



Предлагаемая вниманию читателя лекция «Аттракторы динамических систем» входит в содержание учебника «Избранные лекции по нелинейной динамике» (название ориентировочное), работа над которым находится в стадии завершения. Издание учебника планируется в 1998 году. Учебник состоит из 12 лекций по фундаментальным разделам нелинейной динамики, прочитанных автором в качестве спецкурса студентам и аспирантам кафедры радиофизики в осеннем семестре 1996/97 учебного года. Книгу отличают две особенности: первая – каждая из лекций по существу представляет одно из научных направлений в области знаний, которая именуется нелинейной динамикой; вторая – практически каждая из лекций в качестве основы содержит научные результаты, полученные автором совместно с учениками в лаборатории нелинейной динамики кафедры радиофизики СГУ. Последнее обстоятельство, по сути, и определило содержание учебника. Выбор лекции «Аттракторы динамических систем» для публикации в журнале не случаен. Лекция посвящена актуальной научной проблеме, которую на сегодня нельзя считать окончательно разрешенной. Ряд сформулированных в лекции положений, по-видимому, является дискуссионным, и автор будет благодарен всем заинтересованным читателям за критику и конструктивные замечания.

*Автор*

## АТТРАКТОРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*В.С. Анищенко*

В лекции вводится общее определение аттрактора диссипативной динамической системы, дается классификация существующих типов аттракторов, анализируются их основные характеристики. На ряде конкретных примеров изложенный материал иллюстрируется результатами численного моделирования, что дает возможность легче понять основные свойства, сходства и различия рассматриваемых типов аттракторов.

### Введение

Одним из основных методов исследования автоколебательных систем является формулировка и анализ решений уравнений, описывающих их динамику. Поэтому математический раздел *Динамические системы* является одной из основ фундаментальной подготовки по теории нелинейных колебаний. В классической теории колебаний были и остаются важными вопросы исследования периодических и квазипериодических режимов, необходимых для описания эффектов генерации и модуляции колебаний. Математические образы указанных режимов колебаний (предельный цикл и  $n$ -мерный тор) не выступали в качестве основных объектов исследования, а являлись как бы дополнением, служащим альтернативной иллюстрацией указанных режимов в фазовом пространстве исследуемых систем. Действительно, основные свойства периодических колебаний исчерпывающим образом можно диагностировать по виду реализации одной из

фазовых координат  $x(t)$  на конечном интервале времени  $0 \leq t \leq T$  ( $T$  – период колебаний), дополнив эти данные расчетом спектра Фурье или автокорреляционной функции. Квазипериодические колебания в этом плане мало отличаются. В качестве времени наблюдения  $t_n$  реализации  $x(t)$  нужно взять наибольшее из характерных времен, отвечающее минимальной частоте дискретного спектра. Другими словами, наличие хорошего осциллографа и анализатора спектра позволяло экспериментаторам достаточно полно исследовать свойства генераторов, включая эффекты модуляции.

Положение дел принципиально изменилось с открытием эффекта динамического хаоса. Хаотические автоколебания не являются периодическими или квазипериодическими. Поэтому наблюдение реализации  $x(t)$  на любом конечном интервале времени не дает полной информации. Более того, очень трудно предсказать конкретные времена наблюдения, при которых возможно диагностировать особенности режима колебаний. В этой ситуации оказывается полезным детально анализировать геометрический образ автоколебательного режима в фазовом пространстве системы – *аттрактор*. Отметим сразу, что анализ геометрической структуры аттракторов как образов автоколебаний в диссипативных динамических системах безусловно не может дать исчерпывающей информации о колебаниях, но позволяет существенно дополнить и расширить возможности эксперимента.

Как известно, с образом динамического (детерминированного) хаоса связывается так называемый *странный аттрактор* [1–3]. Первоначально все нетривиальные режимы автоколебаний, общим свойством которых является отсутствие периодичности во времени, ассоциировались именно с образом странного аттрактора. Позднее пришло понимание того, что хаотические автоколебания по своим свойствам могут быть существенно различными, и это однозначно ведет к различию структуры и свойств соответствующих им аттракторов. Так, например, выяснилось, что странный аттрактор есть образ некоторого «идеального» хаоса, удовлетворяющего ряду строгих математических требований. Было установлено, что в реальных системах режим странного (в смысле математического определения) аттрактора не реализуется. То, что мы наблюдаем в экспериментах, чаще всего отвечает режимам так называемого *квазигиперболического* аттрактора, который более сложно устроен и пока не поддается стройному математическому описанию [4]. Отличительной особенностью как странных, так и квазигиперболических хаотических аттракторов является экспоненциальная неустойчивость фазовых траекторий и дробная размерность. Так как с этими свойствами ассоциируется наше представление о детерминированном хаосе, то на некотором этапе различиям между странными и квазигиперболическими аттракторами не придавалось существенного значения. Более того, недавно выяснилось, что режимы непериодических колебаний могут характеризоваться устойчивостью траекторий при наличии дробной размерности аттрактора или целой размерностью аттрактора при наличии экспоненциального разбегания траекторий на нем! Так возникли представления о странных нехаотических аттракторах и хаотических нестранных аттракторах.

Учитывая, что практически каждый специалист в области нелинейной динамики неизбежно сталкивается с проблемой анализа сложных непериодических режимов колебаний и их образов – аттракторов, понимание указанных выше вопросов и проблем сегодня становится просто необходимым.

В настоящей лекции мы приводим определения, примеры и свойства различных типов аттракторов динамических систем. В основу положены представления теории динамических систем. Анализируются системы  $N$  обыкновенных дифференциальных уравнений или конечномерных отображений. Изложенные результаты не претендуют на математическую строгость (хотя, безусловно, базируются на теоретических выводах) и имеют целью дать необходимую информацию, доступную экспериментаторам, специалистам в вопросах прикладной нелинейной динамики.

## 1. Что мы называем аттрактором

Изменение во времени состояния системы с  $N/2$  степенями свободы описывается детерминированной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (динамической системой)

$$dx_i/dt = \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_N, \mu_1, \dots, \mu_n), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь  $x_i(t)$  – переменные, однозначно описывающие состояние системы (фазовые координаты),  $\mu_k$  – параметры системы,  $f_i(x, \mu)$  – гладкие, в общем случае нелинейные функции фазовых координат, зависящие от параметров. Решение системы (1) существует, единственно для заданных начальных условий  $x_i(0)$  и гладко зависит от изменения параметров и начального состояния (теорема Коши).

Эволюции системы во времени можно однозначно поставить в соответствие фазовую траекторию в  $N$ -мерном декартовом пространстве, координатами которого служат фазовые переменные, стартующую из заданной начальной точки  $x_i(0)$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ .

Мы будем говорить, в основном, об автоколебательных решениях системы (1). С точки зрения физики это означает, что в системе существует некоторый тип установившихся колебаний, характеристики которого в определенных пределах не зависят от выбора начального состояния. Как мы увидим, классической физической интерпретацией определения аттрактора динамической системы является понятие автоколебательного режима, введенное в рассмотрение Андроновым.

Обратимся к фазовому пространству  $\mathcal{R}^N$  системы (1), зафиксировав значения всех параметров системы  $\mu_k$ . Пусть имеется некоторая конечная (или бесконечная) область  $G_1$ , принадлежащая  $\mathcal{R}^N$ , которая включает в себя подобласть  $G_0$ . Области  $G_1$  и  $G_0$  удовлетворяют следующим условиям: для любых начальных условий  $x_i(0)$  из области  $G_1$  при  $t \rightarrow \infty$  все фазовые траектории рано или поздно достигают области  $G_0$ ; если фазовая траектория принадлежит области  $G_0$  в момент времени  $t=t_1$ , то она будет принадлежать  $G_0$  всегда, то есть для любых  $t \geq t_1$  фазовая траектория будет находиться в области  $G_0$  [1,3].

Если эти условия выполняются, то область  $G_0$  называется *аттрактором динамической системы* (1). Другими словами, аттрактор  $G_0$  – это инвариантное относительно потока (1) предельное множество траекторий системы, куда стремятся и там остаются любые траектории из области  $G_1$ , охватывающей  $G_0$ . Область  $G_1$  называется *областью (или бассейном) притяжения аттрактора*  $G_0$ . В области  $G_1$  по определению могут существовать исключительно переходные, нестационарные типы движений. Область  $G_0$  отвечает установившимся (предельным) типам движения. В этом смысле можно сказать, что аттрактор  $G_0$  есть изолированное предельное множество фазовых траекторий системы. Изолированное в том смысле, что любые типы движения системы в окрестности аттрактора имеют исключительно переходный характер, и в итоге при  $t \rightarrow \infty$  фазовые траектории притягиваются областью  $G_0$ . Отсюда и название – аттрактор (слово «attract» в переводе с английского означает «притягивать»).

