



## ТОНКИЕ ЭФФЕКТЫ САМОПОДОБНОГО ПОВЕДЕНИЯ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ВБЛИЗИ ЛИНИИ БИФУРКАЦИИ РОЖДЕНИЯ ТОРА

А.А. Кипчатов, А.А. Короновский

В работе исследуется кусочно-линейная система с 1.5 степенями свободы, способная демонстрировать двухчастотную динамику без внешнего воздействия. Показано, что поведение этой системы вблизи линии бифуркации рождения тора носит сложный самоподобный характер: на листах синхронизации, сходящихся к линии бифуркации, существуют новые линии бифуркации рождения тора, пересечение которых при движении по плоскости управляющих параметров приводит к появлению новых квазипериодических режимов колебаний и так далее.

Бифуркация рождения двумерного тора из предельного цикла встречается в различных системах и достаточно хорошо изучена (см., например, [1]). Хорошо известно также, что в двухчастотных системах области резонансных колебаний (так называемые языки Арнольда) стягиваются, сужаясь, к линии бифуркации рождения двумерного тора, имеют на этой линии меру нуль и располагаются в определенной последовательности [2]. Несмотря на то, что поведение систем вблизи линии бифуркации рождения двумерного тора из предельного цикла изучено, казалось бы, достаточно подробно, нам при исследовании радиотехнического генератора с 1.5 степенями свободы, описанного в [3, 4], удалось обнаружить новый тонкий механизм поведения языков Арнольда в окрестности этой линии.

Радиотехнический генератор «Торус», предложенный Л. Чуа с соавторами в [3], представляет собой автономную систему с тремя реактивными элементами (рис. 1) и нелинейным элементом (рис. 2), имеющим трехсегментную кусочно-

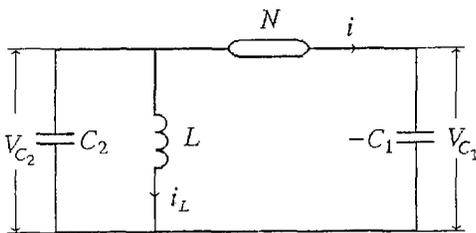


Рис. 1. Эквивалентная схема радиотехнического генератора

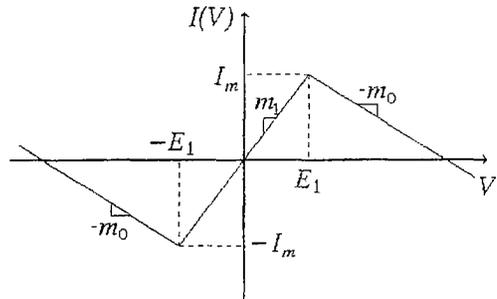


Рис. 2. Вольт-амперная характеристика кусочно-линейного элемента

линейную вольт–амперную характеристику (ВАХ). Генератор описывается тремя безразмерными дифференциальными уравнениями, полученными на основе законов Кирхгофа [5]

$$\begin{aligned} dx_1/d\tau &= (\alpha-1)f(x_1)/\gamma - x_3/\gamma, \\ dx_2/d\tau &= -\alpha f(x_1)/\gamma, \\ dx_3/d\tau &= \gamma(x_1 + x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f(x_1) = -(m_0/m_1)x_1 + 1/2(m_0/m_1 + 1)[|x_1 + 1| - |x_1 - 1|]$  – безразмерная кусочно–линейная ВАХ;  $m_0/m_1 = 1/2$ ;  $\alpha$  и  $\gamma$  – управляющие параметры. Замечательным свойством генератора «Торус» является возможность возникновения в нем двухчастотной динамики без внешнего периодического воздействия при минимальном необходимом для этого числе степеней свободы. При этом, несмотря на предельную простоту самой системы, ее поведение в пространстве управляющих параметров оказывается довольно сложным из–за существенной неоднозначности режимов. Нетривиальным свойством этого генератора является «жесткий» характер рождения второй частоты в системе, влекущий за собой гистерезис вблизи линии бифуркации и значительно искажающий привычную картину расположения кловов синхронизации. Поведение этого генератора было детальным образом исследовано в [4] как экспериментально, на радиотехнической модели, так и численно, по семейству однопараметрических бифуркационных диаграмм, в результате чего построены подробные многолистные двух–параметрические карты режимов на плоскости управляющих параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  (параметр диссипации и параметр соотношения собственных частот). В общих чертах было выяснено также и поведение листов синхронизации вблизи линии рождения двумерного тора ( $\alpha \approx 1$ ), где языки Арнольда «нависают» друг над другом, что ведет к возникновению сложной мультистабильности и существенно затрудняет понимание поведения рассматриваемой системы.

