



## МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ГЕНЕРАТОРА С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

*А.А. Короновский*

В настоящей работе рассматриваются системы, фазовое пространство которых состоит из трех линейных подпространств. Подобные системы описываются  $n$  обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с кусочно-линейными функциями в правой части. Получены уравнения, позволяющие найти периодические режимы колебаний в таких системах и их мультипликаторы, в зависимости от значений управляющих параметров системы, что открывает возможность построения карт режимов в пространстве управляющих параметров.

### Введение

Изучение систем с кусочно-линейными элементами приобретает в последнее время все большее распространение. Так, например, известно целое семейство радиофизических схем Чуа (см., например, [1]), которые, являясь простыми кусочно-линейными системами, демонстрируют сложное поведение и, в какой-то мере, служат классическими эталонными генераторами, порождающими в зависимости от значений управляющих параметров, периодические или хаотические колебания. Более того, исследование радиофизических систем, в которых нелинейный элемент заменен кусочно-линейным, позволяет иногда уточнить поведение исходной системы [2]. Поведение же самих кусочно-линейных схем, как показывают результаты исследований, несмотря на их внешнюю простоту, оказывается подчас чрезвычайно сложным: в этом отношении кусочно-линейные схемы несколько не уступают своим нелинейным «собратьям».

Исследование поведения простых нелинейных динамических систем в большинстве случаев сводится либо к натурному эксперименту, либо к численному моделированию обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих данную систему, и последующей обработке полученных временных реализаций: определению размерности аттрактора, анализу спектра колебаний, получению сечений Пуанкаре и, иногда, построению двухпараметрических карт режимов колебаний на плоскости управляющих параметров [3-5] (последний подход оказывается весьма эффективным с точки зрения комплексного анализа поведения системы, но требует очень много времени и сил, особенно в численном эксперименте, и поэтому используется далеко не всегда).

Следует отметить, что изучение некоторых «тонких» режимов подобным образом осуществить не удается: в натурном эксперименте мешают собственные

шумы системы и «грубое» изменение параметров, а в численном эксперименте неимоверно возрастает время счета. При анализе же кусочно-линейных систем ситуация несколько иная: помимо методов, описанных выше, **МОЖНО ВОСПОЛЬЗОВАТЬСЯ** тем, что система на каждом из сегментов своей характеристики линейна и, следовательно, на каждом участке возможно получить аналитическое решение. Другое дело, возникают существенные трудности при «сшивании» этих решений, но иногда эти трудности удается с успехом преодолеть и получить интересные результаты.

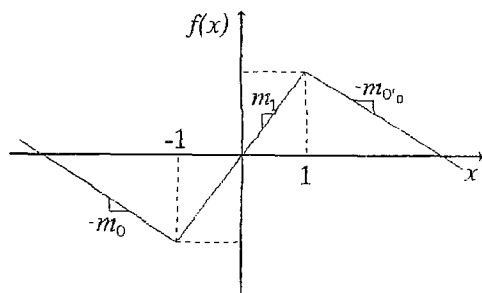


Рис. 1. Кусочно-линейная нечетная функция с тремя сегментами

Подобная ситуация возникла при исследовании радиофизического генератора «Торус» [6], предложенного Л. Чуа с соавторами в работе [7]: отличительным свойством этого генератора является возникновение в нем двухчастотной динамики без какого бы то ни было внешнего воздействия при минимально необходимом для этого числе степеней свободы. Было совершенно непонятно, как ведут себя листы синхронизации (языки Арнольда) вблизи линии бифуркации рождения тора, и ни натурный, ни численный эксперименты не позволили до конца прояснить этот вопрос. Но, к счастью, в силу кусочной линейности системы, оказалось возможным, используя идеи работы [8], определить мультипликаторы периодических режимов (каковыми и являются листы синхронизации) и по поведению мультипликаторов определить: во-первых, границы языков Арнольда, а во-вторых, характер бифуркации при потере устойчивости этими режимами. В [8] приведен ряд оригинальных идей, позволяющих проделать все вышеописанное для другой кусочно-линейной системы, а именно, «двойной спирали» [9-11], но сделанное утверждение доказывается в этой работе только лишь для одного частного случая. Докажем это утверждение в общем виде для любой кусочно-линейной системы с 1.5 степенями свободы, которая описывается тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями. Эти уравнения или содержат нечетную кусочно-линейную функцию с тремя сегментами, например такую, как на рис. 1, или линейны, а фазовое пространство системы состоит из трех подпространств. Все рассмотрение будем проводить на примере генератора «Торус» [6,12], используя обозначения, принятые в [8].