## 2. Регулярные аттракторы

До открытия детерминированного хаоса было известно всего три типа устойчивых установившихся решений динамической системы (1): состояние равновесия, когда после переходного процесса система достигает стационарного (не меняющегося во времени) состояния, устойчивое периодическое решение и

устойчивое квазипериодическое решение. Соответствующими аттракторами в этих случаях являются точка в фазовом пространстве, предельный цикл и предельный  $n$ -мерный тор. Сигнатура спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) фазовой траектории в этих случаях будет:

$$\begin{aligned} &\langle - \rangle, \langle - \rangle, \dots, \langle - \rangle - \text{состояние равновесия,} \\ &\langle 0 \rangle, \langle - \rangle, \langle - \rangle, \dots, \langle - \rangle - \text{предельный цикл,} \\ &\underbrace{\langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle, \dots, \langle 0 \rangle, \langle - \rangle, \dots, \langle - \rangle}_n - n\text{-мерный тор, } n \geq 2. \end{aligned}$$

Как мы увидим в дальнейшем, непериодическим решениям системы (1) могут соответствовать странные хаотические аттракторы сложной геометрической структуры, которые имеют по крайней мере один положительный ляпуновский показатель и дробную размерность. Для оценки фрактальной размерности часто используют формулу Каплана – Йорке [2]

$$D = j + [\sum_{i=1}^j \lambda_i] / |\lambda_{j+1}|, \quad (2)$$

где  $j$  – наибольшее целое число, для которого сумма  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$ . Если применить формулу (2) к указанным трем типам аттракторов, то мы получим нулевую размерность для точки,  $D=1$  для предельного цикла и  $D=n$  для  $n$ -мерного тора. Интересно, что во всех этих случаях фрактальная размерность строго совпадает с метрической размерностью аттракторов. То обстоятельство, что указанные типы решений являются асимптотически устойчивыми по Ляпунову, а размерность соответствующих аттракторов дается целым числом и строго совпадает с метрической, позволяет назвать указанные типы аттракторов регулярными. Нарушение одного из сформулированных условий исключает аттрактор из класса регулярных. Как сейчас стало ясно, необходимо ввести специальную классификацию нерегулярных (странных) аттракторов [3].

### 3. Странные хаотические аттракторы

Новый тип аттрактора динамической системы (1) был впервые обнаружен Лоренцем в 1963 году при численном исследовании знаменитой теперь модели Лоренца [5]. Строгое математическое доказательство существования непериодических решений системы (1) было дано в 1971 году Рюэлем и Такенсом, ими же было введено понятие странного аттрактора как образа детерминированного хаоса [6]. С тех пор вот уже более 25 лет явление детерминированного хаоса и понятие странного аттрактора во многих работах практически однозначно связывают друг с другом. Однако при более детальном рассмотрении это оказывается не всегда справедливым и требует пояснений.

**3.1. Грубые гиперболические аттракторы.** Если внимательно прочитать работу [6], то выясняется, что доказательство существования странного аттрактора было дано в жестком предположении, что динамическая система (1) является грубой гиперболической. Что это означает? Система является гиперболической, если все ее фазовые траектории седловые. Точка как образ траектории в сечении Пуанкаре в гиперболической системе всегда является седлом. Грубость означает, что при малом возмущении правых частей (1) и малой вариации управляющих параметров все траектории продолжают оставаться седловыми. Не происходит никаких бифуркаций решений системы (1)! В частности, не возникает и особых траекторий типа сепаратрисных контуров (петель). Наличие последних может быть причиной рождения устойчивых предельных циклов.

Таким образом, необходимо понимать, что странные (в смысле Рюэля –

Такенса) аттракторы всегда являются грубыми гиперболическими предельными множествами. Основной чертой, отличающей странные хаотические аттракторы от регулярных, является экспоненциальная неустойчивость фазовой траектории на аттракторе. Спектр ляпуновских экспонент в этом случае содержит как минимум один положительный показатель

$$\langle + \rangle, \langle 0 \rangle, \langle - \rangle, \dots, \langle - \rangle,$$

$$D = 2 + \lambda^+ / |\lambda_3| > 2.$$

Как видно из формулы Каплана – Йорке, фрактальная размерность аттрактора всегда будет больше двух и в общем случае не будет выражаться целым числом. Минимальная размерность фазового пространства, в которое можно «вложить» странный аттрактор, оказывается равной трем. Таким образом, режим детерминированного хаоса можно наблюдать в дифференциальных динамических системах размерности  $N \geq 3$ .

К сожалению, в реальных системах естествознания режим строго гиперболического грубого хаоса до сих пор не обнаружен! Истинно «странные» аттракторы являются идеальной, но недостижимой пока моделью детерминированного хаоса. В реальной жизни, как всегда, все оказывается гораздо сложнее в сравнении с идеализацией.

**3.2. Аттракторы типа Лоренца.** Удивительно, но это факт, что именно хаотический аттрактор в модели Лоренца оказался наиболее близким по своим свойствам и структуре к грубым гиперболическим. Аттрактор Лоренца является гиперболическим (это очень важно!), но не грубым. Негрубость аттрактора Лоренца связана с существованием счетного всюду плотного множества особых траекторий типа петель сепаратрис, что в численных экспериментах практически не проявляется. Главное, что в аттракторе Лоренца все траектории седловые и при вариации параметров не возникает устойчивых точек или циклов [7].

Уравнения Лоренца были получены из уравнений Навье – Стокса в задаче о тепловой конвекции и имеют вид

$$\dot{x} = -\sigma(x-y), \quad \dot{y} = rx-y-xz, \quad \dot{z} = xy-bz, \quad (3)$$

где  $\sigma$ ,  $b$  и  $r$  – управляющие параметры. К уравнениям типа (3) сводятся некоторые модели лазеров, а также модель дискового динамо [7].

Система (3) инвариантна к замене  $(-x, -y, z) \rightarrow (x, y, z)$  и характеризуется тремя состояниями равновесия. Если зафиксировать значения параметров  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$  и исследовать поведение траекторий системы (3) при вариации  $r$ , то можно убедиться, что выше критической точки  $r_{cr} \approx 24.74$  в системе (3) реализуется единственный хаотический аттрактор – аттрактор Лоренца. Областью притяжения аттрактора Лоренца является все фазовое пространство. Аттрактор Лоренца есть притягивающее множество фазовых траекторий, которые характеризуются индивидуальной экспоненциальной неустойчивостью. Указанные свойства сохраняются при вариации

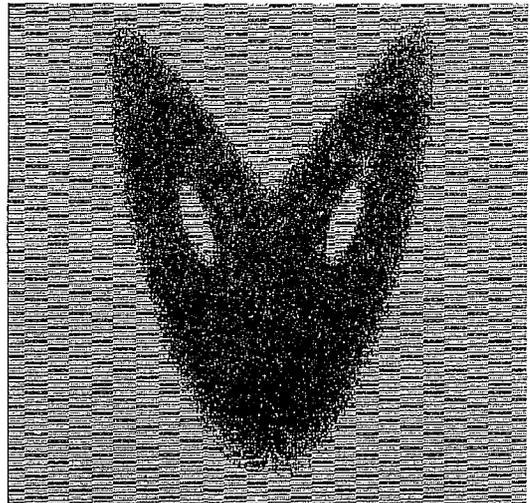


Рис. 1. Проекция аттрактора Лоренца на плоскость переменных  $(x, z)$  (черный цвет) и бассейн его притяжения в секущей плоскости  $y=1$  (серый цвет). Значения параметров:  $r=28$ ,  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$

параметров в конечной области их значений. На рис. 1 представлена проекция аттрактора Лоренца на плоскость переменных  $(x, z)$  с указанием его бассейна притяжения.

Аттрактор Лоренца демонстрирует практически все свойства и качества, которые были предсказаны в отношении грубых гиперболических аттракторов. Основные его свойства:

1. Наличие счетного множества петель сепаратрис состояний равновесия системы Лоренца при ее возмущении не приводит к рождению устойчивых регулярных типов движений.

2. При вариации параметров системы (3) в конечной области значений в аттракторе Лоренца не происходит бифуркаций и никаких других устойчивых притягивающих подмножеств не возникает.

3. При малых возмущениях уравнений и воздействии шума малой интенсивности изменения структуры аттрактора оказываются также малыми. Собственная динамическая природа хаотичного поведения оказывается намного сильнее навязываемой извне.

4. Аттрактор Лоренца допускает построение гладкой функции плотности распределения  $p(x, y, z)$ , то есть вероятностной меры аттрактора. При этом малые возмущения потока (3) вызывают малые изменения вероятностной меры в полном соответствии с теоретическими результатами Кифера, сформулированными для гиперболических систем.