Для более детального изучения динамики системы вблизи линии бифуркации рождения двумерного тора с неоднозначным гистерезисным поведением необходим качественно иной метод исследования, нежели поиск бифуркационных значений параметров при прямом численном интегрировании уравнений (1), или нахождение этих значений из эксперимента. Такой метод анализа бифуркаций, возможный для кусочно–линейных систем, к которым относится генератор «Торус», был предложен в работе [6] для другой хорошо известной кусочно–линейной системы – генератора типа «двойная спираль» (см., например, [7–9]).

Суть этого метода заключается в использовании линейности системы между переключениями генератора с одного участка ВАХ на другой, что позволяет от системы обыкновенных дифференциальных уравнений перейти к системе алгебраических уравнений, связывающих между собой моменты времени переключения генератора на различные участки кусочно–линейной ВАХ. Таким образом, для периодических решений поведения генератора может быть сведен к линейной теории устойчивости Флоке, что позволяет, во–первых, аналитически<sup>1</sup> определить, существует ли искомое периодическое решение в заданной области управляющих параметров, и, во–вторых, определить тип бифуркации периодического решения при потере им устойчивости.

Формализм нахождения мультипликаторов периодических решений из системы уравнений, описывающих генератор «Торус», развит в [5]. Основываясь на нем и анализируя поведение системы по поведению ее мультипликаторов при изменении управляющих параметров, в настоящей работе проведено детальное исследование бифуркационной картины генератора «Торус» вблизи линии бифуркации рождения двумерного тора.

<sup>1</sup> Если удастся аналитически решить систему алгебраических уравнений. В противном случае требуется численное решение.

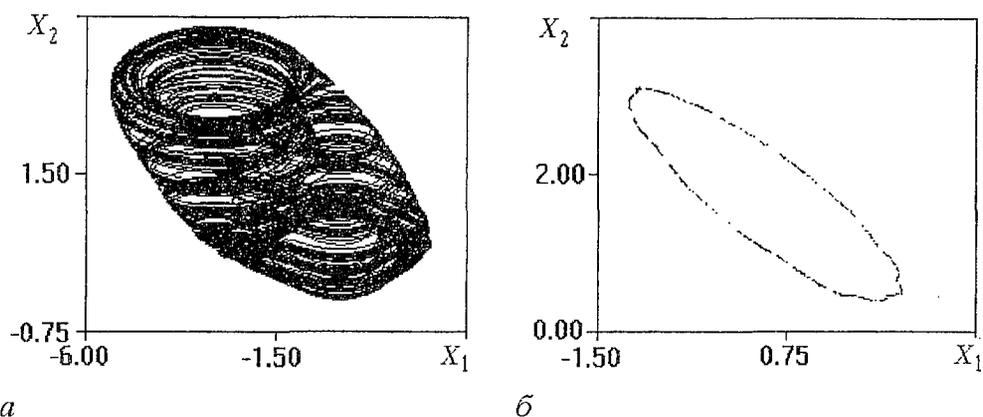


Рис. 3. Двумерный тор, рожденный на базе предельного цикла при  $\alpha=3.5$ ,  $\gamma=5.5$ : *a* – фазовый портрет; *б* – сечение Пуанкаре

