \quad \sum_{k=1}^m l_k \leq \nu, \quad (9)$$

где $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_m}$ – неизвестные коэффициенты, которые требуется найти. Для аппроксимации могут применяться полиномы Лежандра [5], либо может использоваться более сложная методика построения математической модели [27]. При дальнейшем изложении мы ограничимся формулой (9) для задания f_j .

Система уравнений (8) допускает запись для любого номера i , а следовательно, для нахождения коэффициентов каждой функции f_j необходимо решить систему N линейных алгебраических уравнений

$$x_{j,i+1} = \sum_{l_1, l_2, \dots, l_m=0}^{\nu} C_{j, l_1, l_2, \dots, l_m} \prod_{k=1}^m x_{k,i}^{l_k}, \quad i = 1, \dots, N \quad (10)$$

с неизвестными $C_{j, l_1, l_2, \dots, l_m}$, в которой N – число точек скалярного временного ряда, используемых для аппроксимации правых частей, ν – степень полинома.

При заданных m и ν число коэффициентов K полиномов (9) может быть определено по формуле $K = (m+\nu)! / (m! \nu!)$. Поскольку, как правило, $N \gg K$, то для конкретизации эволюционного оператора система уравнений (10) решается методом наименьших квадратов. Получающаяся в результате такой процедуры математическая модель является очень громоздкой, однако при условии удачного выбора общего вида нелинейных функций она позволяет восстановить сигнал с достаточной степенью точности.

Аналогичным образом можно реконструировать не только дискретные отображения, но и математические модели в виде системы ОДУ 1-го порядка.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ &\dots \\ \dot{x}_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (11)$$

Смысл функций в правых частях тот же, что и ранее. Так как на первом этапе алгоритма была осуществлена реконструкция фазовой траектории, это значит, что все $x_i(t)$ известны; следовательно, можно определить производные от них. Поэтому (11) снова есть не что иное, как система линейных относительно неизвестных коэффициентов алгебраических уравнений.

Если в качестве способа задания вектора состояния в фазовом пространстве используется метод последовательного дифференцирования, то математическую модель можно восстановить в более простом виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dots, \quad \dot{x}_m = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (12)$$

в силу того, что взаимосвязь между координатами однозначно задается формулой (3). Тот же вид математического описания (12) получается и для реконструкции вектора состояния по формуле (6).

Таким образом, приведенный алгоритм позволяет скалярному временному ряду поставить в соответствие математическую модель. Однако следует отметить ряд сложностей, с которыми приходится сталкиваться при практической реализации данного алгоритма.

Основной проблемой является правильный выбор нелинейных функций в правых частях модельных уравнений. Если используется метод последовательного дифференцирования для задания координат вектора состояния, то математическая модель будет содержать только одну неизвестную функцию. Как уже отмечалось, наиболее простой способ задания нелинейности состоит в полиномиальной аппроксимации.

Однако возникает вопрос: насколько это правомерно? Рассмотрим в качестве примера известную модель Ресслера. Как показано в [27], только для случая, когда считается заданной лишь вторая координата этой модели, система Ресслера путем замены переменных может быть сведена к виду (12), где f – полином, задаваемый формулой (9). Если в качестве исходной выбирается любая другая координата, то функция f будет представлять собой отношение полиномов $f = P/Q$. А это значит, что выбор полиномиальной нелинейности не всегда оправдан. Некоторые авторы (например, [29,30,37,38]) предлагают осуществлять поиск математической модели в форме

$$g_j \dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad (13)$$

то есть домножать систему (11) на $g_j = g_j(\mathbf{x})$ – на одну из функций $1, x_j, x_j^2, x_j x_k; j, k = 1, 2, \dots, m$. В ряде ситуаций такой подход может оказаться весьма полезным. Однако при работе с экспериментальными временными рядами, порожденными ДС с неизвестным оператором эволюции, проблема подбора нелинейностей остается очень сложной задачей. Говорить о том, что математическая модель восстановлена, можно только с большой осторожностью даже в случае, когда удастся добиться большой степени сходства реализаций и фазовых портретов аттракторов для исходных данных и для решения реконструированной системы уравнений.

Другая проблема состоит в необходимости работать с зашумленными данными при обработке экспериментальных временных рядов. С одной стороны, более желательным является использование метода последовательного дифференцирования для восстановления фазовой траектории, поскольку при этом можно получить модель, содержащую приблизительно в m раз меньше коэффициентов при различных нелинейностях, чем при использовании задержки.

Однако, дифференцирование неизбежно будет приводить к усилению шумового компонента в производных высокого порядка. Без предварительной фильтрации уже реализация второй производной может оказаться чисто шумовым процессом.

При практическом применении алгоритма глобальной реконструкции возникает еще ряд проблем, которые связаны с оптимальным выбором параметров численной схемы, но они уже не носят принципиального характера и, как будет показано в 4 разделе, могут успешно решаться при использовании статистического метода для конкретизации эволюционного оператора.

