



## О ДИНАМИКЕ МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ БИНАРНЫХ САМОПОДОБНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

*П.В. Купцов, С.П. Кузнецов*

Рассматривается динамика модельных систем – частицы, совершающей одномерное блуждание, и отображения, демонстрирующего бифуркацию вилки, – при воздействии бинарных последовательностей, которые сконструированы из двух символов с помощью специальных правил подстановки. Среди этих последовательностей выделено три класса, соответствующих качественно различным типам динамики под их воздействием. Показано, что с каждой последовательностью ассоциируется матрица  $2 \times 2$ , причем принадлежность последовательности к тому или иному классу определяется меньшим по абсолютной величине собственным числом этой характеристической матрицы.

### Введение

Одной из общих задач нелинейной динамики является задача о поведении различных систем под внешним воздействием. В зависимости от свойств системы и характера воздействия могут наблюдаться такие нетривиальные эффекты, как рождение странного нехаотического аттрактора [1], On-Off перемежаемость [2,3], стохастический резонанс [4] и т. д.

В нелинейной динамике часто используются модельные системы с дискретным временем, которые математически описываются рекуррентными отображениями. Во многих случаях это позволяет исследовать эффекты, анализ которых для систем с непрерывным временем затруднен. Кроме того, переход к отображениям позволяет значительно уменьшить объем вычислений при анализе динамики с помощью компьютера. В настоящей работе будет рассматриваться динамика отображений под воздействием бинарных последовательностей, то есть последовательностей, построенных из двух символов.

Обращение к бинарным последовательностям обусловлено тем, что это простейший класс числовых последовательностей, а также широким использованием двоичного представления сигналов – в вычислительной технике, в цифровых устройствах, в разнообразных теоретических исследованиях (теория информации и пр.). Кроме того, последовательности такого рода возникают, когда некоторая динамическая система исследуется с применением методов символической динамики: если используется кодирование с помощью двух символов, система выступает как генератор бинарной последовательности.

Мы будем обсуждать специальный тип бинарных последовательностей,

которые не имеют конечного периода, но обладают регулярной структурой, воспроизводящей себя при рассмотрении фрагментов различной длины [5]. Это соответствует пограничной ситуации между порядком и хаосом, в силу чего можно ожидать разнообразной и интересной феноменологии, в частности, возникновения критических явлений. Благодаря самоподобию структуры рассматриваемых последовательностей, оказывается возможным привлечь теоретический аппарат, основанный на ренормгрупповом анализе.

В разделе 1 описывается процедура построения бинарных самоподобных последовательностей и приводятся некоторые примеры. В разделе 2 рассматривается ситуация, аналогичная одномерному случайному блужданию броуновской частицы, но с заменой случайного воздействия на бинарную самоподобную последовательность. В разделе 3 вводится характеристическая матрица и характеристический показатель бинарной самоподобной последовательности. В разделе 4 развивается ренормгрупповой анализ задачи об одномерном блуждании и, в зависимости от характера порождаемых траекторий, выделяются три класса бинарных самоподобных последовательностей. В разделе 5 обсуждается задача о мультипликативном воздействии бинарных самоподобных последовательностей на нелинейное модельное отображение, которое в отсутствие воздействия демонстрирует бифуркацию вилки.

## 1. Правила построения и примеры бинарных самоподобных последовательностей

Рассмотрим итерационную процедуру построения бинарной самоподобной последовательности. Пусть имеется некоторый набор нулей и единиц и правило подстановки, ставящее в соответствие каждому из этих символов блок, который также состоит из нулей и единиц. Один шаг построения состоит в замене всех символов последовательности на соответствующие блоки, в результате чего получается новая последовательность. При многократном повторении этой процедуры в пределе получим последовательность, которая обладает свойством самоподобия. Например, используя правило

$$0 \rightarrow 0100, \quad 1 \rightarrow 1011 \quad (1.1)$$

и стартуя с символа 0, получим последовательность, начальный фрагмент которой 0100101101000100...

Правило подстановки в общем виде можно записать следующим образом:

$$0 \rightarrow \eta_{00} \eta_{01} \eta_{02} \dots \eta_{0m_0-1}, \quad 1 \rightarrow \eta_{10} \eta_{11} \eta_{12} \dots \eta_{1m_1-1}, \quad (1.2)$$

где  $\eta_{ij}$  обозначает 0 или 1, числа  $m_0$  и  $m_1$  определяют количество символов в блоках подстановки. Целесообразно исключить из рассмотрения такие правила, в которых  $\eta_{00}=1$ ,  $\eta_{10}=0$ . Тогда при многократном повторении правила подстановки в пределе получится вполне определенный результат. Действительно, возникший на некотором шаге построения набор символов сохраняется на следующих шагах в качестве начального участка последовательности.

Заметим, что для каждого правила можно построить правило двукратной подстановки, которое порождает ту же последовательность, что и исходное. Для этого нужно заменить символы в блоках на сами эти блоки. Например, для (1.1) правило двукратной подстановки таково:

$$0 \rightarrow 0100 \ 1011 \ 0100 \ 0100, \quad 1 \rightarrow 1011 \ 0100 \ 1011 \ 1011.$$

Рассмотрим некоторые известные примеры бинарных самоподобных последовательностей [5].