Стартуя из области, где реализуется однооборотный предельный цикл ( $\alpha < 1$ ), найдем характер бифуркации, возникающей при увеличении  $\alpha$ . В соответствии с [5], мультипликаторы периодического режима уверенно находятся из довольно простой системы нелинейных алгебраических уравнений. Как и следовало ожидать, в этой ситуации пара комплексно-сопряженных мультипликаторов  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  выходят за единичную окружность, подтверждая рождение в системе второй частоты. Прямое численное интегрирование системы (1), сведенной заменой переменных к безразмерному виду [4], методом Рунге–Кутты четвертого порядка дает характерный для квазипериодической динамики двумерный тор, изображенный на рис. 3. Однако, как уже отмечалось выше, линия бифуркации рождения тора, разделяющая периодический и квазипериодический режимы, носит гистерезисный характер. Картина квазипериодического поведения, известная, например, по отображению окружности на себя и состоящая из характерных клвов синхронизации, сходящихся к линии бифуркации рождения тора, существенно искажена. В рассматриваемом генераторе бифуркация рождения двумерного тора носит суперкритический характер – возникновение второй частоты происходит «жестким путем» и система оказывается в области перекрытия клвов синхронизации (как в отображении окружности на себя при  $k > 1$ ). Вероятность попадания на участок квазиопериодики становится очень малой, так как возникает структура широких перекрывающихся резонансных клвов, описанная в [4], и в системе реализуется один из периодических режимов, например, режим  $1/8$ , изображенный на рис. 4. При выходе из области двухчастотной динамики имеет место гистерезис, и резонансные клвы нависают над линией бифуркации рождения тора, найденной при входе в эту область.

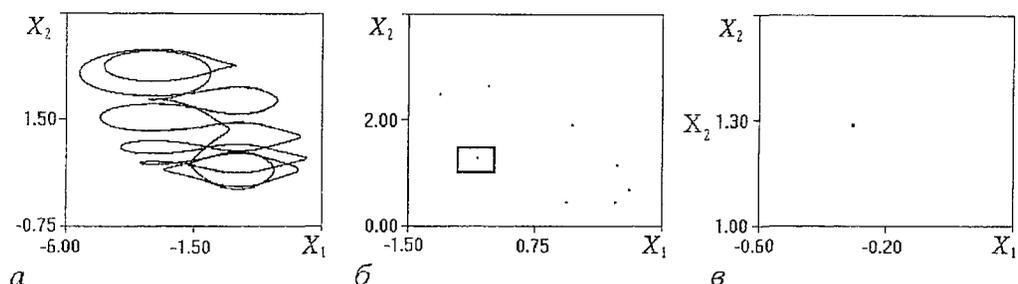


Рис. 4. Режим, соответствующий листу синхронизации периода 8 при  $\alpha=1.05$ ,  $\gamma=2.5$ : *a* – фазовый портрет; *б* – сечение Пуанкаре; *в* – фрагмент сечения Пуанкаре

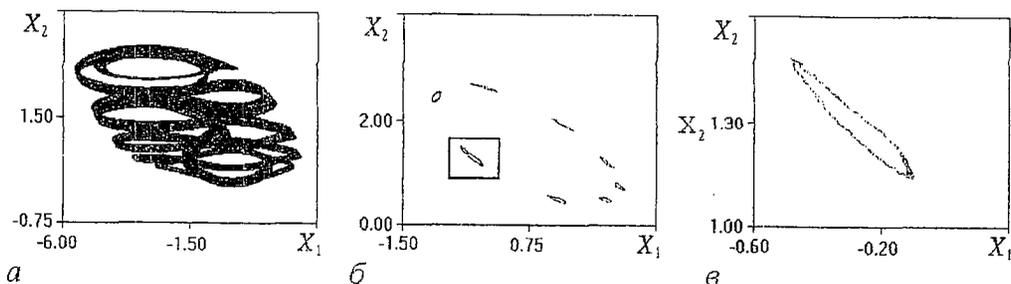


Рис. 5. Двумерный тор, рожденный на базе периода 8 при  $\alpha=1.00$ ,  $\gamma=2.50$ : а – фазовый портрет; б – сечение Пуанкаре; в – фрагмент сечения Пуанкаре