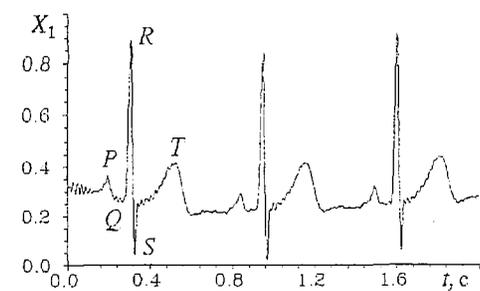
Заканчивая изложение методики глобальной реконструкции, хотелось бы еще раз обратить внимание на то, что произвольный выбор нелинейностей не всегда позволяет осуществить удачную реконструкцию. В частности, в работах [27,30] указывается на возможность нескольких случаев при решении задачи моделирования. В рамках данного обзора мы решили не проводить анализа этих случаев, ограничившись ссылками на статьи, в которых они разобраны достаточно подробно.

Отметим также, что алгоритм глобальной реконструкции в последнее время стал находить свое применение не только в задачах построения математической модели, но и, например, в задачах классификации динамических режимов [28,34,39].

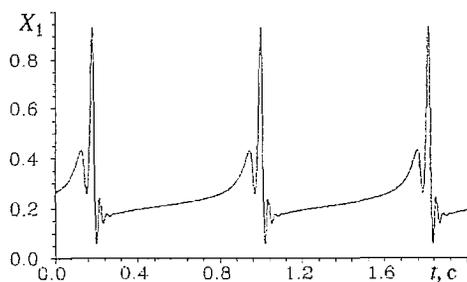
2. Моделирование в рамках традиционных методов реконструкции аттрактора ДС

В данной главе будут приведены результаты моделирования по одномерной реализации ЭКГ при использовании метода последовательного дифференцирования для задания координат вектора состояния в фазовом пространстве. Исходный сигнал (рис. 1, а) представляет собой чередующуюся последовательность участков, содержащих P, Q, R, S, T – зубцы, и «пауз» – интервалов между зубцами T и P [40,41]. Интерес исследователей к моделированию динамики сердечной деятельности основан на том, что ряд патологий находит свое выражение в изменении формы зубцов ЭКГ, их исчезновении, смене полярности и т.п. С этой точки зрения наличие модели позволило бы рассматривать переход от нормы к патологии как некую бифуркационную перестройку режима работы сердца, изучение которой могло бы быть весьма полезным для решения задач диагностики динамических режимов. Однако в этом вопросе еще очень многое неясно. В частности, следует ли рассматривать переходы от нормы к патологии как бифуркации в одной и той же ДС, либо как результат перестройки самой динамической системы [7]? Наличие хорошей модели могло бы внести некоторую ясность в этот вопрос.

Ставя задачу получения модели методом глобальной реконструкции,



а



б

Рис. 1. Исходная ЭКГ (а) и решение математической модели, реконструированной при использовании метода последовательного дифференцирования (3) на первом этапе алгоритма (б)

указанных в [31,36], удалось восстановить динамическую систему, решение которой приведено на рис.1,б. Данная система позднее [42,43] была достаточно тщательно исследована, поэтому в данной работе мы сконцентрируем внимание в большей степени на недостатках как самой модели, так и метода последовательного дифференцирования применительно к рассматриваемой задаче.

Во-первых, получить грубую модель для ЭКГ, изображенной на рис. 1, а, удалось только при конкретных значениях параметров численной схемы, определенных путем тщательного перебора возможных значений. Попытки применения методики глобальной реконструкции к другим электрокардиограммам с использованием последовательного дифференцирования для задания вектора состояния, равно как и метода задержки Паккарда – Такенса, оказались безуспешными. Кроме того, несмотря на то, что решение реконструированных уравнений модели (рис. 1,б) качественно повторяет структуру ЭКГ (содержит все необходимые P, Q, R, S, T -зубцы), количественное различие между полученным решением и исходными данными достаточно велико.

Во-вторых, реконструировать грубую модель оказалось возможным только при работе с зашумленными данными, использование же фильтрованных временных рядов не давало результата.

Казалось, что получается парадокс: чем хуже качество записи сигнала ЭКГ, тем лучше результат моделирования, несмотря на то, что дифференцирование зашумленного сигнала неизбежно приводит к резкому возрастанию ошибки вычисления производных.