Аттрактор Лоренца имеет классический спектр ляпуновских характеристических показателей (ЛХП):

$$\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -14.57, (r=26), \quad (4)$$

что дает значение ляпуновской размерности  $D=2.06$ . Близкая к нулю величина дробной части размерности обусловлена сильным сжатием потока в диссипативной системе (3)

$$\text{div } F = -(\sigma + b + 1). \quad (5)$$

Это обстоятельство объясняет тот факт, что отображение Пуанкаре аттрактора Лоренца очень близко к одномерному. В силу того, что  $\text{div } F$  (5) не зависит от фазовых переменных, в системе (3) не может родиться режим двухчастотных квазипериодических колебаний. Поэтому множество неособых фазовых траекторий системы исчерпывается точками, циклами и аттрактором Лоренца.

Отметим, что система (3) демонстрирует с экспериментальной точки зрения практически грубый гиперболический хаос в конечной области значений ее управляющих параметров. На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма системы (3).

Существованию аттрактора Лоренца отвечает заштрихованная область в параметрическом пространстве. Вне указанной области свойства хаотического аттрактора будут существенно иными; система Лоренца здесь будет вести себя уже как квазигиперболическая [8].

Проиллюстрируем типичные характеристики и свойства аттрактора Лоренца. Спектр ЛХП не изменяется

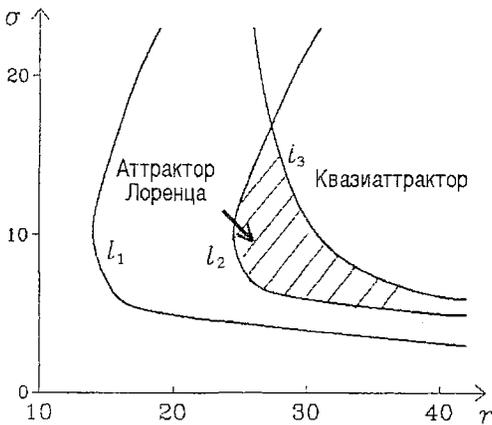


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма системы Лоренца на плоскости параметров  $(r, \sigma)$  для  $b=8/3$ :  $l_1$  — линия существования симметричной петли сепаратрисы нулевого состояния равновесия,  $l_2$  — линия рождения аттрактора Лоренца,  $l_3$  — линия бифуркационного перехода к квазиаттрактору

при вариации начальных условий, так как аттрактор Лоренца является единственным, бассейном притяжения которого служит все фазовое пространство (см. рис. 2 и рис. 3).

Спектр ЛХП практически не меняется при варьировании управляющих параметров системы в пределах области существования аттрактора Лоренца (см. рис. 2). Эти свойства наглядно иллюстрируют грубость аттрактора Лоренца в эксперименте: основные свойства аттрактора сохраняются при вариации параметров и начальных условий, бифуркации аттрактора отсутствуют.

Типичными для перемешивающих систем являются автокорреляционная функция и спектр мощности аттрактора Лоренца, представленные на рис. 4.

Автокорреляционная функция экспоненциально спадает с увеличением времени практически монотонно (см. рис. 4, а). Спектр мощности представляет собой непрерывную спадающую функцию частоты, причем в спектре отсутствуют ярко выраженные пики на каких-либо характерных частотах (см. рис. 4, в).

Все характеристики и свойства аттрактора Лоренца практически не

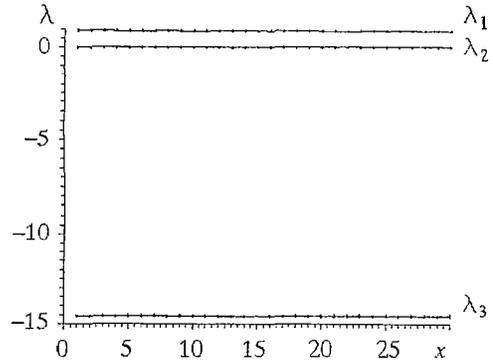


Рис. 3. Спектр ЛХП аттрактора Лоренца в зависимости от начального значения координаты  $x$ . Параметры системы:  $\sigma=10, b=8/3, r=28$

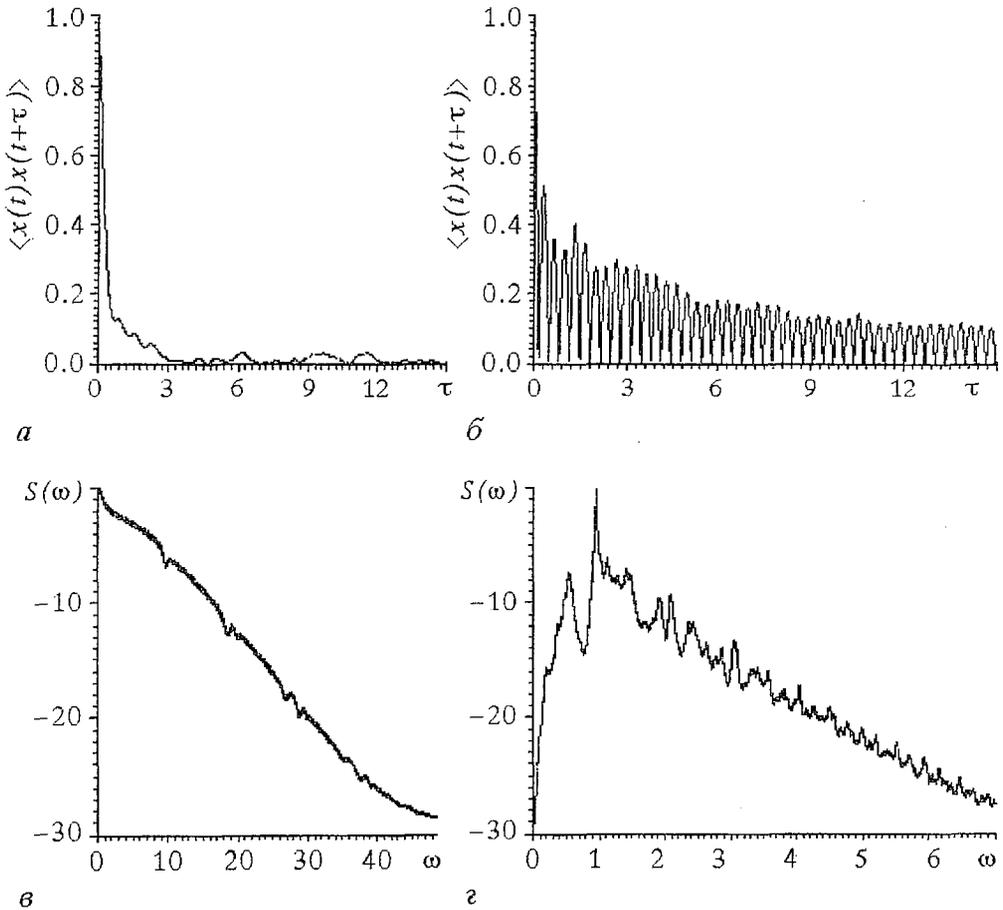


Рис. 4. Автокорреляционная функция и спектр мощности аттрактора Лоренца (а,в) и генератора Анищенко – Астахова (б,г)

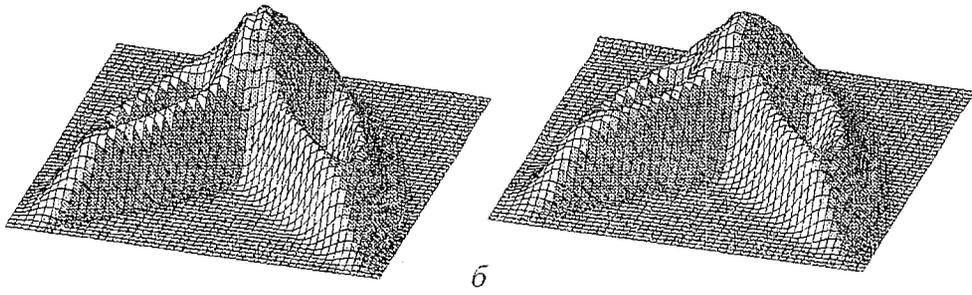


Рис. 5. Плотность распределения вероятностей  $p(x,z)$  аттрактора Лоренца в отсутствие шума (а) и при наличии аддитивного белого шума интенсивности  $d=0.8$  (б)

меняются при добавлении в уравнения (3) аддитивного (или мультипликативного) шума малой интенсивности. Иллюстрацией служит рис. 5, где представлены графики стационарной двумерной плотности распределения вероятностей  $p(x,z)$  аттрактора Лоренца в отсутствие и при наличии аддитивного шума, вводимого во все три уравнения системы [8].