Для анализа особенностей выхода из клювов синхронизации рассмотрим поведение мультипликаторов этих периодических режимов. Для сложнопериодического режима, существующего на клюве синхронизации с числом вращения  $\rho=1/8$ , система нелинейных уравнений в соответствии с методикой [5] будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 & [\Omega(t_{i+1}, s_i)K(t_i, s_i) + K(t_{i+1}, s_{i+1})] \mathbf{h}_2 = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, 9 \\
 & \Omega(t_{11}, s_{10})K(t_{10}, s_{10}) \mathbf{h}_2 - K(t_{11}, s_{11}) \mathbf{h}_1 = \mathbf{0}, \\
 & [\Omega(t_{i+1}, s_i)K(t_i, s_i) - K(t_{i+1}, s_{i+1})] \mathbf{h}_1 = \mathbf{0}, \quad i = 11, 12 \\
 & \Omega(t_1, s_{13})K(t_{13}, s_{13}) \mathbf{h}_1 + K(t_1, s_1) \mathbf{h}_2 = \mathbf{0},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\mathbf{h}_2 = (-1, 1, 1)^T$  (остальные обозначения см. в [5]). Как нетрудно видеть, (2) содержит 26 независимых нелинейных уравнений относительно 26 неизвестных  $t_i, s_i$  ( $i=1, \dots, 13$ ). Решение вышеописанных систем уравнений проводилось численно с использованием гибридного метода: внешние итерации осуществлялись по Зейделю, внутренние – по Ньютону [10].

При уменьшении параметра  $\alpha$  мультипликаторы  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  оказываются парой комплексно сопряженных величин, которые выходят на единичную окружность при  $\alpha \approx 1$ . Таким образом, выяснилось, что при пересечении линии  $\alpha \approx 1$  (в этом случае параметр  $\alpha$  уменьшается) пара комплексно-сопряженных мультипликаторов режима, соответствующего листу синхронизации на двумерном торе, выходит за единичную окружность на комплексной плоскости. Это соответствует, опять-таки, рождению двумерного тора, но уже на базе режима, существующего на листе синхронизации. Прямое численное интегрирование системы (1) с найденными управляющими параметрами подтвердило возникновение нового квазипериодического движения на базе клюва синхронизации, характеризующегося числом вращения  $\rho=1/8$ , с характерным видом 8-оборотной трубки тора (рис. 5), существенно отличного от двумерного тора, изображенного на рис. 4. Следует подчеркнуть, что этот двумерный тор «второго порядка» находится в докритической области параметров относительно линии бифуркации рождения тора «первого порядка». Стартуя из других начальных условий при тех же самых значениях управляющих параметров, можно найти в системе предельный цикл. Эта найденная новая линия бифуркации рождения тора «второго порядка» принадлежит только листу синхронизации  $1/8^2$ . Поэтому очередная бифуркация, хотя и приводит к рождению третьей по счету собственной частоты, но не приводит к трехчастотной квазипериодике, так как первые две

<sup>2</sup> На других листах синхронизации порядка  $1/n$  наблюдается аналогичное поведение.