## 1. Основные обозначения

Перепишем систему безразмерных дифференциальных уравнений, которыми описывается динамика генератора «Торус» [6], в несколько ином виде

$$\begin{aligned} dx_1/d\tau &= (\alpha - 1)f(x_1)/\gamma - (1/\gamma) x_3, \\ dx_2/d\tau &= (\alpha/\gamma) f(x_1), \\ dx_3/d\tau &= \gamma(x_1 + x_2), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_1 = y - x$ ;  $x_2 = x$ ;  $x_3 = z$ ;  $f(x_1) = -(m_0/m_1)x_1 + 1/2(m_0/m_1 + 1)[|x_1 + 1| - |x_1 - 1|] -$  безразмерная кусочно-линейная вольт-амперная характеристика (ВАХ);  $m_0/m_1 = = 1/2$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  – управляющие параметры. Тогда динамика рассматриваемой системы может быть описана следующим образом:

$$dx/d\tau = F(x), \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)^T$  – вектор состояния системы в трехмерном фазовом пространстве,  $\mathbf{x} \in R^3$ . Векторное поле  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  может быть записано как

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), & \mathbf{x} \in R_+^3, \\ \mathbf{A}\mathbf{x}, & \mathbf{x} \in R_0^3, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathbf{p}), & \mathbf{x} \in R_-^3, \end{cases} \quad (3)$$

где  $R_{\pm}^3 = \{\mathbf{x} \in R^3 | (\pm x_1 - 1) > 0\}$ ,  $R_0^3 = \{\mathbf{x} \in R^3 | |x_1| < 1\}$  – три области фазового пространства с линейной динамикой, соответствующие трем сегментам кусочно–линейной ВАХ генератора (рис. 2);

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\alpha-1)/\gamma & 0 & -1/\gamma \\ -\alpha/\gamma & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)/\gamma (m_0/m_1) & 0 & -1/\gamma \\ (\alpha/\gamma)(m_0/m_1) & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

матрицы параметров системы;  $\mathbf{p} = [(m_0+m_1)/m_0](1, -1, 0)^T$  – вектор наклона ВАХ. Векторное поле  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  является в данном случае трехсегментным кусочно–линейным и непрерывным во всем пространстве  $R^3$ . Области линейности «сшиваются» на границах  $V_{\pm 1} = \{\mathbf{x} \in R^3 | x_1 = \pm 1\}$ . Изображающая точка, перемещаясь в фазовом пространстве  $R^3$  из области  $R_0^3$  в области  $R_{\pm}^3$  и обратно, «пронизывает» граничные плоскости  $V_{\pm 1}$  и образует последовательность точек пересечения фазовой траектории с разделительными плоскостями. Зная точку фазовой траектории на плоскости раздела  $V_{+1}$  (или  $V_{-1}$ ), можно, пользуясь линейностью системы в соответствующем подпространстве  $R_0^3(R_{\pm}^3)$ , проследить дальнейшую динамику системы вплоть до того момента, когда изображающая точка покинет эту область и вновь пересечет плоскость раздела  $V_{\pm 1}$ . Таким образом, точки фазовой траектории, лежащие на плоскостях  $V_{\pm 1}$ , разделяющих линейные подпространства векторного поля  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  в пространстве  $R^3$ , полностью определяют всю фазовую траекторию в фазовом пространстве и, следовательно, содержат всю информацию о динамике системы.

Основная идея работы [8] заключается в том, чтобы рассматривать не точки  $\mathbf{x}_i$ , принадлежащие плоскостям раздела  $V_{\pm 1}$ , а интервалы времени, за которые изображающая точка фазовой траектории в фазовом пространстве, покинув одну