Постараемся внести ясность в сложившуюся ситуацию. Рассмотрим электрокардиограмму, отфильтрованную от шума методом, приведенным в работе [44] (рис. 2, а). Она содержит участки с быстрыми (между зубцами P и T) и медленными (между T и P) изменениями временной зависимости исходного сигнала ЭКГ. Ясно, что при последовательном дифференцировании участку между T и P зубцами будет соответствовать еще более медленно меняющаяся зависимость, чем для временного ряда (см. рис. 2, а), и наоборот. Следовательно, в восстановленной

предварительно необходимо определиться с выбором минимально возможной размерности пространства вложения. С этой целью необходимо провести расчет размерности Хаусдорфа или оценить ее путем вычисления корреляционной размерности D_c (2). Для сигнала, приведенного на рис. 1,а, эта оценка позволила получить значение $D_c=2.79$, хотя данная величина является несколько меньшей, чем приводимые в других работах [7]. Она позволяет ограничиться трехмерным пространством для реконструкции фазового портрета. Мы не приводим проекции фазовых портретов, поскольку они уже были представлены в предыдущих работах [31,36].

В рассматриваемом примере из-за низкой частоты дискретизации исходных данных (запись ЭКГ производилась с частотой выборки 200 Гц, что является недостаточным для вычисления с большой точностью производных от столь сложного сигнала) осуществлялась интерполяция временного ряда полиномом высокой степени. При значениях параметров численной схемы,

фазовой траектории (см. рис. 2, б) будут присутствовать интервалы времени, в течение которых все координаты практически не меняются. Если бы они совсем не менялись (что соответствует точке в фазовом пространстве), то изучаемую систему уже нельзя было бы считать динамической, поскольку происходила бы потеря однозначности и реконструировать модель не представлялось бы возможным. За счет пусть слабого, но все же имеющего место изменения фазовых координат в области «паузы» потери однозначности не происходит, однако возникает проблема, связанная с реконструкцией модели, поскольку аппроксимация правых частей осуществляется методом наименьших квадратов, а наличие ярко выраженной неоднородности фазового портрета является, по всей видимости, основным препятствием для данного алгоритма моделирования.

При работе с зашумленными данными частично удается снять проблему неоднородности за счет большой ошибки вычисления производных. Как следствие, участку «паузы» будет соответствовать быстро меняющийся процесс, обусловленный усилением шумового компонента в производных высокого порядка. Очевидно, именно это и послужило причиной того, что восстановить модель (рис. 1, б) удалось как раз для зашумленного сигнала.

Если вместо формулы (3) используется метод Паккарда – Такенса (1) для задания вектора состояния, то возможны следующие ситуации. Для малой величины задержки (τ много меньше длительности «паузы») (рис. 2, в) вновь возникает проблема, связанная с неоднородностью фазового портрета. Если τ сравнимо с длительностью «паузы», то фазовый портрет будет более однородным с точки зрения скорости движения вдоль фазовой траектории, но станет менее гладким (рис. 2, г). Попеременно, в то время как две из трех координат фазового портрета будут оставаться практически постоянными, третья начнет сравнительно быстро меняться.

Реконструирование математической модели с подобным аттрактором также представляет собой весьма сложную задачу. Кроме того, как уже отмечалось, метод Паккарда – Такенса будет приводить к модели более громоздкой, чем при использовании метода последовательного дифференцирования.

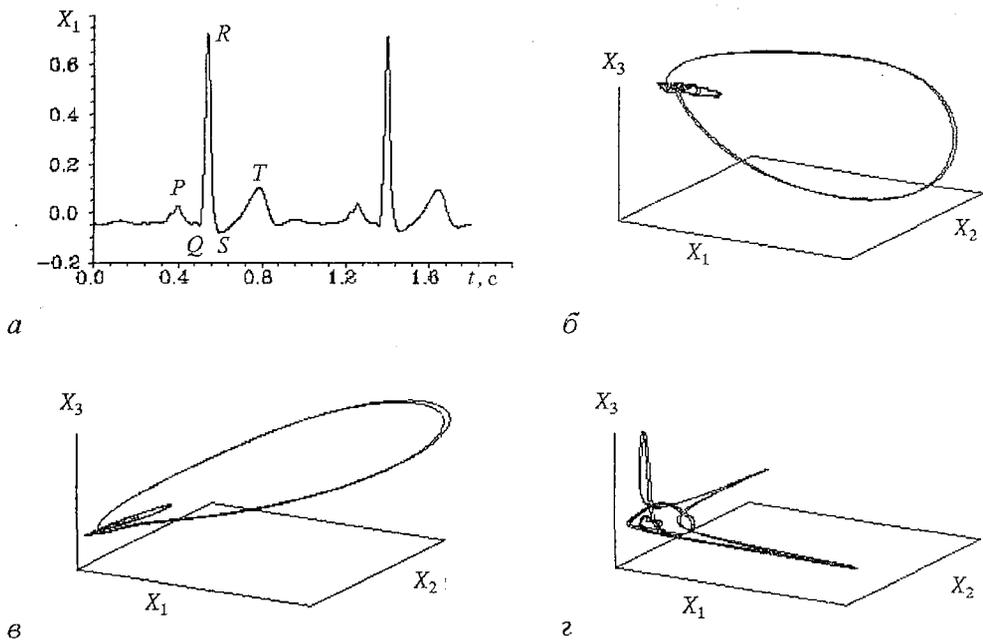


Рис. 2. Сигнал ЭКГ, отфильтрованный от шума методом [44] (а); фазовый портрет, восстановленный по одномерной реализации (а) методом последовательного дифференцирования (3) (б); фазовые портреты, восстановленные методом задержки (1) для малого τ (в) и большого τ (г)