Если итерировать логистическое отображение

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2,$$

стартуя с  $x_0=0$  при значении параметра  $\mu=1.401155189 \dots$  (точка накопления бифуркаций удвоения периода) и выписывать 0, если  $x < 0$ , и 1, если  $x > 0$ , то получим последовательность 101110101011101110... Как нетрудно проверить, она воспроизводит себя при использовании правила подстановки

$$1 \rightarrow 10, \quad 0 \rightarrow 11, \quad (1.3)$$

или правила двукратной подстановки

$$1 \rightarrow 1011, \quad 0 \rightarrow 1010. \quad (1.4)$$

Другая известная самоподобная бинарная последовательность возникает при описании динамики популяции кроликов, которую рассматривал еще Фибоначчи. Пусть имеется пара молодых кроликов, которая через год вырастает и дает потомство – еще одну пару молодых кроликов. Взрослые пары дают потомство каждый год, и кролики живут вечно. Обозначим молодую пару символом 0, а взрослую – символом 1. Используя правило подстановки

$$0 \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow 10, \quad (1.5)$$

находим последовательность 101101011011010101... Она же получается при использовании правила двукратной подстановки

$$0 \rightarrow 10, \quad 1 \rightarrow 101. \quad (1.6)$$

Еще одним примером служит последовательность Морса – Туэ, элементы которой суть суммы по модулю 2 цифр двоичного представления натуральных чисел: 0110100110010110100... Эта последовательность строится с помощью правила подстановки

$$0 \rightarrow 01, \quad 1 \rightarrow 10. \quad (1.7)$$

## 2. Задача об одномерном блуждании под действием самоподобных бинарных последовательностей

Классическая задача об одномерном блуждании броуновской частицы под действием бинарного шума описывается уравнением

$$x_{n+1} = x_n + \xi_n,$$

где  $\xi_n$  – случайная переменная, принимающая в каждый момент дискретного времени  $n$  одно из двух значений  $a$  или  $b$  с определенными вероятностями.

Рассмотрим аналогичную постановку задачи, когда воздействие на частицу задается некоторой бинарной самоподобной последовательностью  $\zeta_n$ :

$$x_{n+1} = x_n + \xi_n, \quad (2.1)$$

где

$$\xi_n = \begin{cases} a, & \text{если } \zeta_n = 0, \\ b, & \text{если } \zeta_n = 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Величины  $a$  и  $b$  можно рассматривать как управляющие параметры задачи о блуждании частицы. Условием отсутствия направленного дрейфа является соотношение

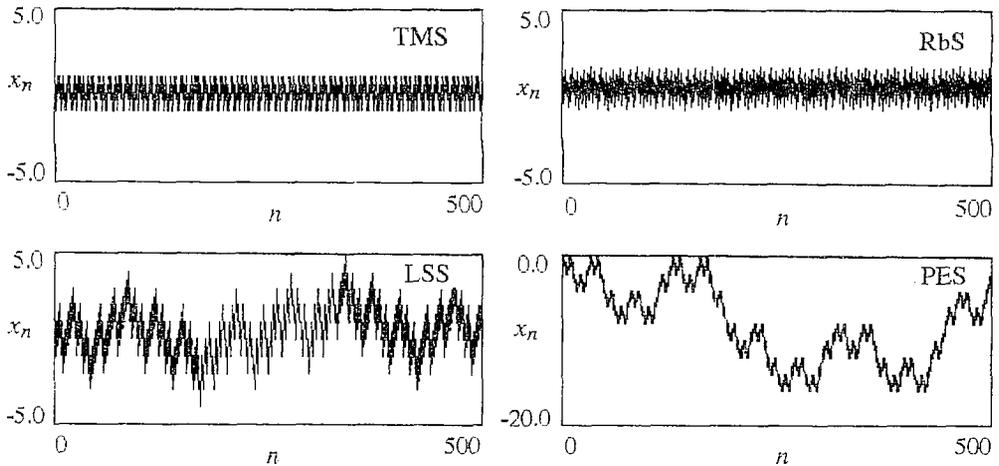


Рис. 1. Зависимость от времени динамической переменной  $x_n$  для частицы, совершающей одномерное блуждание при воздействии различных последовательностей. Во всех случаях  $b = 1$ , значение  $a$  выбрано так, чтобы  $\langle \xi_n \rangle = 0$

$$\langle \xi_n \rangle = ap_0 + bp_1 = 0, \quad (2.3)$$

где  $p_0$  и  $p_1$  — частоты появления в последовательности  $\zeta_n$  символов 0 и 1, соответственно.

На рис. 1 представлены диаграммы, иллюстрирующие одномерное блуждание частицы под действием последовательностей, обсуждавшихся в разделе 1. Из рисунка видно, что качественно различаются диаграммы трех типов:

(I) блуждания в ограниченной области (при воздействии последовательности Морса – Туэ, TMS (1.7), и кроликов, RbS, (1.5));

(II) траектория ограничена, но имеет фрактальный вид (для логистической сигнум последовательности, LSS, (1.3));

(III) неограниченная траектория фрактального вида (для последовательности PES (1.1), «Positive Exponent Sequence», обладающей положительным характеристическим показателем, см. раздел 3).

Замечательно, что и для других бинарных самоподобных последовательностей в задаче об одномерном блуждании наблюдаются эти же три типа поведения.

### 3. Характеристическая матрица бинарных самоподобных последовательностей

Прежде чем продолжать анализ задачи об одномерном блуждании, введем некоторые понятия и характеристики бинарных самоподобных последовательностей.

Определим матрицу

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} \\ s_{10} & s_{11} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

элементы которой  $s_{00}$  и  $s_{01}$  задают, соответственно, количество нулей и единиц в блоке, подставляемом вместо 0, а  $s_{10}$  и  $s_{11}$  — в блоке, подставляемом вместо 1. Очевидно, матрица  $\mathbf{S}$  определяет закон эволюции числа нулей и единиц в бинарной последовательности при ее построении. Если на  $k$ -ом шаге эти числа обозначить  $N_k^{(0)}$ ,  $N_k^{(1)}$ , то имеем