**3.3. Квазигиперболические аттракторы.** Наиболее типичными в исследованиях являются так называемые квазигиперболические аттракторы, которые иллюстрируют экспериментально наблюдаемый хаос во многих динамических системах [3,8–10]. В системах с квазигиперболическими аттракторами реализуются режимы детерминированного хаоса, характеризуемые экспоненциальной неустойчивостью траекторий и фрактальной геометрией аттрактора. С этой точки зрения характеристики указанных режимов автоколебаний идентичны основным характеристикам грубых гиперболических аттракторов и аттракторов типа Лоренца. Однако есть весьма существенные, принципиальные различия, которые необходимо учитывать во избежание неверной трактовки экспериментальных результатов. Отличительной чертой квазигиперболических аттракторов является одновременное сосуществование счетного множества различных хаотических и регулярных аттракторов в ограниченном элементе объема фазового пространства системы при фиксированных значениях ее параметров. Эта совокупность всех сосуществующих предельных множеств траекторий в ограниченной области  $G_0$  фазового пространства, куда стремятся все или почти все траектории из области  $G_1$ , включающей  $G_0$ , и называется *квазиаттрактором* динамической системы.

Квазиаттракторы характеризуются чрезвычайно сложной структурой вложенных бассейнов притяжения. Но этим сложность не ограничивается. При конечной вариации параметров квазигиперболической системы реализуются каскады различных бифуркаций как регулярных, так и хаотических аттракторов. Соответственно осуществляется бифуркационная перестройка их бассейнов притяжения. Причиной такой сложности квазиаттракторов являются эффекты гомоклинического касания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых точек в сечении Пуанкаре, которые имеют место на множестве значений параметров ненулевой меры.

Если при этом учесть, что бассейны притяжения сосуществующих предельных множеств могут иметь фрактальные границы и составлять чрезвычайно узкие области в фазовом пространстве, то понятно, насколько важными становятся проблемы точности расчетов на ЭВМ и влияния внешних шумов. Проиллюстрируем свойства квазигиперболических аттракторов на ряде примеров.

Рассмотрим типичную квазигиперболическую систему, хаотическая динамика которой исчерпывающим образом иллюстрирует теорему Шильникова о свойствах динамических систем с петлей сепаратрисы седло–фокуса состояния равновесия [3]. Эта система получила название модифицированного генератора с инерционной нелинейностью (генератора Анищенко – Астахова) и представляет

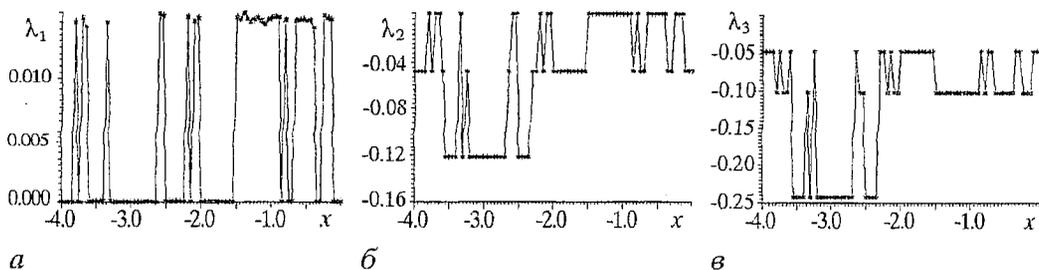


Рис. 6. Спектр ЛХП системы (6) в зависимости от выбора начальной координаты  $x$  для значений параметров  $m=1.42, g=0.097$

собой трехмерную двухпараметрическую дифференциальную систему уравнений

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + gI(x)x^2, \quad (6)$$

где

$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Зафиксируем значения параметров  $m=1.42, g=0.097$  и вычислим зависимость показателей спектра ЛХП от начальных условий. Результаты представлены на рис. 6 и свидетельствуют о сосуществовании хаотического и периодических режимов колебаний.

Более внимательный анализ данных рис. 6 показывает, что для  $-2.0 < x < 0$  проявляют себя режимы одного из предельных циклов и хаотический; в области  $-4.0 < x < -2.0$  добавляется предельный цикл иного семейства (сравни значения третьего показателя спектра ЛХП). Более наглядно ситуация отражена на рис. 7, который визуализирует проекции трех сосуществующих аттракторов системы (6) и бассейны их притяжения. Действительно, в системе сосуществуют однотактный и двухтактный предельные циклы и хаотический аттрактор.

При изменении параметров системы, в силу ее негрубости, совокупность предельных множеств системы претерпевает бифуркации. Иллюстрацией этого факта может служить график зависимости показателей спектра ЛХП от параметра  $m$ , представленный на рис. 8. Обращение в ноль показателя  $\lambda_1$  свидетельствует о рождении одного из множества предельных циклов, демонстрирующей каскады бифуркаций удвоения периода. При этом показатель  $\lambda_1$  остается равным нулю, а  $\lambda_2$  принимает различные отрицательные значения. Бифуркации аттракторов сопровождаются изменением структуры бассейнов их притяжения, границы которых приобретают фрактальные свойства.

Присутствие в квазиаттракторе устойчивых и седловых циклов наряду с хаотическими предельными множествами проявляется в структурах автокорреляционной функции (АКФ) и спектра мощности. На рис. 4, б, г представлены результаты, рассчитанные для хаотического режима системы (6) при  $m=1.5, g=0.2$ . АКФ в среднем экспоненциально спадает во времени, и

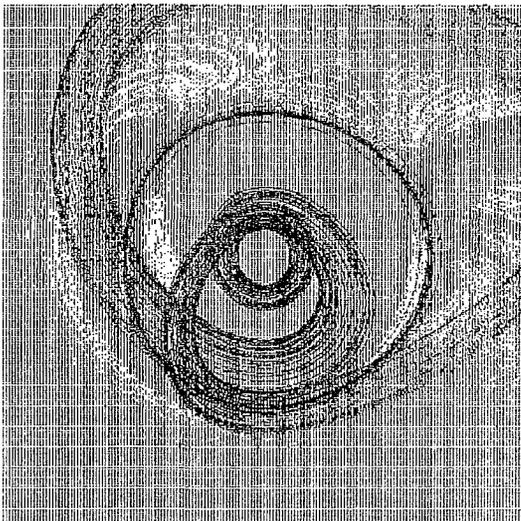


Рис. 7. Проекция сосуществующих аттракторов в системе (6) при  $m=1.42, g=0.097$  и структура бассейнов их притяжения в секущей плоскости  $z=1$ . Бассейн притяжения цикла периода  $T_0$  – белый цвет, бассейн притяжения цикла периода  $2T_0$  – серый цвет, бассейн притяжения хаотического аттрактора – серый в полосу цвет

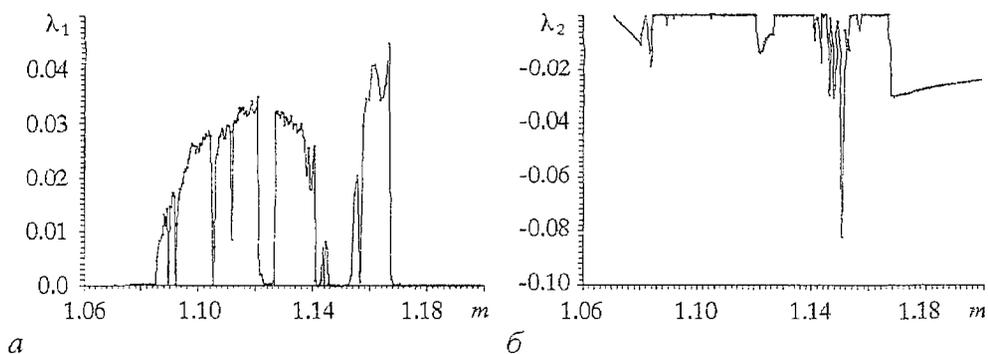


Рис. 8. Показатели Ляпунова  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в зависимости от параметра  $m$  ( $g=0.2$ ) для системы (6)

спектр является сплошным. Однако при внимательном рассмотрении виден периодический компонент в структуре АКФ и в спектре заметны резкие выбросы на некоторых характерных частотах. Эти особенности АКФ и спектра квазигиперболического хаоса являются типичными и существенно отличают квазиаттрактор от аттрактора Лоренца (сравни данные, представленные на рис. 4).

Фрактальность границ и изрешеченность бассейнов притяжения совокупности сосуществующих регулярных и хаотических аттракторов квазигиперболической системы делает ее чрезвычайно чувствительной к шумовым возмущениям. Рассмотрим режим хаотического аттрактора в системе (6) при  $m=1.5$ ,  $g=0.2$ . На рис. 9 представлены графики двумерной плотности распределения  $p(x,y)$  в отсутствие шума и при аддитивном введении гауссового шума в правые части трех уравнений системы. Как видно из графиков, добавление шума малой интенсивности приводит к явным изменениям в структуре функции распределения.