3. Моделирование при использовании метода интегрирования для реконструкции фазового портрета

Учитывая особенности сигнала ЭКГ, связанные с наличием неоднородности фазового портрета, более целесообразным является применение методов вложения (6) или (7) вместо (1) или (3). Однако даже в этом случае задача реконструкции математической модели по одномерной реализации ЭКГ остается крайне сложной. Использование интеграла позволило повысить вероятность получения грубой ДС, демонстрирующей хаотическое поведение, но добиться хорошего локального соответствия ее решения сигналу ЭКГ нам не удалось.

Ориентируясь на оценки фрактальной размерности фазового портрета ЭКГ, сделанные в работе [7], необходимо увеличить размерность пространства вложения по крайней мере до 4-х. При восстановлении фазового портрета методами (1) или (7) это приводит к существенному усложнению модельных уравнений. Использование (3) или (6) даже для фильтрованных данных увеличивает ошибку за счет необходимости большего количества вычислений производных от исходного скалярного временного ряда, что создает проблемы при аппроксимации правых частей модели.

В то же время одной из особенностей ЭКГ является тот факт, что один ее характерный период, то есть повторяющаяся последовательность «зубцы P, Q, R, S, T – пауза», содержит в себе всю информацию о структуре QRS -комплекса, P и T зубцов, которой может быть достаточно для диагностики ряда патологических изменений.

Поэтому на первом этапе было решено ограничиться более простой задачей – моделированием ДС, решением которой является периодический сигнал, с большой степенью точности воспроизводящий один период ЭКГ. Такую модель можно было бы поставить в соответствие сигналу электрокардиограммы в случае периодичности сердечного ритма, что не соответствует действительности. Поэтому, несомненно, такой подход к моделированию может вызывать определенные нарекания. Однако без ответа на вопрос о решаемости даже такой упрощенной задачи применение методов реконструкции к ЭКГ теряет смысл.

Для решения задачи моделирования рассматривались две ЭКГ с несколько отличным поведением, предварительно подвергнутые фильтрации от шума методом, описанным в [44] (рис. 3, а, в). Для каждой из них произвольным образом

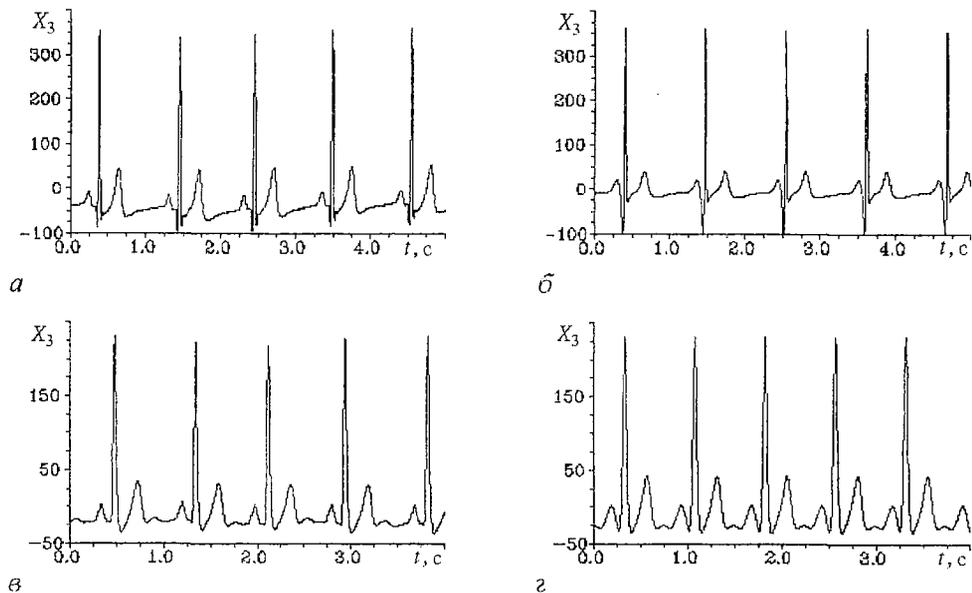


Рис. 3. Периодические сигналы, полученные путем замыкания одного периода ЭКГ (а, в) и решения реконструированных систем ОДУ (б, г)

выбирался один период. Осуществлялось многократное повторение выбранных участков ЭКГ для получения периодических временных рядов достаточной длины. В дальнейшем эту процедуру будем называть «замыканием», поскольку она позволяет сформировать в фазовом пространстве замкнутую траекторию. Исходному периоду для каждой реализации соответствовал интервал между двумя последовательными R -зубцами, поэтому искажения, вносимые за счет искусственного преобразования, состояли лишь в весьма незначительном изменении величины одного из этих зубцов.