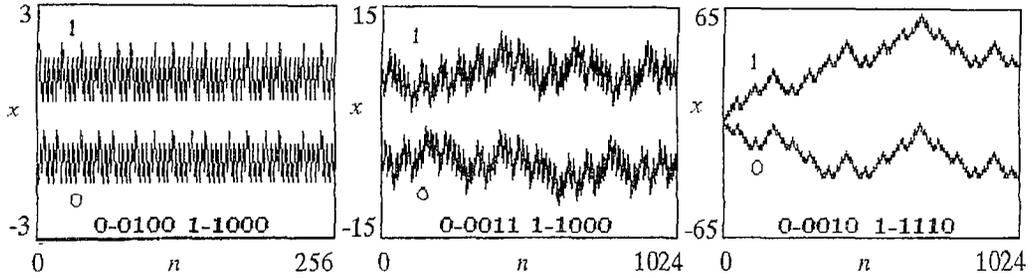


Рис. 2. Одномерное блуждание частицы при воздействии бинарных самоподобных последовательностей разных классов, построенных начиная с 0 (нижние кривые) и с 1 (верхние кривые). Правила приведены на рисунках. Слева класс I ( $\Lambda < 0$ ), в центре класс II ( $\Lambda = 0$ ), справа класс III ( $\Lambda > 0$ ). Значения управляющих параметров  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношению (2.3)

$$N_{k+1}^{(0)} = N_k^{(0)}s_{00} + N_k^{(1)}s_{10},$$

$$N_{k+1}^{(1)} = N_k^{(0)}s_{01} + N_k^{(1)}s_{11}$$

или

$$(N_{k+1}^{(0)}, N_{k+1}^{(1)}) = (N_k^{(0)}, N_k^{(1)})\mathbf{S}. \quad (3.2)$$

Заметим, что оба собственных числа матрицы  $\mathbf{S}$  вещественные\*. Первое из них  $\lambda_1$  всегда больше единицы; это не что иное как фактор увеличения общего числа символов в последовательности за один шаг построения. Соответствующий этому собственному числу левый собственный вектор  $(p_0, p_1)$  задает частоты появления в последовательности символов 0 и 1.

Для выяснения смысла второго собственного числа  $\lambda_2$ , выразим  $N_k^{(0)}$  и  $N_k^{(1)}$  через начальные значения  $N_0^{(0)}$  и  $N_0^{(1)}$

$$N_k^{(i)} = p_i(\lambda_1)^k G_1(N_0^{(0)}, N_0^{(1)}) + q_i(\lambda_2)^k G_2(N_0^{(0)}, N_0^{(1)}), \quad i = 0, 1, \quad (3.3)$$

где  $q_0$  и  $q_1$  — компоненты левого собственного вектора, отвечающего  $\lambda_2$ , а коэффициенты  $G_1$  и  $G_2$  зависят от  $N_0^{(0)}$  и  $N_0^{(1)}$ . Рассмотрим взвешенную сумму  $N_k^{(\Sigma)} = \alpha N_k^{(0)} + \beta N_k^{(1)}$ , где величины  $\alpha$  и  $\beta$  подобраны так, чтобы исключить собственный вектор  $p_0, p_1$ :

$$N_k^{(\Sigma)} = (\alpha q_0 + \beta q_1) G_{2i}(\lambda_2)^k, \quad (3.4)$$

$$\alpha p_0 + \beta p_1 = 0.$$

Очевидно, что такой выбор  $\alpha$  и  $\beta$  совпадает с условием отсутствия направленного дрейфа в задаче об одномерном блуждании. Введем в рассмотрение характеристический показатель бинарной самоподобной последовательности

$$\Lambda = \ln \lambda_2. \quad (3.5)$$

Если  $\Lambda < 0$ , то в асимптотике  $k \rightarrow \infty$  взвешенная сумма  $N_k^{(\Sigma)}$  не зависит от выбора стартового набора и стремится к нулю. Когда  $\Lambda > 0$ , количество нулей и единиц в последовательности будет существенно разным в зависимости от выбора начальных условий. Случай  $\Lambda = 0$  отвечает промежуточной, критической ситуации.

На рис. 2 показано блуждание частицы при воздействии

\* Не нарушая общности, можно ограничиться рассмотрением матриц с положительными собственными числами. В противном случае можно перейти к правилу двукратной подстановки. Это соответствует возведению матрицы  $\mathbf{S}$  в квадрат, так что собственные числа новой матрицы заведомо будут положительны.

последовательностей, заданных некоторыми идентичными правилами, но построенных, начиная с разных стартовых символов – 0 и 1. Видно, что в случае  $\Lambda > 0$  траектория существенным образом зависит от выбора стартового символа.

В известном смысле,  $\Lambda$  – величина, аналогичная классическому показателю Ляпунова.

В заключение этого раздела выпишем матрицы  $S$ , собственные числа и характеристические показатели для последовательностей, рассмотренных выше в качестве примеров.

$$\text{TMS (1.7):} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (2, 0), \quad \Lambda = -\infty, \quad (3.6)$$

$$\text{RbS (1.6):} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (3 \pm 5^{1/2})/2, \quad \Lambda \approx -0.962, \quad (3.7)$$

$$\text{LSS (1.4):} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (4, 1), \quad \Lambda = 0, \quad (3.8)$$

$$\text{PES (1.1):} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = (4, 2), \quad \Lambda \approx 0.693. \quad (3.9)$$

Для логистической сигнум последовательности и последовательности кроликов здесь использованы правила двукратной подстановки.

#### 4. Ренормгрупповой анализ задачи об одномерном блуждании под действием самоподобных бинарных последовательностей

Самоподобная бинарная последовательность  $\zeta_n$  построена из блоков  $\eta_{00}\eta_{01}\eta_{02}\dots\eta_{0m_0-1}$  и  $\eta_{10}\eta_{11}\eta_{12}\dots\eta_{1m_1-1}$ , при замене которых на соответствующие символы 0 и 1 получается та же самая последовательность. В контексте задачи об одномерном блуждании такая замена соответствует перенормировке времени на  $\lambda_1$ , то есть на первое собственное число характеристической матрицы  $S$ . Используя эту особенность структуры последовательностей, можно развить ренормгрупповой анализ задачи об одномерном блуждании.

Занумеруем блоки индексом  $l$ . Тогда блок с номером  $l$  будет иметь длину  $m_{\zeta_l}$ . Протерировав отображение (2.1) вдоль этих блоков, получим перенормированное уравнение

$$x'_{l+1} = x'_l + \xi'(\zeta_l), \quad (4.1)$$

в котором в качестве дискретного времени фигурирует индекс  $l$ . Один шаг по  $l$  соответствует  $m_{\zeta_l}$  шагам исходного времени  $n$ . Переменная  $\xi'(\zeta_l)$  принимает значения  $a'$  и  $b'$ , которые связаны с  $a$  и  $b$

$$\begin{aligned} a' &= s_{00}a + s_{01}b \\ b' &= s_{10}a + s_{11}b \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

где  $S$  – характеристическая матрица последовательности  $\zeta_n$ .