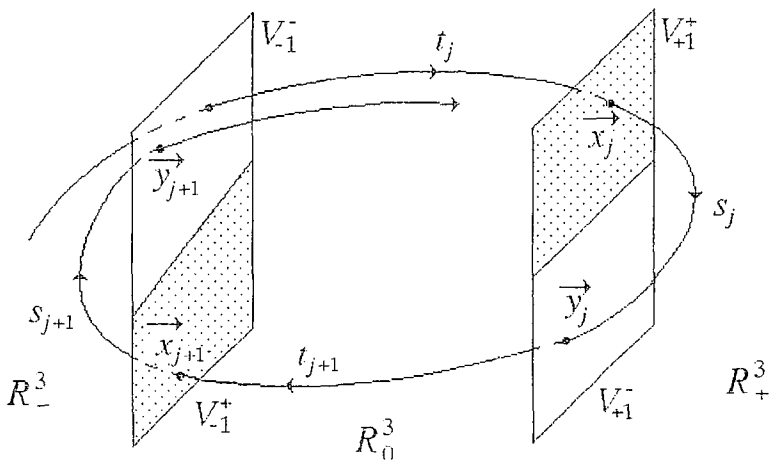


Рис. 2. Последовательность точек пересечения, образованная фазовой траекторией и плоскостями  $V_{\pm 1}^{\pm}$ , разделяющими области линейности  $R_0^3$  и  $R_{\pm}^3$  рассматриваемой системы

из плоскостей раздела и перемещаясь в одной из линейных областей, вновь достигнет какой-либо плоскости раздела. Таким образом, рассматриваются скалярные величины, что несколько проще.

Введем в рассмотрение в трехмерном фазовом пространстве вектор  $\mathbf{a} = (1, 0, 0)^T$  и с его помощью определим подмножества  $V_{\pm 1}^{\pm}$  множеств  $V_{\pm 1}$  следующим образом:

$$V_{\pm 1}^+ = \{x \in V_{\pm 1} | \pm \langle \mathbf{a}, \mathbf{A}x \rangle > 0\}, \quad V_{\pm 1}^- = \{x \in V_{\pm 1} | \pm \langle \mathbf{a}, \mathbf{A}x \rangle < 0\}.$$

Иными словами,  $V_{\pm 1}^+$  – это подмножества точек разделяющих плоскостей  $V_{\pm 1}$ , на которых векторное поле  $\mathbf{F}(x)$  направлено наружу относительно подмножества  $R_0^3$ , то есть в этих точках фазовая траектория выходит из области  $R_0^3$  в области  $R_{\pm}^3$ , соответственно. С другой стороны,  $V_{\pm 1}^-$  – это подмножества разделяющих плоскостей  $V_{\pm 1}$ , на которых векторное поле  $\mathbf{F}(x)$  направлено внутрь подмножества  $R_0^3$ . В точках этих подмножеств фазовая траектория из областей  $R_{\pm}^3$  входит в область  $R_0^3$ . Условимся обозначать: точки, принадлежащие подмножествам  $V_{\pm 1}^+$ , символами  $x_i$ ; точки, принадлежащие  $V_{\pm 1}^-$ , – символами  $y_i$ ; интервалы времени, в течение которых изображающая точка движется от подмножеств  $V_{\pm 1}^-$  к подмножествам  $V_{\pm 1}^+$  (то есть, в области  $R_0^3$ ), – символами  $t_i$ ; интервалы времени, в течение которых изображающая точка движется в областях  $R_{\pm}^3$  от  $V_{\pm 1}^+$  до  $V_{\pm 1}^-$ , – символами  $s_i$ , где  $i$  – номер точки в последовательности точек пересечения, образованной пересечениями фазовой траектории с разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}$  (см. рис. 2).

Существует взаимно однозначное соответствие между величинами  $x_i$ ,  $y_i$  и  $t_i$ ,  $s_i$  [8]. Поэтому для периодических режимов, зная последовательность, в которой фазовая траектория пересекает плоскости  $V_{\pm 1}$ , можно получить систему нелинейных уравнений относительно  $t_i$  и  $s_i$ , в которую входят управляющие параметры системы. Наличие решения у этой системы<sup>1</sup> при конкретных значениях управляющих параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  свидетельствует о существовании искомого периодического решения (которое может быть как устойчивым, так и неустойчивым). Варьируя  $\alpha$  и  $\gamma$ , можно также найти границы устойчивости режима, то есть бифуркационные значения управляющих параметров.

Не останавливаясь подробно на математических выкладках, которые во многом аналогичны выкладкам, проведенным в [8], заметим, что для предельного цикла, реализующегося в генераторе «Торус» при  $\alpha < 1$ , система нелинейных уравнений будет состоять всего из двух<sup>2</sup> соотношений, которые в векторном виде могут быть записаны следующим образом:

$$[\Omega(t, s) - E]K(t, s)\mathbf{h}_1 = 0, \quad (4)$$

где  $\Omega(t, s) = e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{C}s}$ ;  $E$  – единичная матрица;  $\mathbf{h}_1 = (1, 1, 1)^T$ ;