Для рассматриваемых в настоящей главе примеров, в отличие от (6), осуществлялось последовательное вычисление двух интегралов.

Пусть $a(t)$ – исходный сигнал (искусственно полученная периодическая реализация, приведенная к нулевому среднему значению). Вычислялись

$$b(t) = \int_0^t a(t_1) dt_1, \quad c(t) = \int_0^t b(t_1) dt_1. \quad (14)$$

После этого $c(t)$ использовалась в качестве исходной реализации. Методом последовательного дифференцирования восстанавливались остальные координаты вектора состояния, который, таким образом, имел следующий вид:

$$x(t) = \{c(t), dc(t)/dt, d^2c(t)/dt^2, \dots, d^{m-1}c(t)/dt^{m-1}\}. \quad (15)$$

Ясно, что $d^2c(t)/dt^2$ есть исходный сигнал $a(t)$.

Приведенный способ позволяет получить фазовые портреты, являющиеся менее неоднородными, по сравнению с фазовыми портретами, восстановленными с помощью традиционных методов. Поэтому применение метода наименьших квадратов для нахождения коэффициентов правых частей модели становится более эффективным. Для выбранных периодов от различных ЭКГ (см. рис. 3, *a, e*) были восстановлены две модели (3-х и 4-х мерная, соответственно) в виде систем ОДУ в форме (12), решения которых приведены на рис. 3, *б, г*.

Применение вышеописанной методики (использование двух интегралов с переменными верхними пределами от сигнала, полученного замыканием одного периода ЭКГ) сделало возможным получать грубые математические модели в виде систем дискретных отображений (рис. 4, *б*), моделировать некоторые патологии

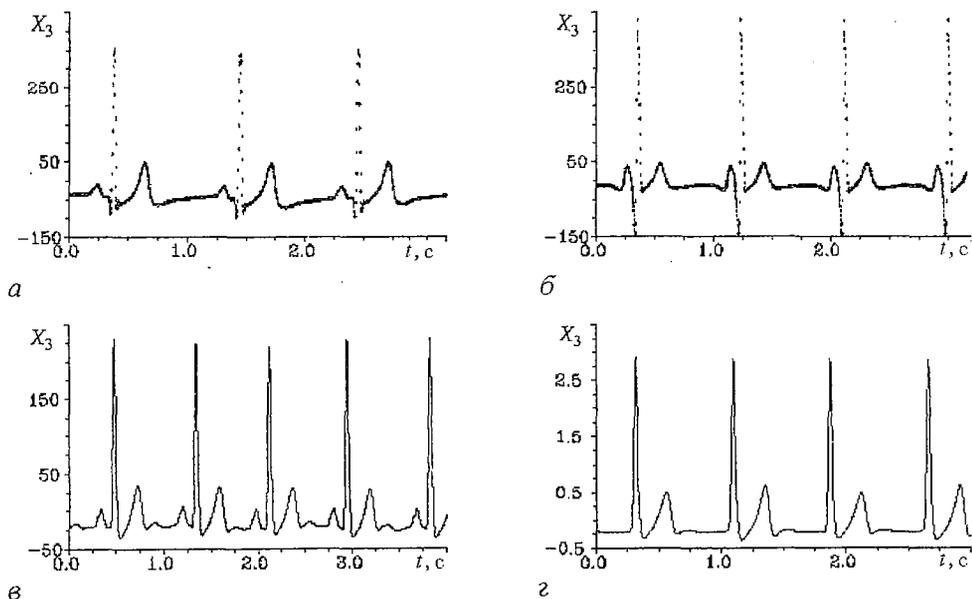


Рис. 4. Исходный временной ряд, соответствующий замыканию одного периода ЭКГ (*a*); решение реконструированной системы дискретных отображений (*б*); сигнал, соответствующий случаю патологии (*в*), и решение модельной системы ОДУ (*г*)

(рис. 4, з) и т.д. Приведенные результаты наглядно демонстрируют преимущества используемого метода восстановления фазового портрета неоднородного аттрактора для задачи глобальной реконструкции.

4. Применение статистического метода

При описании алгоритма глобальной реконструкции отмечалось, что для конкретизации эволюционного оператора необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными коэффициентами C_{j_1, j_2, \dots, j_m} методом наименьших квадратов. Однако при практическом использовании алгоритма будет существовать зависимость значений этих коэффициентов от выбора параметров численной схемы (размерности пространства вложения m , степени полиномов ν , количества точек восстановленного фазового портрета, используемых для аппроксимации правых частей модельных уравнений N , и т.д.), в связи с чем более строгий подход к задаче моделирования предполагает изучение зависимости C_{j_1, j_2, \dots, j_m} от параметров. В настоящей работе будут проиллюстрированы зависимости значений искомых коэффициентов от количества рассматриваемых точек в фазовом пространстве.