Условие отсутствия направленного дрейфа (2.3) означает, что вектор параметров  $(a, b)$  является правым собственным вектором матрицы  $S$  с собственным числом  $\lambda_2$ . Считая, что это условие выполняется, из (4.2) получаем

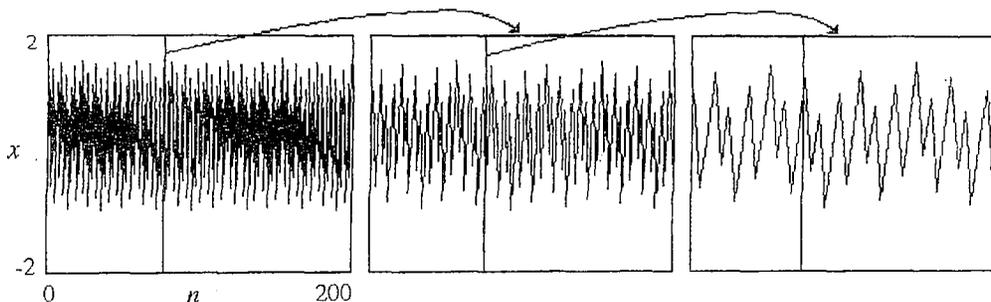


Рис. 3. Перенормировка траектории частицы, описываемой уравнением (2.1), находящейся под действием последовательности кроликов (1.5). Фактор пересчета по оси  $n$   $\lambda_1=2.618$ , по оси  $x$  пересчета нет

$$a' = \lambda_2 a, \quad b' = \lambda_2 b. \quad (4.3)$$

Заменой  $x'_j = \lambda_2 x_j$  отображение (4.1) можно привести к исходному виду (2.1). Учитывая, что  $l \sim n/\lambda_1$ , получаем для динамической переменной скейлинговое соотношение

$$x_{\lambda_1 n} = \lambda_2 x_n. \quad (4.4)$$

Если  $0 \leq \lambda_2 < 1$ , то есть  $\Lambda < 0$ , то частица движется в ограниченной области, поскольку, в силу (4.4), размах ее траектории к моменту времени  $(\lambda_1 n)$  не может быть больше, чем он был в момент  $n$ . Траектория не обладает самоподобием (см. рис. 3, который относится к случаю воздействия последовательности кроликов).

Когда  $\lambda_2 = 1$ , то есть  $\Lambda = 0$ , движение частицы, также как и в предыдущем случае, ограничено. При этом траектория обладает свойством самоподобия (скейлинга) – см. рис. 4.

Наконец, при  $\lambda_2 > 1$  имеем  $\Lambda > 0$ , поэтому из (4.4) следует, что при блуждании под действием такой последовательности размах траектории нарастает со временем (рис. 5).

Таким образом, мы приходим к определению трех классов бинарных самоподобных последовательностей, отвечающих качественно различному поведению в задаче об одномерном блуждании:

I класс, докритический –  $\Lambda < 0$ , к этому классу относятся последовательности Морса – Туэ и кроликов;

II класс, критический –  $\Lambda = 0$ , к нему относится логистическая сигнум-последовательность;

III класс, закритический –  $\Lambda > 0$ , сюда относится последовательность, задаваемая правилом (1.1).

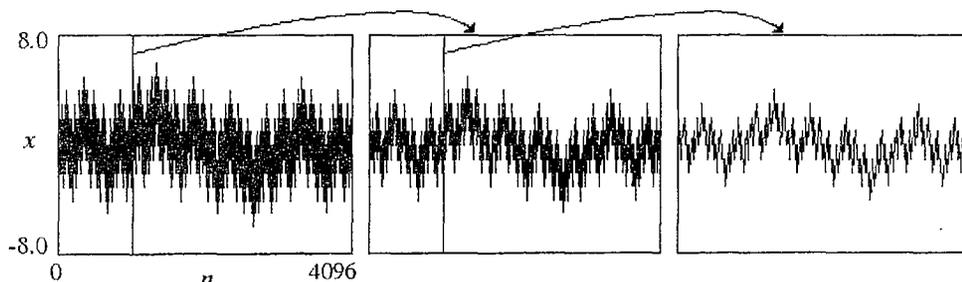


Рис. 4. Перенормировка траектории частицы (2.1), находящейся под действием логистической сигнум последовательности (1.3). Фактор пересчета по оси  $n$   $\lambda_1=4$ , по оси  $x$   $\lambda_2=1$

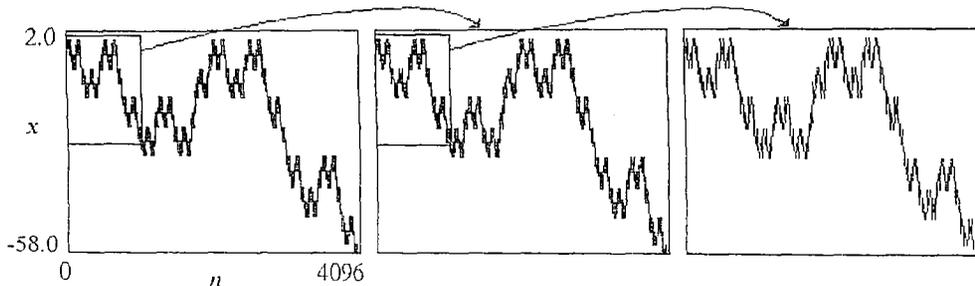


Рис. 5. Перенормировка траектории частицы (2.1), находящейся под действием последовательности (1.1). Фактор пересчета по оси  $n$   $\lambda_1=4$ , по оси  $x$   $\lambda_2=2$

В первый класс естественно включить также периодические бинарные последовательности. Действительно, любую такую последовательность можно задать правилом типа (1.2), у которого блоки подстановок для 0 и 1 совпадают. В этом случае характеристическая матрица имеет две одинаковые строки и, следовательно,  $\lambda_2=0$ .