Режим сосуществования конечного числа аттракторов выбран нами для наглядной иллюстрации сложности устройства квазиаттрактора. Теоретически квазиаттрактор включает бесконечное множество сосуществующих предельных режимов, которые при малых вариациях параметров претерпевают бесконечную

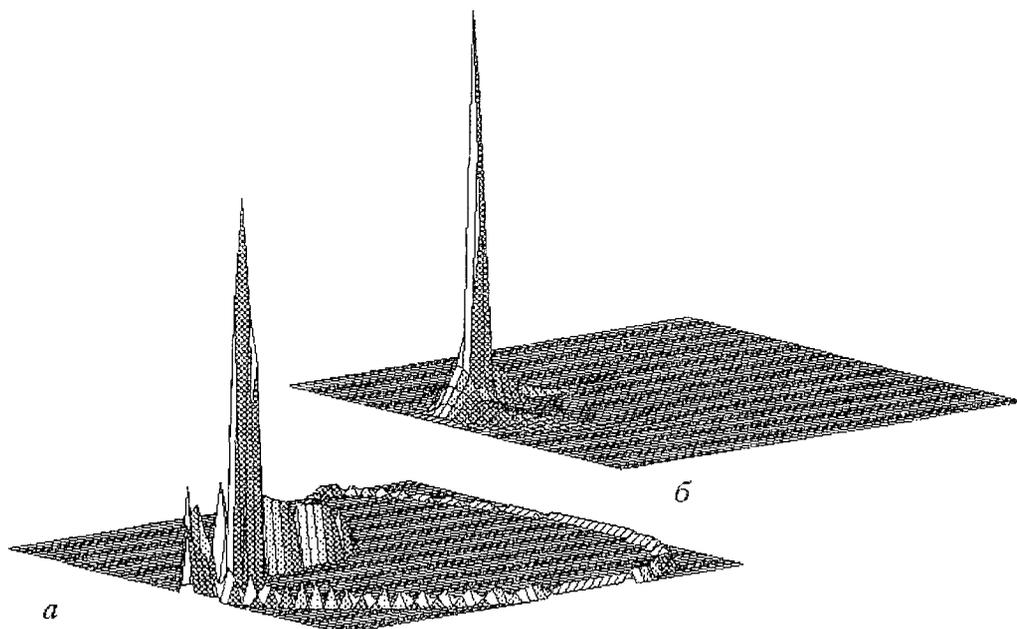


Рис. 9. Плотность распределения вероятностей  $p(x,y)$  хаотического режима в генераторе Анищенко – Астахова ( $m=1.5$ ,  $g=0.2$ ) в отсутствие шума (а) и при введении аддитивного шума интенсивности  $d=10^{-3}$  во все уравнения системы (б) (б)

последовательность различных бифуркаций. При этом могут иметь место области значений параметров, в которых (с экспериментальной точки зрения) система имеет лишь один хаотический аттрактор, который притягивает все траектории фазового пространства. Если в эксперименте такой режим обнаружен и установлена область его существования по параметрам, то можно говорить о режиме странного аттрактора, близкого по своим свойствам к грубым гиперболическим.

В качестве примера рассмотрим дискретную динамическую систему в виде двух связанных логистических отображений

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - \alpha x_n^2 + \gamma(y_n - x_n), \\ y_{n+1} &= 1 - \alpha y_n^2 + \gamma(x_n - y_n). \end{aligned} \quad (7)$$

В системе (7) может реализоваться единственный режим гиперхаоса, область притяжения которого представляет собой ограниченный ромб на плоскости  $(x_n, y_n)$ . Однако, если изменить значения управляющих параметров, число сосуществующих аттракторов возрастает, и резко усложняется структура их бассейнов притяжения. Результаты показаны на рис. 10. Рис. 10, б, в частности, наглядно иллюстрирует влияние неопределенности в задании начальных условий на режим функционирования системы.

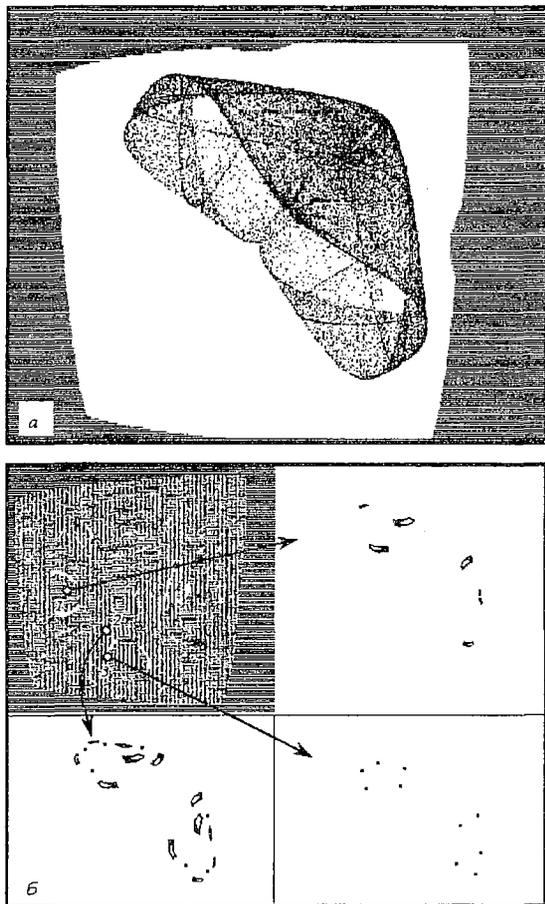


Рис. 10. Гиперхаос в системе (7) для значений параметров  $\alpha=0.9$ ,  $\gamma=0.285$  (а), режим сосуществования аттракторов и структура бассейнов их притяжения в той же системе для  $\alpha=0.78$ ,  $\gamma=0.2876$  (б) в фазовом пространстве  $x_n, y_n$ . Цифрами 1, 2, 3 обозначены области неопределенности в задании начальных данных, ведущие к соответствующим предельным множествам, указанным стрелками

#### 4. Странные нехаотические и хаотические нестранные аттракторы

Хаотические аттракторы любого из описанных выше трех типов объединяют два принципиальных свойства: сложная геометрическая структура аттрактора (как следствие – его дробная метрическая размерность) и экспоненциальная неустойчивость индивидуальных траекторий на аттракторе. Именно эти свойства используются экспериментаторами в качестве критерия при диагностике режимов детерминированного хаоса.

Однако нерегулярные аттракторы, как математические образы сложной динамики, вышеописанными типами хаотических аттракторов не исчерпываются. Выяснилось, что хаотическое поведение в смысле наличия перемешивания и геометрическая «странность» аттрактора могут не соответствовать друг другу. Странные в геометрическом понимании аттракторы могут не быть хаотическими ввиду отсутствия экспоненциальной неустойчивости фазовых траекторий. С другой стороны, есть примеры перемешивающих диссипативных систем, аттракторы которых не являются в строгом смысле странными, то есть не характеризуются фрактальной структурой и дробной метрической размерностью.

Другими словами, существуют конкретные примеры диссипативных динамических систем, аттракторы которых характеризуются следующими свойствами:

1. Аттрактор имеет регулярную геометрическую структуру с точки зрения целочисленной метрической размерности. При этом индивидуальные фазовые траектории на аттракторе в среднем экспоненциально неустойчивы.

2. Аттрактор характеризуется сложной геометрической структурой. При этом траектории на нем асимптотически устойчивы по Ляпунову. Перемешивание отсутствует.

Первый тип называют *хаотическими нестранными аттракторами* (ХНА), второй – *странными нехаотическими аттракторами* (СНА).

**4.1. Хаотические нестранные аттракторы.** Хаотические аттракторы, не являющиеся с точки зрения их геометрии странными, то есть фрактальными предельными множествами, известны относительно давно, однако до сих пор изучены недостаточно. В качестве примера динамической системы с ХНА можно привести модифицированное отображение Арнольда [11]. Это отображение представляет собой известное «cat map» с добавлением нелинейного периодического слагаемого

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + y_n + \delta \cos 2\pi y_n, & \text{mod } 1 \\y_{n+1} &= x_n + 2y_n, & \text{mod } 1.\end{aligned}\tag{8}$$

При условии, что  $\delta < 1/2\pi$ , отображение (8) есть диффеоморфизм на торе. Другими словами, отображение (8) взаимно однозначно (обратимо) и переводит единичный квадрат на плоскости  $(x_n, y_n)$  в себя. Отображение (8) является диссипативным, то есть при каждой итерации элемент площади сжимается. Это свойство легко доказать, если вычислить якобиан преобразования (8)

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\pi\delta \sin 2\pi y_n \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \delta < 1/2\pi.\tag{9}$$

Среднее по времени значение  $|J| < 1$ . При этом спектр ляпуновских экспонент представляет собой «+», «-», то есть фиксируется наличие перемешивания.