В предыдущем разделе были приведены результаты решения задачи реконструкции математической модели для одного периода ЭКГ. На двух конкретных примерах (для сигналов, изображенных на рис. 3, в и 4, в) исследуем возможность получения грубой математической модели, выбор коэффициентов для которой осуществляется с помощью статистического метода.

С этой целью фиксировались все параметры алгоритма глобальной реконструкции, кроме числа N , при изменении которого осуществлялась аппроксимация неизвестных коэффициентов*.

Для каждой зависимости C_{j_1, j_2, \dots, j_m} вычислялась плотность распределения вероятности значений коэффициентов. Окончательный вид оператора эволюции определялся путем выбора значений C_{j_1, j_2, \dots, j_m} , соответствующих максимумам плотностей вероятности.

Интегрирование полученных таким образом модельных систем позволило убедиться в том, что максимумам плотностей вероятности соответствуют грубые решения (рис. 5, а, б), с достаточной степенью точности воспроизводящие исходные сигналы (см. рис. 3, в и 4, в). Следует также отметить, что вариация C_{j_1, j_2, \dots, j_m} в достаточно широких пределах относительно максимумов вероятности не приводила к разрушению динамического режима.

Как показали исследования, применение статистического метода позволяет ограничиться для моделирования достаточно коротким скалярным временным

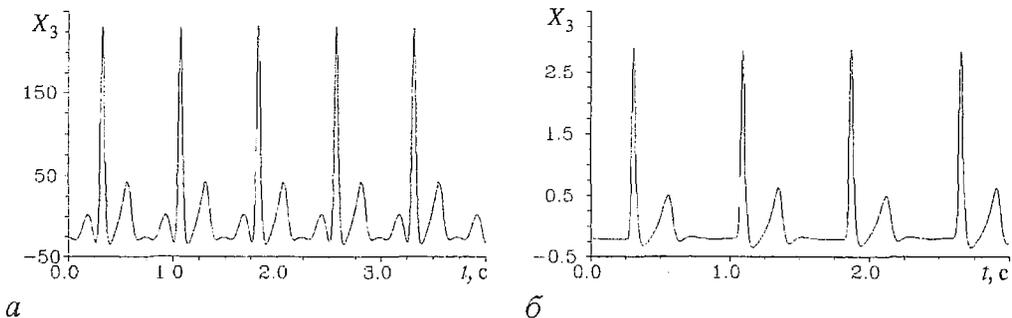


Рис. 5. Решения реконструированных систем ОДУ при использовании статистического метода для конкретизации оператора эволюции

* Поскольку математические модели для рассматриваемых примеров имели вид (12), то есть содержали только одну нелинейную функцию, индекс j в номере коэффициента в дальнейшем будем опускать.

рядом. Данные результаты были достаточно подробно изложены в [45], поэтому в настоящей работе они не приводятся.

Заключение

В настоящей работе приведены результаты применения методики реконструкции математической модели к сигналу, описывающему электрическую активность сердца человека – ЭКГ. Использовались различные способы восстановления фазовой траектории по одномерной реализации, указаны преимущества и недостатки этих методов применительно к задаче глобального моделирования. Проанализируем полученные результаты.

Во введении отмечалось, что любая модель должна рассматриваться с точки зрения ее адекватности моделируемому явлению или процессу. Задача глобальной реконструкции является принципиально неоднозначной: имеет место большая зависимость от априорного задания общего вида правых частей модельных уравнений. Поэтому, меняя априорный вид нелинейных функций, можно получить целый набор математических описаний, позволяющих с какой-то степенью точности воспроизвести исходный сигнал.

Однако факт получения модельных уравнений, с нужной степенью точности воспроизводящих исходный сигнал, не дает основания говорить о реконструкции порождающей этот сигнал системы. Поэтому в данной ситуации можно вести речь только о динамическом описании сигнала, что позволяет, например, решать задачи предсказания поведения системы на конечных временах, расчета метрических и динамических характеристик аттрактора по короткому временному ряду [45].

Несмотря на невозможность на данном этапе восстановления с помощью метода глобальной реконструкции вида динамической системы, генерирующей изучаемый сигнал, данный алгоритм позволяет осуществлять математическое описание очень сложных сигналов (таких, как ЭКГ), когда никакие другие способы моделирования этого сделать не могут. Следовательно, данная методика может быть использована для построения математических моделей сложных процессов и явлений, когда модели, построенные из каких-то аналитических соображений в качестве составных частей, содержали бы математические описания, полученные с применением алгоритма глобальной реконструкции.

Янсон Н.Б. благодарит международную программу “Соровские студенты и аспиранты” за поддержку (грант а 96–2593).