### 5. Динамика нелинейного модельного отображения, демонстрирующего бифуркацию вилки, под воздействием самоподобной бинарной последовательности

Рассмотрим далее модельное отображение

$$x_{n+1} = \xi x_n / (1 + x_n^2)^{1/2}, \quad (5.1)$$

которое при значениях параметра  $\xi < 1$  имеет в качестве аттрактора точку  $x^*=0$ . При  $\xi=1$  эта точка теряет устойчивость, и происходит бифуркация вилки («pitch-fork»). При  $\xi > 1$  имеются две симметрично расположенные неподвижные точки  $x^* = \pm(\xi^2 - 1)^{1/2}$  (рис. 6).

Пусть теперь система (5.1) находится под внешним мультипликативным воздействием, то есть вместо параметра  $\xi$  в (5.1) фигурирует переменная величина  $\xi_n$ . Динамика системы (5.1) с различным по характеру воздействием такого типа рассматривалась в работах [6–8]. В работе [8] обсуждалась ситуация, когда  $\xi_n$  меняется во времени по закону логистической сигнум последовательности. Здесь мы обратимся к более общему случаю, когда изменение во времени  $\xi_n$  задается

произвольной бинарной самоподобной последовательностью. С этой целью рассмотрим модельное уравнение следующего вида:

$$x_{n+1} = \xi_n x_n / (1 + x_n^2)^{1/2}, \quad (5.2)$$

$$\xi_n = \begin{cases} a, & \text{если } \zeta_n=0, \\ b, & \text{если } \zeta_n=1, \end{cases} \quad (5.3)$$

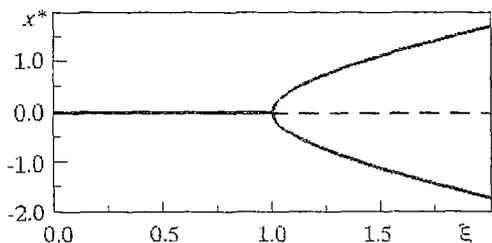


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма системы (5.1). По горизонтальной оси отложен управляющий параметр  $\xi$ , по вертикальной – положение устойчивой неподвижной точки отображения (5.1): при  $\xi < 1$   $x^*=0$ , при  $\xi > 1$   $x^* = \pm(\xi^2 - 1)^{1/2}$

где  $\zeta_n$  – бинарная самоподобная последовательность, а величины  $a$  и  $b$  выступают в качестве управляющих параметров.

Заметим, что фигурирующая в

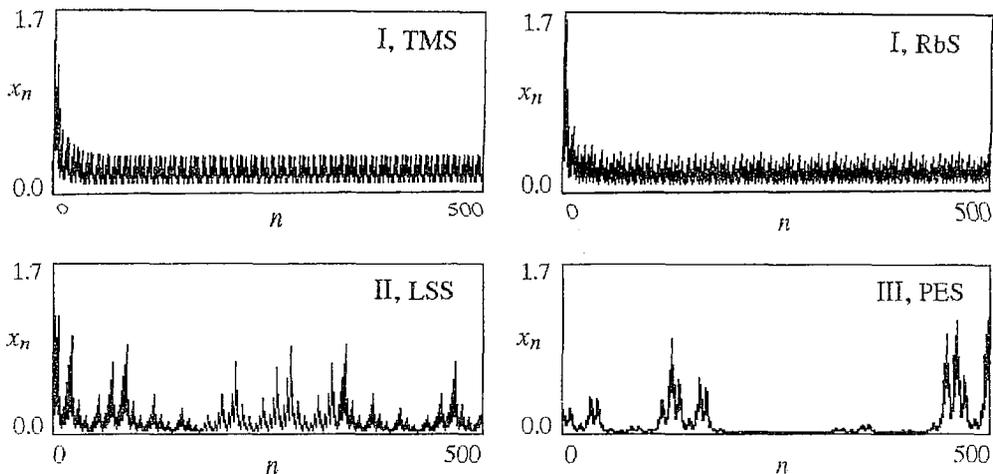


Рис. 7. Зависимость от времени динамической переменной  $x_n$  системы (5.2) в закритической области при воздействии различных бинарных самоподобных последовательностей: TMS – ( $a=0.52, b=2$ ), класс I; RbS – ( $a=0.34, b=2$ ), класс I; LSS – ( $a=0.26, b=2$ ), класс II; PES – ( $a=0.52, b=2$ ), класс III

(5.2) нелинейная функция обладает тем свойством, что если  $F_1(x)=A_1x/(1+x^2)^{1/2}$  и  $F_2(x)=A_2x/(1+x^2)^{1/2}$ , то  $F_1(F_2(x))=A_1A_2x/[1+(1+A_2^2)x^2]^{1/2}$ . Отсюда следует, что бифуркация в системе (5.2) происходит, когда произведение  $\xi_0\xi_1\xi_2\dots\xi_n$  при  $n \rightarrow \infty$  стремится к 1 или, иначе говоря,  $\langle \ln x_n \rangle = 0$ . Это условие бифуркации можно записать так:

$$p_0 \ln a + p_1 \ln b = 0, \quad (5.4)$$

где  $p_0$  и  $p_1$  – частоты появления в последовательности  $\zeta_n$  символов 0 и 1, соответственно.

На рис. 7 показано временное поведение динамической переменной системы (5.2) при воздействии последовательностей различных классов. На рис. 8 приведены соответствующие бифуркационные диаграммы. Вид представленных зависимостей, также как и в задаче об одномерном блуждании, коррелирует с разбиением воздействующих последовательностей на три класса.