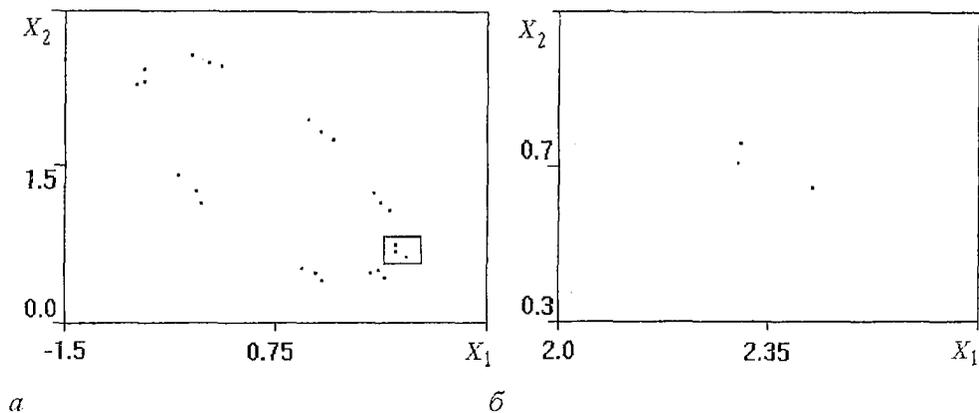


Рис. 6. Синхронизация на торе «второго порядка» (число вращения 2:3) при  $\alpha=1.0169$ ,  $\gamma=2.5$

частоты связаны резонансом. Дальнейшее исследование эволюции системы (1) вблизи линии бифуркации рождения тора выявило следующие интересные особенности.

1. Область параметров, в которой существует двумерный тор второго порядка, весьма узкая, и небольшие отклонения параметров или начальных условий приводят к переходу системы в качественно иное состояние.

2. Вдоль линии бифуркации рождения тора второго порядка числа вращения увеличиваются с увеличением параметра  $\gamma$ , и на двумерном торе второго порядка возможно существование как квазипериодических колебаний (которым соответствует иррациональное число вращения), так и своих листов синхронизации (с рациональными числами вращения). На рис. 6 показано сечение Пуанкаре для листа синхронизации 2:3 на двумерном торе «второго порядка».

3. На базе листов синхронизации на торе «второго порядка» при изменении управляющих параметров может рождаться двумерный тор «третьего порядка». Более того, в рассматриваемой системе могут существовать двумерные торы более высоких порядков: сечение Пуанкаре для одного из таких режимов показано на рис. 7 для системы (1). При первом рассмотрении может казаться, что это двумерный тор «третьего порядка», но при дальнейшем масштабировании видна самоподобная структура аттрактора.

К сожалению, в ходе эксперимента не удалось выяснить, как, детально, расположены листы, соответствующие различным режимам «высоких порядков», на плоскости управляющих параметров вблизи линии бифуркации рождения тора. Это объясняется тем, что чем более тонкий режим исследуется, тем с меньшим шагом интегрирования по времени приходится проводить численное моделирование системы, в то время как длительность переходного процесса существенно возрастает (поведение листов синхронизации на торе первого порядка

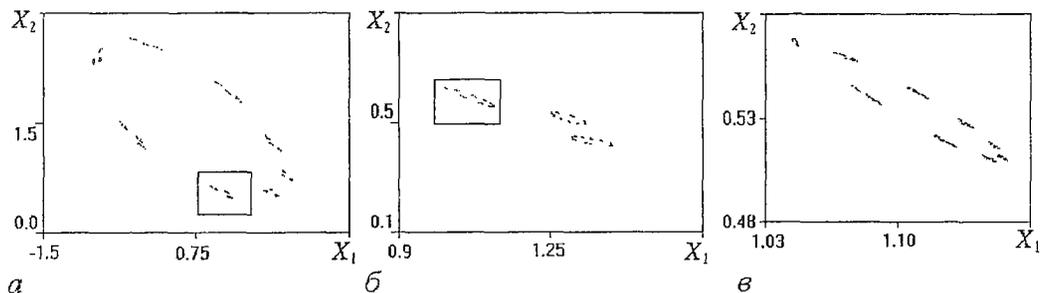


Рис. 7. Двумерный тор «порядка выше третьего» при  $\alpha=1.0$ ,  $\gamma=2.47$ , полученный из начальных условий (0.3499, 0.7683, -4.2814)