Библиографический список

1. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., and Shaw R.S. Geometry from a time series // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45. P.712.
2. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // *Warwick*. 1980. Vol. 898 of *Lecture Notes in Mathematics* / Eds D.A.Rang, L.S.Young (Springer) Berlin. 1981. P. 366.
3. Farmer J.D. and Sidorowich J.J. Predicting chaotic time series // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59. P. 845.
4. Casdagli M. Nonlinear prediction of chaotic time series // *Physica D*. 1989. Vol. 35. P. 335.
5. Cremers J., Hübler A. Construction of differential equations from experimental data // *Z. Naturforsch. A*. 1987. Vol. 42, № 8. P. 797.
6. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с.
7. Babloyantz A., Deslexhe A. Is a normal heart a periodic oscillator // *Biol. Cybernetics*. 1988. Vol. 58. P. 203.
8. Zebrowski J.J., Poplawska W., Baranowski R. Pattern entropy a tool for non-

linear dynamical analysis of a biological nonstationary system: the human heart // *Acta Physica Polonica B*. 1995. Vol. 26, № 6. P. 1055.

9. *Baranowski R., Zebrowski J.J., Poplawska W.* et al. 3-dimensional Poincare plots of the QT intervals – an approach to nonlinear QT analysis // *Computers in Cardiology*. 1995. P. 789.

10. *Peng C.K., Havlin S., Stanley H.E., Goldberger A.L.* Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series // *Chaos*. 1995. Vol. 5, № 1. P. 82.

11. *Kurths J., Voss A., Saparin P., Witt A., Kleiner H.J., Wessel N.* Quantitative analysis of heart rate variability // *CHAOS*. 1995. Vol. 5, № 1. P. 88.

12. *Voss A., Kurths J., Kleiner H.J., Witt A., Saparin P., Dietz R., Fiehring H., Wessel N.* Neue Methoden für die Erkennung von Hochrisikopatienten in der Kardiologie // *Biomedizinische Technik*. 1994. Band 39. Heft 6. Seite 134.

13. *Анищенко В.С., Сафонова М.А., Сапарин П.И.* Измерительно-вычислительный комплекс для диагностики сложных режимов автоколебаний // *Радиотехника и электроника*. 1992. Т. 37, № 3. С. 467.

14. *Saparin P.I., Zaks M.A., Kurths J., Voss A., Anishchenko V.S.* Reconstruction and structure of electrocardiogram phase portraits // *Phys. Rev. E*. 1996. Vol. 54, № 1. P. 1.

15. *Rosenblum M., Kurths J.* A model of neural control of the heart rate // *Physica A*. 1995. Vol. 215. P. 439.

16. *Seidel H., Herzel H.* // *Modelling the Dynamics of Biological Systems* / Eds E. Mosekilde and O.G. Mouritsen. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. 1995. P. 205.

17. *Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н.* Об одном методе восстановления неоднородных аттракторов // *Письма в ЖТФ*. 1996. Т. 22, № 7. Р. 1.

18. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.

19. *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Рахманов А.И.* Ограничения возможностей реконструкции аттрактора для хаотических динамических систем. Препринт Ин. прикл. матем. им. М.В. Келдыша АН СССР. 1993, № 10.

20. *Mane R.* On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps // *Warwick*. 1980. Vol. 898 of *Lecture Notes in Mathematics* / Eds D.A. Rang, L.S. Young. Springer. Berlin. 1981. P. 230.

21. *Sauer T., Yorke J.A., Casdagli M.* Embedology // *Journal of Statistical Physics*. 1991. Vol. 65, № 3/4. P. 579.

22. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.

23. *Ланда П.С., Розенблюм М.Г.* Об одном методе оценки размерности вложения аттрактора по результатам эксперимента // *ЖТФ*. 1989. Т. 59, № 1. Р. 13.

24. *Fraser A.M., Swinney H.L.* Independent coordinates from mutual information // *Phys. Rev. A*. 1986. Vol. 33. P. 1134.

25. *Liebert W., Schuster H.G.* Proper choice of the time delay for the analysis of chaotic time series // *Phys. Lett. A*. 1989. Vol. 142. P. 107.

26. *Breeden J.L., Packard N.H.* A learning algorithm for optimal representation of experimental data // *Int. J. of Bif. and Chaos*. 1994. Vol. 4, № 2. P. 311.

27. *Gouesbet G. and Letellier C.* Global vector-field reconstruction by using a multivariate polynomial L_2 approximation on nets // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49. P. 4955.

28. *Kremliovsky M., Kadtko J., Inchiosa M., Moore P.* Characterization of dolphin acoustic echo-location data using a dynamical classification method // (submitted to *Int. J. of Bif. and Chaos*).

29. *Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A., Surovyatkina E.D.* Predictable nonlinear dynamics: advantages and limitations // *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, Mystic, Juli, 1995 / Ed. R.A. Katz, (AIP Conf. Proc. 375, AIP Press, New York) P. 71.