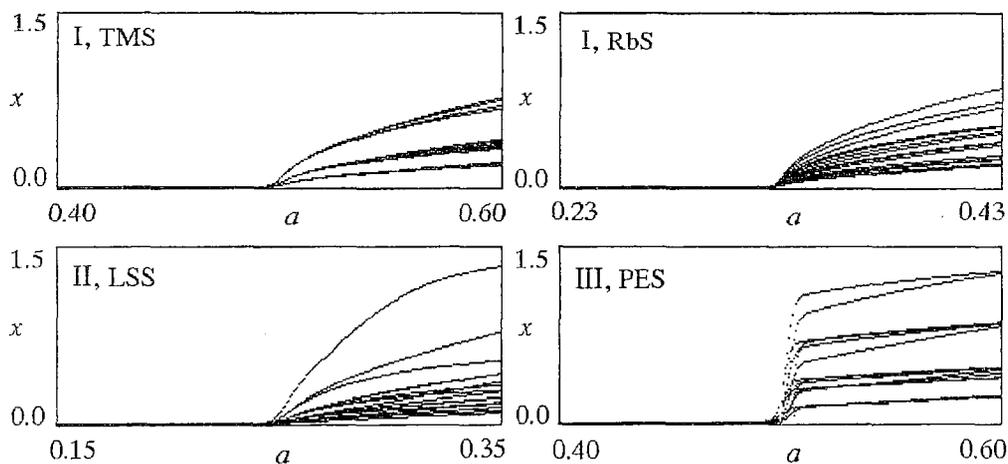


Рис. 8. Бифуркационные диаграммы системы (5.2) при воздействии на нее различных бинарных самоподобных последовательностей: TMS, RbS – класс I; LSS – класс II; PES – класс III. Параметр  $a$  меняется,  $b = 2$  для всех диаграмм

Как видно из рис. 7, при воздействии последовательности третьего класса (1.1) система демонстрирует On-Off перемежаемость: всплески хаотических осцилляций динамической переменной чередуются с протяженными участками, когда она флуктуирует вблизи нуля.

Этот новый вид перемежаемости, описанный в работах [2, 3], возникает в системах, находящихся под мультипликативным воздействием случайного или хаотического процесса. В работе [7] была рассмотрена On-Off перемежаемость в системе (5.2) при воздействии бинарного шума. Теперь мы видим, что этот феномен возможен и при замене шума на бинарную самоподобную последовательность, если она относится к классу III.

Применим к обсуждаемой задаче метод ренормгруппы. Как обычно, его содержание будет состоять в том, чтобы проследить за изменением вида уравнений, описывающих динамику системы на последовательно нарастающих временных интервалах.

Сделаем в (5.2) замену

$$x_n = [\exp(2A_n)/C_n]^{1/2} \quad (5.5)$$

и положим  $A_0=1$ . Тогда получим

$$C_{n+1} = C_n + \exp(2A_n), \quad (5.6)$$

$$A_{n+1} = A_n + \ln \xi_n.$$

Здесь компонента  $C_n$  описывает глобальное поведение исходной переменной  $x_n$ , а  $A_n$  отвечает за ее быстрые осцилляции. При этом динамика подсистемы для переменной  $A_n$  по существу соответствует задаче об одномерном блуждании, рассматривавшейся в разделах 2 и 4.

Как и при анализе системы (2.1), выделим в последовательности  $\xi_n$  блоки подстановки (см. (1.2)) и проитерируем динамические уравнения (5.6) вдоль каждого блока. После  $r$ -го шага этой процедуры перенормировки уравнения сводятся к форме, аналогичной (5.6)

$$C_{n+1} = C_n + \exp(2A_n)H_r(\xi_n), \quad (5.7)$$

$$A_{n+1} = A_n + Q_r(\xi_n),$$

причем для  $H_r(\xi_n)$  и  $Q_r(\xi_n)$  справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} H_{r+1}(0) &= d_{00}H_r(0) + d_{01}H_r(1) \\ H_{r+1}(1) &= d_{10}H_r(0) + d_{11}H_r(1) \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} H_{r+1}(0) \\ H_{r+1}(1) \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} H_r(0) \\ H_r(1) \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} Q_{r+1}(0) &= s_{00}Q_r(0) + s_{01}Q_r(1) \\ Q_{r+1}(1) &= s_{10}Q_r(0) + s_{11}Q_r(1) \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} Q_{r+1}(0) \\ Q_{r+1}(1) \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} Q_r(0) \\ Q_r(1) \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$H_0(\xi) = 1, \quad Q_0(\xi) = \ln(\xi(\xi)).$$

Здесь  $\mathbf{S}$  – характеристическая матрица воздействующей последовательности, а  $\mathbf{D}$  – матрица с элементами

$$d_{\zeta 0} = \sum_{k=0}^{m_{\zeta}^{\zeta}-1} \{(1-\eta_{\zeta k})\exp[2(k-\sigma_{\zeta}(k))Q_r(0) + 2\sigma_{\zeta}(k)Q_r(1)]\}, \quad (5.10)$$

$$d_{\zeta 1} = \sum_{k=0}^{m_{\zeta}^{\zeta}-1} \{\eta_{\zeta k}\exp[2(k-\sigma_{\zeta}(k))Q_r(0) + 2\sigma_{\zeta}(k)Q_r(1)]\},$$

$$\sigma_{\zeta}(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \eta_{\zeta j}. \quad (5.11)$$

Обратимся к ситуации, когда система находится в критической точке, то есть выполняется условие (5.4). В этом случае соотношения (5.9) и (5.10) преобразуются к виду

$$Q_{r+1}(0) = \lambda_2 Q_r(0), \tag{5.12}$$

$$Q_{r+1}(1) = \lambda_2 Q_r(1),$$

$$d_{\zeta_0} = \sum_{k=0}^{m_{\zeta}-1} [(1 - \eta_{\zeta k}) \exp(F_{\zeta k} \lambda_2^r \ln a)], \tag{5.13}$$

$$d_{\zeta_1} = \sum_{k=0}^{m_{\zeta}-1} [\eta_{\zeta k} \exp(F_{\zeta k} \lambda_2^r \ln a)],$$

где

$$F_{\zeta k} = 2[k - \sigma_{\zeta}(k)(s_{01} + s_{10})/s_{01}].$$

Обсудим, каким образом характер бифуркации в системе (5.2) определяется классом воздействующей на нее последовательности.