Казалось бы, мы имеем дело с обычным хаотическим странным аттрактором. Но это не так. Главной отличительной особенностью рассматриваемого случая является то, что несмотря на сжатие площади, движение изображающей точки отображения (8) является эргодическим! Точка при  $n \rightarrow \infty$

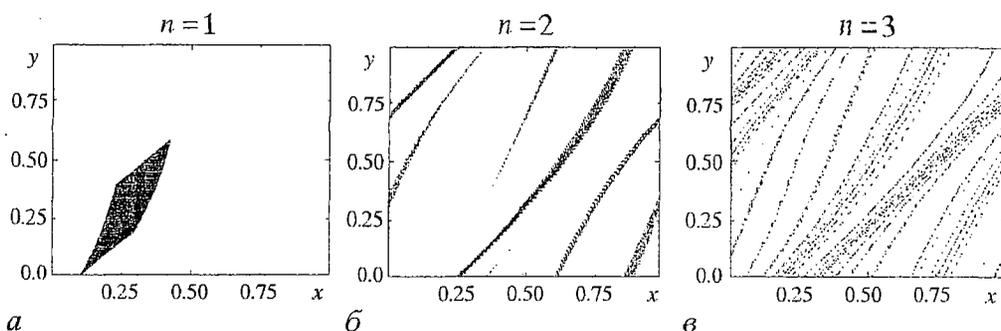


Рис. 11. Эволюция начального элемента площади в отображении Арнольда (8) через 1, 3 и 5 итераций, соответственно

посещает любой элемент единичного квадрата, представляющего полную развертку двумерного тора! Свидетельством этого факта является то, что метрическая размерность аттрактора (емкость по Колмогорову) равна 2. Таким образом, несмотря на сжатие, аттрактором системы (8) является весь единичный квадрат. В этом смысле аттрактор Арнольда не является странным, так как ему нельзя приписать фрактальную геометрию.

Рассмотрим процесс формирования аттрактора, чтобы более детально понять особенности его структуры. С этой целью выберем малый элемент площади в качестве начальных условий ( $0 \leq x_n \leq 0.2$ ,  $0 \leq y_n \leq 0.2$ ) и проследим эволюцию этого элемента при итерациях отображения (8).

На рис. 11 представлены последовательные образы исходного малого квадрата, которые свидетельствуют о следующем. За счет сжатия по одному направлению и растяжению по другому исходный квадрат эволюционирует в бесконечное множество «полос», которые с ростом числа итераций стремятся покрыть всю поверхность единичного квадрата. В итоге при  $n \rightarrow \infty$  так и получается.

Однако, как видно из фазового портрета аттрактора (рис. 12), хотя точки практически полностью покрывают квадрат, плотность их распределения явно неоднородна! Количественной мерой этой неоднородности является величина информационной размерности  $1 < D_1 < 2$ . Например, для значения  $\delta = 0.05$  величина  $D_1 < 1.96$ , для  $\delta = 0.10$  —  $D_1 < 1.84$ . При этом, как уже говорилось, емкость  $D_c = 2.0$  (это строгий результат Синая). Как следствие неоднородности плотности распределения вероятностей точек на аттракторе, значения всех вероятностно-метрических размерностей аттрактора Арнольда будут лежать в интервале  $1 < D < 2$ . Эти размерности учитывают не только геометрические, но и динамические свойства аттрактора.

ХНА обнаружены в ряде других отображений на торе. Можно предположить, что эргодические хаотические движения типичны для диффеоморфизмов на торе. Доказательство факта существования ХНА в таких отображениях позволяет утверждать, что есть потоковые (дифференциальные) системы в  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 4$ , имеющие режимы ХНА. Однако до настоящего времени ХНА в дифференциальных динамических

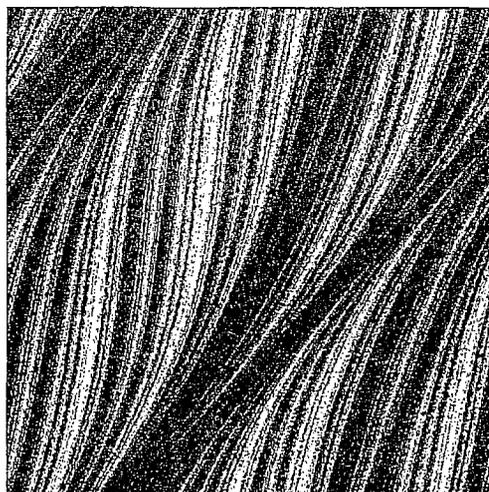


Рис. 12. Хаотический нестранный аттрактор в отображении Арнольда (8) ( $\delta = 0.15$ )

системах не обнаружены. В связи с этим, в частности, до сих пор является открытым вопрос о возможности существования хаотического аттрактора на поверхности трехмерного тора, вложенного в фазовое пространство размерности  $N \geq 4$ .

Обратим внимание на одно важное обстоятельство. Как видно из рис. 12, хаотическое множество точек отображения (8) плотно покрывает единичный квадрат поверхности с некоторой непрерывной вероятностной мерой. То есть аттрактором является весь единичный квадрат! Как же быть с определением аттрактора как изолированного предельного множества, что здесь является областью притяжения? Дело в том, что отображение (8) описывает только аттрактор и не содержит информации о переходных процессах. Рассуждать здесь нужно так. Пусть задана некоторая дифференциальная система в  $\mathcal{R}^N$  ( $N \geq 4$ ), имеющая в качестве аттрактора трехмерный тор  $T^3$  (система диссипативна!). Рассмотрим структуру фазовых траекторий на  $T^3$ . С этой целью введем отображение Пуанкаре на нем. В этом случае мы будем иметь отображение на двумерном торе  $T^2$ . Именно таковым и является отображение (8), которое моделирует свойства предельных траекторий, лежащих в исходной системе на  $T^3$ , то есть на аттракторе. Поэтому рис. 12 иллюстрирует структуру аттрактора, а область его притяжения остается вне пределов возможности модельного дискретного описания.

**4.2. Странные нехаотические аттракторы.** Как мы уже говорили, странные хаотические аттракторы обладают геометрической «странностью» и перемешиванием. Другими словами, сложная динамика перемешивающей системы порождает и геометрическую сложность соответствующего аттрактора. Тем не менее в случае ХНА мы вынуждены разделить эти свойства: перемешивание может не приводить к геометрической «странности» аттрактора. Здесь мы рассмотрим возможность реализации противоположной ситуации, когда система демонстрирует сложный неперiodический режим колебаний, асимптотически устойчивый по Ляпунову (без перемешивания), а аттрактор при этом явно не является регулярным с точки зрения его геометрической структуры.

В этом случае целесообразно ввести определение «странности» аттрактора вне связи с динамикой системы, а положив в основу его геометрическую структуру. В работе [12] такое определение дано: «Странный аттрактор – это аттрактор, который не состоит из конечного множества точек и не является кусочно-дифференцируемым. Кусочно-дифференцируемым аттрактором мы называем кусочно-дифференцируемую кривую, поверхность или объем, который ограничен кусочно-дифференцируемой поверхностью.» Если поразмышлять, то примеры негрубых СНА привести совсем нетрудно. По сути дела любой странный хаотический аттрактор в критической точке перехода к хаосу является собой пример СНА. Действительно, возьмем, к примеру, аттрактор Фейгенбаума в логистическом отображении

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n). \quad (10)$$

В критической точке  $r^* = 3.57 \dots$  предельное множество представляет собой счетное множество точек  $x_n \in [0, 1]$ . При этом ляпуновский показатель равен нулю (хаоса нет!). По определению такой аттрактор является СНА. Однако он негрубый. С точки зрения физики интерес представляют грубые аттракторы, которые существуют на множестве значений параметров ненулевой меры и сохраняют свою структуру при возмущениях. Как оказалось, динамические системы с грубыми СНА существуют как в дифференциальных, так и в дискретных динамических системах.