30. *Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кравцов Ю.А., Кузнецов Ю.И., Ржанов А.Г.* Восстановление структуры динамической системы по временным рядам // *Радиотехника и электроника*. 1994, вып. 2. С. 269.

31. *Янсон Н.Б., Анищенко В.С.* Моделирование динамических систем по

экспериментальным данным // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Т. 3, 1995. № 3. С. 112.

32. Янсон Н.Б., Павлов А.Н., Баланов А.Г., Анищенко В.С. Задача реконструкции математической модели применительно к электрокардиограмме // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 16. Р. 57.

33. Breeden J.L., Packard N.H. Nonlinear analysis of data sampled nonuniformly in time // Physica D. 1992. Vol. 58. P. 273.

34. Kadtko J., Kremliovsky M. Signal classification using global dynamical models // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing, Mystic, Juli, 1995 / Ed. R.A. Katz, (AIP Conf. Proc. 375, AIP Press, New York) P. 189.

35. Anishchenko V.S., Smirnova N.B. Analysis and synthesis of dynamical systems from experimental data // SPIE. 1993. Vol. 2098. P. 137.

36. Janson N.B., Anishchenko V.S. Modeling the dynamical systems on experimental data // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing, Mystic, Juli, 1995 / Ed. R.A. Katz, (AIP Conf. Proc. 375, AIP Press, New York) P. 688.

37. Gribkov D.A., Gribkova V.V., Kuznetsov Y.I., Rzhanov A.G. Global dynamical modeling of time series and application to restoration of broadband signal characteristics // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing, Mystic, Juli, 1995 / Ed. R.A. Katz, (AIP Conf. Proc. 375, AIP Press, New York) P. 181.

38. Грибков Д.А., Грибкова В.В., Кузнецов Ю.И. Восстановление внешнего воздействия по реализации одной переменной автостохстической системы // Вестн. Моск. ун-та. Серия 3. 1995. Т. 36, № 1. С. 76.

39. Brush J.S. Classifying transient signals with nonlinear dynamic filter banks // Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing, Mystic, Juli, 1995 / Ed. R.A. Katz, (AIP Conf. Proc. 375, AIP Press, New York) P. 145.

40. Орлов В.Н. Руководство по электрокардиографии М.: Медицина, 1983.

41. Инструментальные методы исследования сердечно-сосудистой системы. Справочник. Под ред. Т.С. Виноградовой. М.: Медицина, 1986.

42. Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н. Седло-фокус в модели электрической активности сердца человека // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22, № 4. С. 78.

43. Анищенко В.С., Янсон Н.Б., Павлов А.Н. Может ли режим работы сердца здорового человека быть регулярным? // Радиотехника и электроника. 1977 (в печати).

44. Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. Numerical Recipes in C: the art of scientific computing. Cambridge University Press. 1987. P. 514.

45. Павлов А.Н., Янсон Н.Б., Анищенко В.С. Применение статистических методов при решении задачи глобальной реконструкции // Письма в ЖТФ. 1977. № 8.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 07.02.97
после переработки 28.03.97

APPLICATION OF METHOD FOR MATHEMATICAL MODEL RECONSTRUCTION TO ELECTROCARDIOGRAM

A.N. Pavlov, N.B. Janson

The algorithm for reconstruction of a mathematical model on one-dimensional realization of system under study is described. The results of its application to ECG are gathered and analysed. The possibility of modeling using the traditional methods for phase portraits reconstruction and the shortcomings of these methods in application to ECG are discussed. The results are presented obtained as the method for state vector coordinates restoration suggested by the authors was applied. The possibility for

obtaining a robust mathematical model with the help of statistical approach is considered. The problems connected with mathematical description adequacy are discussed, the serious shortcomings of the global reconstruction algorithm and the prospects of such method for the aims of modeling are mentioned.



Павлов Алексей Николаевич – родился в 1973 году. Окончил физический факультет Саратовского университета (1995). В настоящее время является аспирантом кафедры радиофизики СГУ. Область научных интересов – анализ временных рядов, реконструкция динамических систем по экспериментальным данным. Автор 5 статей по данной тематике.



Янсон Наталья Борисовна – родилась в Саратове (1971). Окончила Саратовский государственный университет по специальности радиофизика (1993). С 1993 года является аспиранткой кафедры радиофизики СГУ. Соросовская аспирантка (1996). Участница 4-х международных конференций (Volga Laser Tour'93, Russia; 3-rd Technical Conference on Nonlinear Dynamics (CHAOS) and Full Spectrum Processing, 95, Mystic, CT, USA; International Workshop on Nonlinear Techniques in Physiological Time-Series Analysis, 95, Dresden, Germany; ICND-96, Saratov, Russia). Автор нескольких статей. Область научных интересов – анализ временных рядов, реконструкция динамических систем по экспериментальным данным.