Если внешнее воздействие вообще отсутствует, то в точке бифуркации зависимость динамической переменной от времени имеет степенной характер. Действительно, преобразовав (5.1) при  $\xi=1$  к виду  $1/(x_{n+1})^2 = 1/(x_n)^2 + 1$ , получаем, что  $x_n \sim n^{\gamma}$ , где  $\gamma = -1/2$  можно трактовать как критический индекс.

Пусть последовательность  $\zeta_n$  принадлежит классу I, то есть  $0 \leq \lambda_2 < 1$ . Тогда, как видно из формулы (5.13), при  $r \rightarrow \infty$  матрица **D** стремится к характеристической матрице **S**. Это означает, что в асимптотике  $C_n \sim n$ . С ростом  $r$  функция  $Q_r(\zeta)$  стремится к нулю (см. (5.12)), поэтому  $A_n \rightarrow \text{const}$ . Следовательно, критическое затухание динамической переменной  $x_n$  описывается степенным законом  $x_n \propto n^{-1/2}$ , что аналогично ситуации, когда воздействие отсутствует.

Пусть теперь имеем последовательность класса II, то есть  $\lambda_2 = 1$ . В этом случае матрица **D** не меняется с ростом  $r$ , и при этом ее элементы зависят от значения управляющего параметра  $a$  (см. (5.13)). Фактически, в силу (5.4), можно говорить о зависимости матрицы **D** от положения системы на критической линии в плоскости параметров  $(a, b)$ . Это означает, что асимптотическое поведение компоненты  $C_n$  характеризуется зависимостью от параметра  $a$ . При этом  $A_n \sim \text{const}$ , так как функция  $Q_r(\zeta)$  не меняется при перенормировке (см. (5.12)). Следовательно, затухание динамической переменной  $x_n$  описывается критическим индексом, который является функцией управляющего параметра системы.

В случае воздействия последовательности класса III  $\lambda_2 > 1$ , элементы матрицы **D** с ростом  $r$  либо нарастают, либо стремятся к нулю, что определяется знаками  $F_{\zeta k}$  в формуле (5.13). При этом закон затухания динамической переменной  $x_n$  в критической точке не является степенным.

Проведенные рассуждения о характере критического поведения иллюстрирует рис. 9, где в двойном логарифмическом масштабе показана

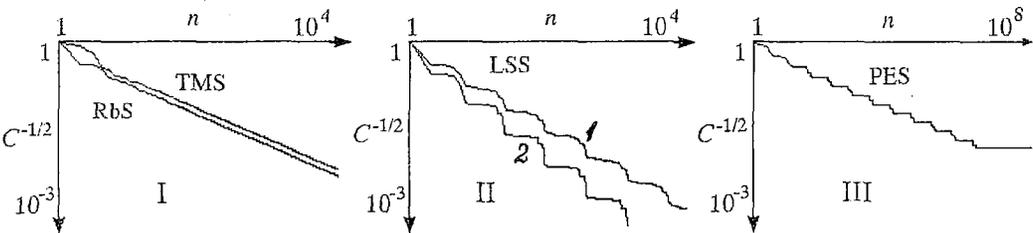


Рис. 9. Зависимость от времени компоненты системы (5.6) в критической точке при разных видах воздействия. Критический индекс для последовательности Морса – Туэ:  $-0.50$  ( $a = 0.50, b = 2.00$ ); для последовательности кроликов:  $-0.50$  ( $a=0.33, b=2.00$ ); для логистической сигнум последовательности, кривая 1:  $-0.70$  ( $a=0.25, b=2.00$ ), кривая 2:  $-0.76$  ( $a=0.11, b=3.00$ ); для последовательности (1.1) критический индекс не определен ( $a=0.50, b=2.00$ )

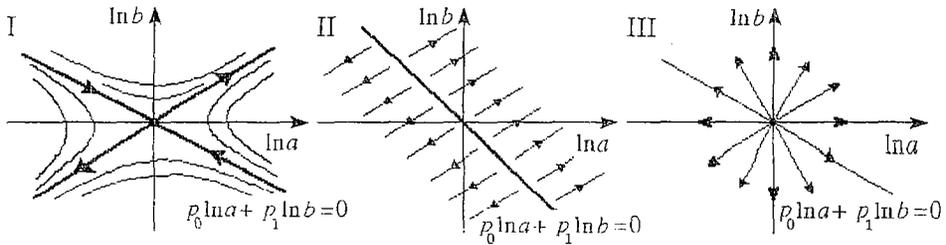


Рис. 10. Изменения характера бифуркации в системе (5.2), находящейся под действием бинарных самоподобных последовательностей. Класс I,  $0 \leq \lambda_2 < 1$ : критическая линия – устойчивая сепаратриса седла. Класс II,  $\lambda_2 = 1$ : критическая линия – континуум неустойчивых неподвижных точек. Класс III,  $\lambda_2 > 1$ : критическая линия не имеет специальных свойств

зависимость медленно меняющейся компоненты  $C_n^{-1/2}$  от времени для системы (5.6) при воздействии последовательностей разных классов. В случае воздействия последовательностей класса I линии всегда имеют наклон  $(-1/2)$ , который равен критическому показателю спада динамической переменной. Для воздействия последовательностей класса II наклон отличается от классического значения  $(-1/2)$  и определяется величиной управляющего параметра. Наконец, при воздействии последовательностей класса III наклон не определен.

Наблюдаемое изменение характера перехода в системе (5.2) при движении по параметру  $\lambda_2$  от класса I к классу III может быть интерпретировано как бифуркация в уравнениях ренормгруппы. Для этого обратимся к фазовым портретам уравнения ренормгруппы (5.9), показанным на рис. 10. При воздействии последовательностей класса I имеем единственную неподвижную точку на фазовой плоскости ( $a=1, b=1$ ). Это седло, устойчивой сепаратрисой которого является критическая линия (5.4). При воздействии последовательностей класса II условие критичности (5.4) определяет инвариантное множество на фазовой плоскости уравнения (5.9) – линию, составленную из неустойчивых неподвижных точек. Наконец, воздействию последовательности класса III соответствует фазовый портрет, на котором единственная неподвижная точка ( $a=1, b=1$ ) представляет собой неустойчивый узел.