СНА типичны для динамических систем с квазипериодическим возбуждением. Уместно уточнить, что мы понимаем под аттрактором неавтономной системы. Предположим, что автономная динамическая система в  $\mathcal{R}^N$  находится под действием периодической силы с периодом  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Будем

анализировать сечение Пуанкаре через период внешней силы. В секущей поверхности  $t=nT_0$  мы каждый раз (при любом  $n$ ) будем наблюдать некоторое множество точек. Аттрактором в этом случае называют проекцию этого множества точек в секущих, полученных для последовательности  $n \rightarrow \infty$ , на исходную секущую поверхность при  $n=0$ . Можно поступить другим способом: путем введения новых переменных свести исходную неавтономную систему к автономной, ограничив области значений новых переменных длительностью периода. В расширенном таким образом фазовом пространстве можно пользоваться понятием аттрактора, введенном в рассмотрение в разделе 1.

Особенностью систем с квазипериодическим воздействием является то, что введение двух новых независимых переменных, по сути, означает введение в рассмотрение двух масштабов времени, которые не связаны с переменными состояния исходной автономной системы и независимы друг от друга.

В простейшем случае отображение, в котором реализуется СНА, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, \phi_n, r), \\ \phi_{n+1} &= \omega + \phi_n, \quad \text{mod } 1,\end{aligned}\tag{11}$$

где  $x_n$  – динамическая переменная;  $\phi_n$  – фаза воздействия;  $r$  – параметр (или параметры) системы;  $f$  – нелинейная функция, периодическая относительно  $\phi_n$  с периодом 1;  $\omega$  – иррациональное число. Если  $\omega$  – иррационально, то воздействие будет являться квазипериодическим, так как не существует периода  $k$  такого, что  $f(\phi_{n+k})=f(\phi_n)$ . Таким образом, отображения типа (11) моделируют динамику дифференциальных систем с квазипериодическим (двухчастотным) внешним воздействием. Имеются два характерных временных масштаба:  $k_1=1$  (итерация отображения) и  $k_2=1/\omega$ ,  $\omega$  – сдвиг фазы за одну итерацию. Поэтому  $\omega$  называют числом вращения, которое характеризуется отношением двух частот квазипериодического воздействия.

Впервые СНА был обнаружен и исследован [12] в отображении

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda \operatorname{th}(x_n) \cos 2\pi\phi_n, \\ \phi_{n+1} &= \omega + \phi_n, \quad \text{mod } 1.\end{aligned}\tag{12}$$

Иррациональное значение параметра  $\omega$  чаще всего выбирается равным так называемому «золотому сечению»:  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$ . Для значений  $\lambda > 1$  в отображении (12) строго доказано существование СНА. Кроме системы (12) СНА обнаружены при введении квазипериодического воздействия в отображение окружности, в логистическое отображение, в отображение Хенона и др. Примеры СНА в отображении (12) и в отображении Фейгенбаума (13)

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \alpha (1 - s \cos 2\pi\phi_n) x_n (1 - x_n), \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + \omega, \quad \text{mod } 1\end{aligned}\tag{13}$$

приведены на рис. 13. Основные особенности СНА, требующие выделения этих объектов в отдельный класс:

1. *Геометрические характеристики СНА.* Аттрактор (например, на фазовой плоскости) образован кривой бесконечной длины, недифференцируемой на плотном множестве точек. Эта кривая, подобно кривой Пеано, плотно покрывает часть фазовой плоскости так, что метрическая размерность (емкость) СНА оказывается строго равной 2. В связи с отсутствием положительного показателя в спектре ЛХП, ляпуновская размерность СНА равна единице. Несмотря на целочисленную метрическую размерность, СНА, как правило, демонстрирует самоподобие структуры и, вследствие этого, – свойства скейлинга.

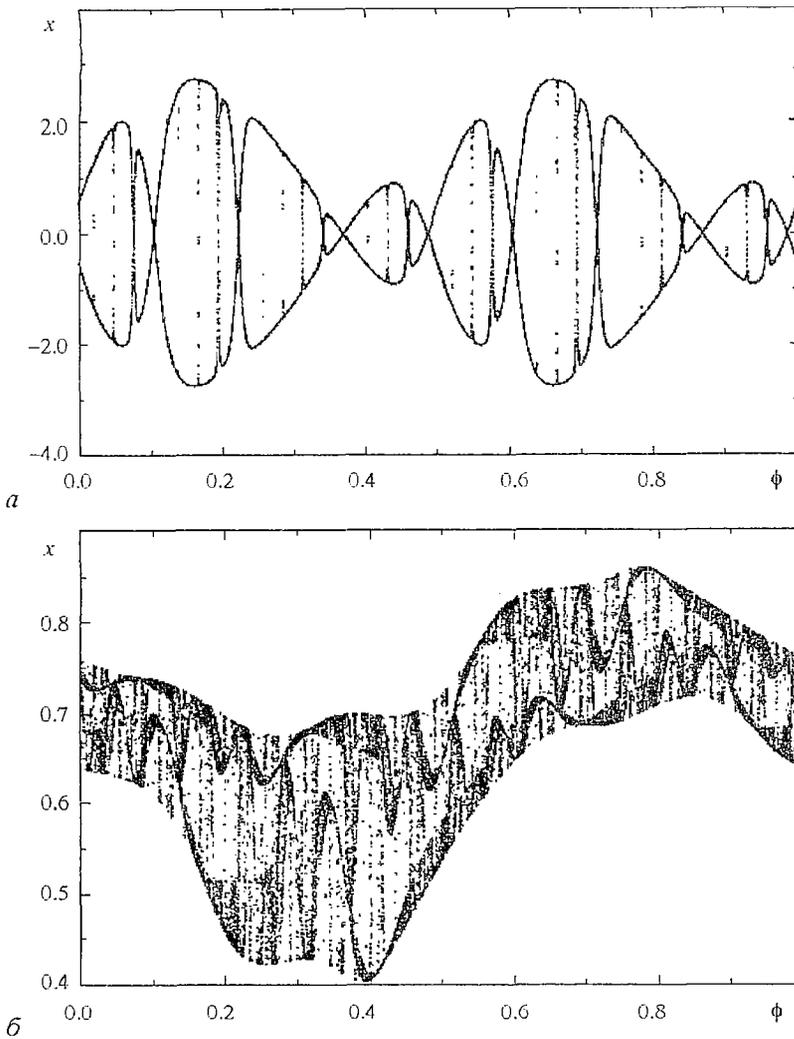


Рис. 13. Странные нехаотические аттракторы в отображении (12) для  $\lambda=1.5$  (а) и в отображении (13) при  $s=0.1$ ,  $\alpha=3.277$  и  $\omega=(5^{1/2}-1)/2$  (б)

Совокупность указанных свойств позволяет говорить о «странной» геометрии СНА.

2. *Спектр ЛХП странного нехаотического аттрактора.* Динамика системы в режиме СНА не является хаотической ввиду отсутствия перемешивания. Экспоненциальной неустойчивости траекторий на аттракторе в среднем нет. В спектре ЛХП отсутствует положительный показатель. Сигнатура спектра ЛХП фазовых траекторий на СНА не отличается от соответствующей сигнатуры спектра ЛХП квазипериодического движения. Однако СНА нельзя считать квазипериодическим аттрактором, в частности потому, что локальный (рассчитанный на конечном интервале времени) старший показатель спектра ЛХП траектории на СНА будет положительным. В частности доказано: вероятность того, что старший локальный ляпуновский показатель будет положительным, отлична от нуля.

3. *Спектр и автокорреляционная функция.* Отсутствие перемешивания в режиме СНА ведет к отсутствию в строгом смысле непрерывного (сплошного) компонента в спектре мощности. В то же время, спектр траектории на СНА не является дискретным! Спектр СНА занимает как бы промежуточное положение между дискретным и непрерывным и имеет специальное название: сингулярно-

непрерывный спектр. Особенность сингулярно-непрерывного спектра в том, что он содержит плотное множество  $\delta$ -пиков самоподобной структуры и обладает свойствами фракталов.

Так как спектр СНА не является непрерывным, то и автокорреляционная функция  $\Psi(\tau)$  не стремится к нулевому пределу при  $\tau \rightarrow \infty$ . Для траекторий на СНА, как правило, наблюдается спадание  $\Psi(\tau)$  до некоторого предельного ненулевого уровня. При этом  $\Psi(\tau)$ , также как и спектр, будет демонстрировать масштабно инвариантные свойства.

В качестве примера на рис. 14 приведен спектр СНА в системе (12), рассчитанный для координаты  $x_n$  аттрактора рис. 13, а. Как видно из графика, спектр действительно представляет собой всюду плотное множество  $\delta$ -пиков и не содержит ярко выраженного сплошного компонента. По виду спектральной функции  $|S_N|$  трудно убедиться в том, что распределение спектральных компонентов подчиняется масштабно инвариантным свойствам. С этой целью рассмотрим автокорреляционную функцию  $\Psi(\tau)$  аттрактора рис. 13, а, представленную на рис. 15.