описано в [4]). Тем не менее, мы можем предполагать, что листы синхронизаций более высоких порядков ведут себя аналогичным образом, образуя на плоскости управляющих параметров самоподобную структуру. Более того, с уверенностью можно утверждать, что описанные эффекты действительно имеют место в системе (1), а не являются результатами невыбранного переходного процесса или погрешностей метода интегрирования. Во-первых, возникновение квази-периодики «второго порядка» подтверждается анализом поведения мультипликаторов, то есть почти аналитически. Во-вторых, поведение системы остается неизменным при различных значениях шага интегрирования по времени (от 0.00025 до 0.0025) и при различном внутреннем представлении данных (использовался как тип single, так и extended языка программирования Паскаль). В-третьих, для того, чтобы убедиться, что результаты получены при полностью выбранном переходном процессе, мы осуществили  $1.2 \cdot 10^8$  итераций с шагом 0.001 из начальных условий (0.3499, 0.7683, -4.2814) для режима, изображенного на рис. 7.

Таким образом, проведенное исследование позволило выявить самоподобное поведение кусочно-линейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора, которое описывается следующим сценарием. На двумерном торе при изменении управляющих параметров возникает синхронизация собственных частот системы (иными словами, частоты данной двухчастотной системы находятся в рациональном соотношении), после чего на базе этого сложного периодического режима вновь рождается двумерный тор уже более «высокого порядка» (в системе появляется еще одна частота), на котором вновь возникает синхронизация двух собственных частот, где вновь рождается двумерный тор и т.д., причем режимы становятся все «тоньше» и «тоньше». По всей видимости, мы можем говорить о новом сценарии поведения нелинейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора.

## Библиографический список

1. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М: Мир, 1991.
2. Allen T. On the arithmetic of phase locking: coupled neurons as a lattice on  $r^2$  // *Physica D*. 1983. Vol. 6. P. 305.
3. Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R. // *IEEE Trans. Circuits and Syst.* 1987. Vol. 34, № 3. P.240.
4. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Экспериментальное двухпараметрическое исследование неоднозначных режимов колебаний при разрушении квазипериодических торов // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1995. Т. XXXVIII, № 11. С. 1195.
5. Короновский А.А. Мультипликаторы периодических решений для генератора с кусочно-линейным элементом // *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 1997. Т. 5, № 2. С. 24.
6. Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L.O., Hotta A. Global bifurcation analysis of the double scroll circuit // *International Journal of Bifurcation and chaos*. 1991. Vol. 1, № 1. P. 139.
7. Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M. The double scroll // *IEEE Trans. Circuit Syst.* 1985. Vol. 32. P. 797.
8. Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // *IEEE Trans Circuit Syst.* 1986. Vol. 33. P. 1072.
9. Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M. Birth and death of the double scroll // *Physica D*. P. 97.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М: Наука. 1989. С.212.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 18.02.97  
после переработки 28.03.97

## THE SUBTLE EFFECTS OF THE PIECE-WISE -LINEAR SYSTEM SELF-SIMILAR BEHAVIOUR NEAR THE LINE OF THE TORUS BIRTH BIFURCATION

*A.A. Kipchatov, A.A. Koronovski*

The piece-wise linear system with 1.5 degrees of freedom which is able to demonstrate the two-frequency dynamics without the external action has been investigated in this article. It has been shown that the behaviour of this system near the line of the torus birth bifurcation is self-similar and very complicated. The tongues of synchronisation converge to the line of the torus birth bifurcation. There are another lines of torus birth bifurcation on the tongues of synchronisation. The intersection of these lines results in the birth of the new quasiperiodic oscillation types, and so on.



*Кипчатов Алексей Александрович* – родился в 1958 году, окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики и нелинейной динамики (1996). Заведующий научным сектором Колледжа прикладных наук Саратовского госуниверситета, доцент кафедры электроники и волновых процессов. Научные интересы – анализ сложного поведения нелинейных систем в пространстве параметров, оценка количественных характеристик сложности по временным реализациям различных процессов, трансформация характеристик хаотических колебаний в инерционных цепях и средах. Автор ряда статей по этим направлениям.



*Короновский Алексей Александрович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. В Издательстве ГосУНЦ «Колледж» вышла монография в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым «Нелинейная динамика в действии» (1996). Автор нескольких статей в центральной печати.