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)/\gamma(m_0/m_1) & 0 & (1/\gamma)(m_0/m_1) \\ (\alpha-1)/\gamma(m_0+m_1)/m_1 - \alpha/\gamma & 0 & -(1/\gamma)(m_0+m_1)m_1 \\ \gamma & \gamma & 0 \end{bmatrix},$$

$K(t, s) = [e_1 \mathbf{a}^T e^{-\mathbf{A}t} + e_2 \mathbf{a}^T + e_3 \mathbf{a}^T e^{\mathbf{C}s}]^{-1}$ , где  $e_1, e_2, e_3$  – единичные векторы:  $e_1 = (1, 0, 0)^T$ ;  $e_2 = (0, 1, 0)^T$ ;  $e_3 = (0, 0, 1)^T$ .

<sup>1</sup> Разумеется, имеется в виду, как правило, не аналитическое, а численное решение.

<sup>2</sup> Заметим, что в (4) содержатся три нелинейных уравнения при двух неизвестных. Однако, так как величины  $t$  и  $s$  однозначно определяют точку на разделительной плоскости  $V_{\pm 1}$ , независимых уравнений только два.

## 2. Анализ результатов

Итак, пусть в фазовом пространстве при определенных значениях параметров  $\alpha$  и  $\gamma$  существует замкнутая (периодическая) орбита, точками пересечения которой с разделительными плоскостями являются  $x_i, y_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), а  $t_i, s_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – интервалы времени, соответствующие точкам  $x_i, y_i$ . Тогда матрица  $M = e^{B s_n} e^{A t_n} e^{B s_{n-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1}$  имеет собственные значения  $(\lambda_1^M, \lambda_2^M, \lambda_3^M)$ , причем  $\lambda_1^M = 1$ . Собственные значения  $\lambda_2^M, \lambda_3^M$  являются, фактически, мультипликаторами периодической орбиты, которая устойчива только в том случае, когда  $|\lambda_2^M| < 1, |\lambda_3^M| < 1$ .

Для доказательства вышеприведенного утверждения сформулируем и докажем теорему, опирающуюся на следующие две вспомогательные леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $y_0, x_0$  – две последовательные точки пересечения, порожденные произвольной фазовой траекторией и разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}^{\pm}$ . Тогда производная отображения  $f(y)$ , которое ставит в соответствие первой из двух рассматриваемых точек (точке  $y_0$ ) вторую рассматриваемую точку ( $x_0$ )  $f: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^+, f(y_0) = x_0$ , имеет вид

$$Df(y_0) = \left[ E - \frac{Ax_0 a^T}{a^T Ax_0} \right] e^{A t_0},$$

где  $t_0$  – время движения от точки  $y_0$  к точке  $x_0$  изображающей точки в линейном подпространстве  $R_0^3$  фазового пространства.

### Доказательство леммы 1.

Так как изображающая точка движется в линейном подпространстве  $R_0^3$  фазового пространства и динамика системы описывается векторным дифференциальным уравнением  $dx/dt = Ax$  (см. (2)), то в силу этого соотношения  $x_0 = e^{A t_0} y_0$ . Рассмотрим функцию  $F(y, t) = a^T e^{A t} y - 1$  (Знак «-» перед единицей берется в том случае, если  $x_0 \in V_{+1}^+$ , и «+» – если  $x_0 \in V_{-1}^+$ ). Так как  $F(y_0, t_0) = a^T e^{A t_0} y_0 - 1 = 0$  и  $\partial F(y_0, t_0) / \partial t = a^T A e^{A t_0} y_0 = a^T A x_0 \neq 0$ , то по теореме о существовании неявно заданной функции [13, 14] существует функция  $t: V_{\pm 1}^- \rightarrow R$  такая, что  $F(y, t(y)) = 0$  и  $t(y_0) = t_0$ , дифференцируемая в окрестности точки  $y_0$ . Тогда, дифференцируя  $t(y)$  по правилу дифференцирования неявно заданной функции в точке  $y_0$ , получим

$$Dt(y_0) = -[\partial F(y_0, t_0) / \partial t]^{-1} [\partial F(y_0, t_0) / \partial y] = -[a^T A e^{A t_0} y_0]^{-1} a^T e^{A t_0} = -[a^T A x_0]^{-1} a^T e^{A t_0}.$$