Точке бифуркации отвечает случай, когда  $\lambda_2 = 1$ , то есть воздействующая последовательность принадлежит ко второму классу. В этой точке переход в системе (5.2) характеризуется «неклассическим» критическим индексом – показателем степенного закона затухания во времени, величина которого зависит от управляющего параметра. «Классическим» критическим индексом в этой трактовке служит величина  $(-1/2)$ , отвечающая воздействию последовательностей первого класса. Заметим, что ранее бифуркация в уравнениях ренормгруппы была описана в работе [9], где рассматривалось воздействие фрактального сигнала на систему, демонстрирующую каскад удвоений периода.

### Заключение

При анализе задачи об одномерном блуждании частицы под действием толчков, чередующихся во времени по закону бинарной самоподобной последовательности, выяснилось, что все последовательности такого рода распадаются на три класса. В основе классификации лежит различный характер динамики этой частицы: блуждание в ограниченном интервале, фрактальная траектория и неограниченное блуждание.

Изучение воздействия бинарных самоподобных последовательностей на нелинейную систему с бифуркацией вилки («pitch-fork») показало, что характер перехода в такой системе также определяется тем, к какому из введенных трех классов относится воздействующая последовательность. Для класса I критическое

затухание динамической переменной характеризуется показателем  $(-1/2)$ . При воздействии последовательностей класса II система имеет неклассический критический индекс, который зависит от значения управляющего параметра. И наконец, при воздействии последовательности третьего класса критический индекс, характеризующий затухание, не определен. Поведение динамической переменной в критической точке описывается некоторым не степенным законом. При этом в закритической области система демонстрирует режим On-Off перемежаемости.

Если ограничить длину блоков подстановок, которые используются для построения бинарных самоподобных последовательностей, то возникает ограниченный набор вариантов. В каком-то смысле это аналогично ситуации, возникающей при рассмотрении вопроса о классификации клеточных автоматов. Первоначально эмпирическую классификацию клеточных автоматов предложил Wolfram в работе [10]. Затем в работах [11–13] рассматривалась возможность трактовать изменение типа поведения клеточных автоматов как фазовый переход. Идея состояла в том, чтобы для автоматов с заданным количеством соседей и состояний клетки определить некоторый параметр так, чтобы автоматам с разными типами поведения соответствовали определенные области на оси этого параметра. Для клеточных автоматов сделать это до конца не удастся. В то же время, в рассмотренных нами здесь задачах о динамике под действием бинарных самоподобных последовательностей аналогичную программу можно считать вполне реализованной.

Авторы выражают благодарность А. П. Кузнецову за полезное обсуждение.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-02-16414).*

## Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., Pelican S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic // *Physica D*. 1984. Vol. 13. P. 261.
2. Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. On-off intermittency: a mechanism for bursting // *Phys. Rev. Lett.* 1993. Vol. 70. P. 279.
3. Heagy J.F., Platt N., Hammel S.M. Characterization of on-off intermittency // *Phys. Rev.* 1994. Vol. E49. P. 1140.
4. Moss F., Pierson D., O'Gorman D. Stochastic resonance: Tutorial and update // *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*. 1994. Vol. 4. P. 1383.
5. Schroeder M. *Fractal, Chaos, Power Laws*. Freeman & C®. NY. 1991.
6. Kuznetsov S.P., Pikovsky A.S., Feudel U. Birth of strange nonchaotic attractor: renormalization group analysis // *Phys. Rev.* 1995. Vol. E51. P. R1629.
7. Kuznetsov S.P., Kuptsov P.V. Transition to a fractal attractor via on-off intermittency in a model with dichotomous noise // *Proc. of First Int. Conf. UPoN-96*, 3–7 September 1996, Szeged, Hungary.
8. Kuptsov P.V. Critical dynamics of pitch-fork bifurcation in a system driven by a fractal sequence // *Proc. of Int. Conf. ICND-96*, 8–14 July 1996, Saratov, Russia.
9. Кузнецов А.П., Кузнецов С. П., Сатаев И.П. Фрактальный сигнал и динамика систем, демонстрирующих удвоение периода // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1995. Т. 3, № 5. С. 64.
10. Wolfram S. Universality and complexity in cellular automata // *Physica D*. 1984. Vol. 10. P. 1.
11. Langton C.G. Studying artificial life with cellular automata // *Physica D*. 1986. Vol. 22. P. 120.
12. Li W., Packard N., Langton C.G. Transition phenomena in cellular automata rule space // *Physica D*. 1990. Vol. 45. P. 77.

13. Wootters W.K., Langton C.G. Is there sharp phase transition for deterministic cellular automata? // Physica D. 1990. Vol. 45. P. 95.

Саратовский филиал Института  
радиотехники и электроники РАН

Поступила в редакцию 21.03.97

## DYNAMICS OF MODEL SYSTEMS WITH DISCRETE TIME DRIVEN BY BINARY SELF-SIMILAR SEQUENCES

*P.V. Kuptsov, S.P. Kuznetsov*

The dynamics of the 1D walking particle and the map with pitch-fork bifurcation is considered when these model systems are forced by the self-similar sequences of two symbols constructed in accordance with substitution (inflation) rules. All such sequences are found to be divided into three classes which correspond to qualitatively different sorts of observed dynamics. It is shown that the matrix  $2 \times 2$  is associated with the binary self-similar sequence and the one of eigenvalues of this characteristic matrix determines the class to what respective sequence belongs.



*Купцов Павел Владимирович* родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского университета (1994). После окончания университета поступил в аспирантуру на кафедру радиофизики. Область научных интересов – нелинейная динамика, теория критических явлений. Автор 3 научных работ.



*Кузнецов Сергей Петрович* родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Опубликовал свыше 100 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Соавтор двух монографий. В качестве приглашенного профессора в 1995 году читал лекции по нелинейной теории колебаний в Датском техническом университете.