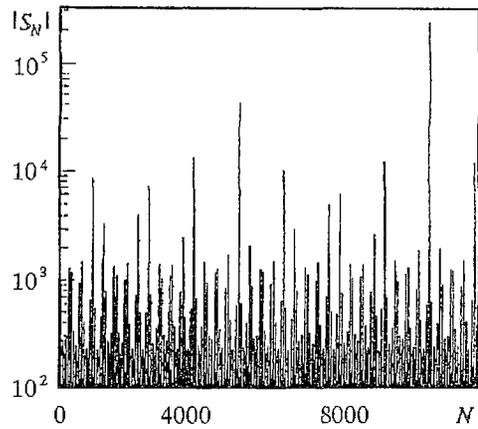


Рис. 14. Сингулярно-непрерывный спектр СНА в отображении (12) для  $\lambda=1.5$

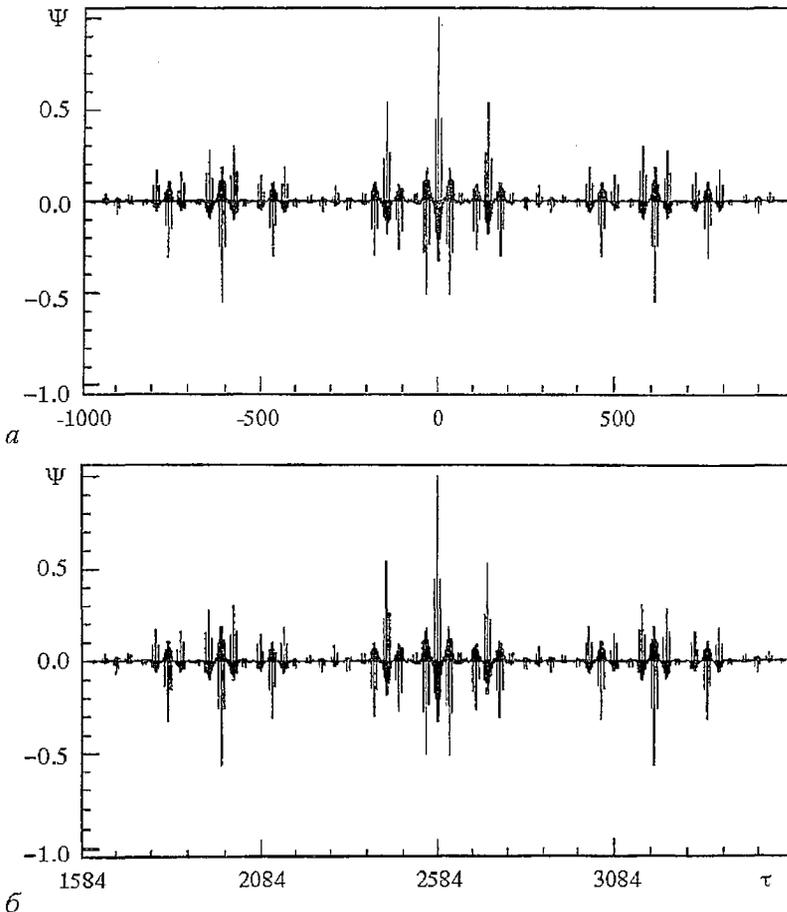


Рис. 15. Самоподобие автокорреляционной функции СНА в системе (12)

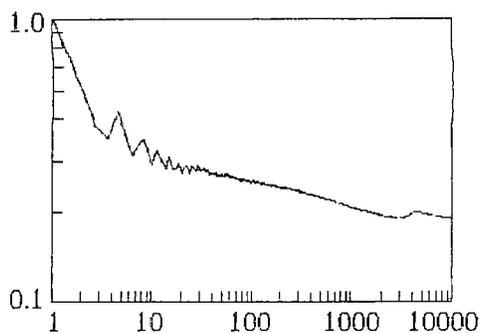


Рис. 16. Типичный график зависимости автокорреляционной функции  $|\Psi(\tau)|$  от времени в режиме СНА

Сравнение зависимостей  $\Psi(\tau)$  на интервалах времени  $-1000 \leq \tau \leq 1000$  и  $1584 \leq \tau \leq 3584$  свидетельствует о полной идентичности структуры автокорреляционной функции. График  $\Psi(\tau)$  рис. 15, а полностью воспроизводится на рис. 15, б, что является следствием свойства масштабной инвариантности. Огибающая  $|\Psi(\tau)|$  в режиме СНА представляет собой спадающую функцию, которая с ростом  $\tau$  ( $\tau \rightarrow \infty$ ) стремится к некоторому отличному от нуля пределу. Типичный график  $|\Psi(\tau)|$  в режиме СНА представлен на рис. 16.

Необходимо отметить, что диагностика режима СНА в численных экспериментах представляет собой весьма трудную, нестандартную задачу и требует проведения тонких вычислений с использованием хорошей современной техники. В противном случае режим СНА и квазипериодический режим с большим числом комбинационных частот в спектре различить не удастся.

## Выводы

Анализ структуры и свойств аттракторов нелинейных диссипативных систем как образов сложных непериодических автоколебаний, проведенный в настоящей лекции, позволяет сделать следующие выводы:

**1.** Классические свойства детерминированного хаоса, как непериодических экспоненциально неустойчивых решений соответствующих динамических систем, демонстрируют грубые гиперболические системы и системы типа Лоренца. Им соответствуют в качестве математических образов странные (или практически странные) аттракторы. Их отличительной особенностью является фрактальность геометрической структуры аттрактора, дробная метрическая размерность и наличие хотя бы одного положительного показателя спектра ЛХП как следствие перемешивания. Грубые гиперболические аттракторы и аттракторы типа Лоренца малочувствительны к шумовому воздействию. Бассейны притяжения таких аттракторов являются гладкими, однородными; свойства аттрактора не чувствительны к изменению начальных условий.

**2.** Более сложными объектами являются квазиаттракторы, которые включают конечную или бесконечную совокупность регулярных и хаотических притягивающих подмножеств, сосуществующих одновременно при фиксированных параметрах системы. Вариация параметров системы приводит к различным бифуркациям этих подмножеств, которых может быть бесконечное число при конечном изменении параметров. Бассейны притяжения сосуществующих аттракторов представляют собой чрезвычайно сложную структуру вложенных областей, обладающих фрактальной геометрией. В результате квазиаттракторы демонстрируют высокую чувствительность к изменению начальных условий и действию шума.

**3.** Экспоненциальная неустойчивость индивидуальных траекторий и «странная» геометрия аттрактора могут не быть связаны однозначно. Существуют режимы хаотических (неустойчивых) автоколебаний, которым соответствуют регулярные в геометрическом смысле аттракторы. Это так называемые хаотические нестранные аттракторы. С другой стороны, можно наблюдать непериодические устойчивые по Ляпунову колебания, соответствующий аттрактор

которых является странным геометрическим объектом. Здесь мы имеем дело со странными нехаотическими аттракторами.

Изложенные в настоящей лекции представления нельзя считать абсолютно непротиворечивыми и общепринятыми. Некоторые из затронутых вопросов до сих пор являются предметом детальных исследований и научных споров, что нужно воспринимать как лишнее доказательство фундаментальной важности предмета исследований.

В заключение считаю своим долгом поблагодарить моих учеников и коллег Т.Е. Вадивасову, Г.И. Стрелкову, А.Б. Неймана и И.А. Хованова за полезные обсуждения и помощь в работе над лекцией. Я благодарен также профессору В.Н. Белых за консультации по ряду математических проблем и профессору Б.П. Безручко за ряд замечаний, позволивших улучшить изложение материала.

*Работа частично финансировалась за счет грантов Госкомвуза РФ (95–0–8.3–66) и совместного гранта Физического общества Германии (436 RUS 113/334).*

### **Библиографический список**

1. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
3. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
4. *Афраймович В.С.* Принцип кольца и квазиаттракторы // Труды международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1984. С. 34.
5. *Лоренц Э.* Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.
6. *Рюэль Д., Такенс Ф.* О природе турбулентности // Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981.
7. *Шильников Л.П.* Теория бифуркаций и модель Лоренца // *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 317.
8. *Anishchenko V.S.* Dynamical Chaos – Models and Experiments. Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific, 1995.
9. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
10. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1989.
11. *Farmer J.D., Ott E., Yorke J.A.* The dimension of chaotic attractors // *Physica* 7D. 1983. P.153.
12. *Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J.A.* Strange attractors that are not chaotic // *Physica* 13D. 1984. P.261.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 18.02.97  
после переработки 19.03.97*

## **ATTRACTORS OF DYNAMICAL SYSTEMS**

*V.S. Anishchenko*

In this lection the definition of an attractor of a dissipative dynamical system is introduced. Classification of existing types of attractors and analysis of their characteristics are presented. The discussed problems are illustrated by the results of