Рассмотрим теперь отображение  $f: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^+, f(y) = e^{A t(y)} y, f(y_0) = e^{A t(y_0)} y_0 = e^{A t_0} y_0 = x_0$ . Тогда

$$\begin{aligned} Df(y_0) &= A e^{A t(y_0)} y_0 Dt(y_0) + e^{A t_0} = A e^{A t_0} y_0 [a^T A x_0]^{-1} a^T e^{A t_0} + e^{A t_0} = \\ &= \left[ E - \frac{A e^{A t_0} y_0 a^T}{a^T A x_0} \right] e^{A t_0} = \left[ E - \frac{A x_0 a^T}{a^T A x_0} \right] e^{A t_0}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $x_0, y_0$  – две последовательные точки пересечения, порожденные произвольной фазовой траекторией и разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}^{\pm}$ . Тогда производная отображения  $g(x)$ , которое ставит в соответствие первой из двух рассматриваемых точек (точке  $x_0$ ) вторую рассматриваемую точку ( $y_0$ )  $g: V_{\pm 1}^+ \rightarrow V_{\pm 1}^-, g(x_0) = y_0$ , имеет вид

$$Dg(x_0) = \left[ E - \frac{Ay_0 a^T}{a^T Ay_0} \right] e^{Bs_0},$$

где  $s_0$  – время движения изображающей точки в линейном подпространстве  $R_{\pm}^3$  фазового пространства, от точки  $x_0$  к точке  $y_0$ .

**Доказательство леммы 2.**

Так как изображающая точка движется в линейном подпространстве  $R_{\pm}^3$  фазового пространства и динамика системы описывается векторным дифференциальным уравнением  $dx/dt = B(x \mp p)$  (см. (2)), то в силу этого соотношения  $y_0 = e^{Bs_0}(x_0 \mp p) \pm p$ . Рассмотрим функцию

$$H(x, s) = a^T \{ e^{Bs}(x \mp p) \pm p \} \mp 1,$$

знак «-» перед единицей берется в том случае, если  $y_0 \in V_{+1}^-$ , и «+» – если  $x_0 \in V_{-1}^-$ . Заметим, что

$$H(x_0, s_0) = a^T \{ e^{Bs_0}(x_0 \mp p) \pm p \} \mp 1 = a^T y_0 \mp 1 = 0$$

$$\partial H(x_0, s_0) / \partial s = a^T B e^{Bs_0}(x_0 \mp p) = a^T e^{Bs_0} B(x_0 \mp p).$$

В силу того что, во-первых,  $y_0 \in V_{\pm 1}^-$  и, во-вторых, на плоскостях раздела  $V_{\pm 1}^{\pm}$  выполняется условие непрерывности векторного поля  $dx/dt$

$$Aw = B(w \mp p), \quad w \in V_{\pm 1}^{\pm}, \quad (5)$$

то  $Ay_0 = B(y_0 \mp p)$ . Тогда

$$\partial H(x_0, s_0) / \partial s = a^T e^{Bs_0} \{ B(x_0 \mp p) \pm p \mp p \} = a^T e^{Bs_0} (y_0 \mp p) = a^T Ay_0 \neq 0$$

и по теореме о существовании неявно заданной функции существует функция  $s: V_{\pm 1}^+ \rightarrow R$  такая, что  $H(x, s(x)) = 0$  и  $s(x_0) = s_0$ , дифференцируемая в окрестности точки  $x_0$ . Тогда, дифференцируя  $s(x)$  по правилу дифференцирования неявно заданной функции в точке  $x_0$ , получим

$$Ds(x_0) = -[\partial H(x_0, s_0) / \partial s]^{-1} [\partial H(x_0, s_0) / \partial x] = -[a^T Ay_0]^{-1} a^T e^{Bs_0}.$$

Рассмотрим теперь отображение  $g: V_{\pm 1}^+ \rightarrow V_{\pm 1}^-$

$$g(x) = e^{Bs(x)}(x \mp p) \pm p, \quad g(x_0) = e^{Bs(x_0)}(x_0 \mp p) \pm p = y_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Dg(x_0) &= B e^{Bs(x_0)}(x_0 \mp p) Ds(x_0) + e^{Bs_0} = B \{ e^{Bs_0} [x_0 \mp p] \pm p \mp p \} Ds(x_0) + e^{Bs_0} = \\ &= B [y_0 \mp p] Ds(x_0) + e^{Bs_0} = -Ay_0 [a^T Ay_0]^{-1} a^T e^{Bs_0} + e^{Bs_0} = \left[ E - \frac{Ay_0 a^T}{a^T Ay_0} \right] e^{Bs_0}. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Теперь, когда мы доказали две вспомогательные леммы, перейдем к теореме.

**Теорема.** Пусть  $y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$  – последовательность точек пересечения, порожденная произвольной фазовой траекторией и разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}^{\pm}$ , а  $t_1, s_1, t_2, s_2, \dots, t_n, s_n$  – интервалы времени движения изображающей точки в линейных областях фазового пространства, соответствующие этим точкам пересечения. Пусть  $\pi_n$  – отображение,

которое ставит в соответствие первой из рассматриваемых точек пересечения фазовой траектории с разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}^{\pm}$  (точке  $y_0$ ) последнюю рассматриваемую точку ( $y_n$ ) из последовательности пересечения, а именно,  $\pi_n: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^+$ ,  $\pi_n(y_0) = y_n$ . Тогда производная  $D\pi_n(y_0)$  отображения  $\pi_n$  будет определяться соотношением

$$D\pi_n(y_0) = \left[ E - \frac{Ay_n a^T}{a^T Ay_n} \right] e^{B_{S1} e^{A/n} e^{B_{S1-1} e^{A/n-1}} \dots e^{B_{S1} e^{A/n}}}$$

### Доказательство.

Будем доказывать теорему с помощью метода математической индукции. Рассмотрим сначала случай, когда  $n=1$  ( $y_0 \rightarrow x_1 \rightarrow y_1$ ). Тогда, по правилу дифференцирования сложной функции получим, что  $D\pi_1(y_0) = Dg_1(x_1) \times Df_1(y_0)$ . Пользуясь только что доказанными леммами, получим

$$\begin{aligned} D\pi_1(y_0) &= \left[ E - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ay_1} \right] e^{B_{S1}} \left[ E - \frac{Ax_1 a^T}{a^T Ax_1} \right] e^{A/n} = \\ &= \left[ E - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ay_1} \right] \left[ e^{B_{S1}} - \frac{e^{B_{S1}} Ax_1 a^T}{a^T Ax_1} \right] e^{A/n}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$e^{B_{S1}} Ax_1 = e^{B_{S1}} B(x_1 \mp p) = B(e^{B_{S1}}(x_1 \mp p) \pm p \mp p) = B(y_1 \mp p) = Ay_1,$$

и тогда

$$\begin{aligned} D\pi_1(y_0) &= \left[ E - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ay_1} \right] e^{B_{S1} e^{A/n}} \left[ \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ax_1} - \frac{Ay_1 (a^T Ay_1) a^T}{(a^T Ay_1) a^T Ax_1} \right] e^{A/n} = \\ &= \left[ E - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ay_1} \right] e^{B_{S1} e^{A/n}} - \left[ \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ax_1} - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ax_1} \right] e^{A/n} = \\ &= \left[ E - \frac{Ay_1 a^T}{a^T Ay_1} \right] e^{B_{S1} e^{A/n}}. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение теоремы при  $n=1$  доказано.

Предположим теперь, что утверждение теоремы верно при  $n=m-1$ , то есть

$$D\pi_{m-1}(y_0) = \left[ E - \frac{Ay_{m-1} a^T}{a^T Ay_{m-1}} \right] e^{B_{S1} e^{A/n-1}} \dots e^{B_{S1} e^{A/n}}.$$

Докажем, используя леммы 1 и 2, что условие теоремы выполняется и при  $n=m$ . По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\begin{aligned} D\pi_m(y_0) &= Dg_1(x_m) \times Df_1(y_{m-1}) \times D\pi_{m-1}(y_0) = \\ &= Dg_1(x_m) \times \left[ E - \frac{Ax_m a^T}{a^T Ax_m} \right] e^{A/n-1} \times \left[ E - \frac{Ay_{m-1} a^T}{a^T Ay_{m-1}} \right] e^{B_{S1} e^{A/n-1}} \dots e^{B_{S1} e^{A/n}}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $e^{A/n} Ay_{m-1} = Ae^{A/n} y_{m-1} = Ax_m$ . Тогда

$$\begin{aligned}
D\pi_m(y_0) &= Dg(x_m) \times \left[ E - \frac{Ax_m a^T}{a^T Ax_m} \right] e^{A t_m} e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1} = \\
Dg(x_m) &\times \left[ \frac{Ax_m a^T}{a^T Ay_{m-1}} - \frac{Ax_m (a^T Ax_m) a^T}{(a^T Ax_m) a^T Ay_{m-1}} \right] e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1} = \\
&= \left[ E - \frac{Ay_m a^T}{a^T Ay_m} \right] e^{B s_m} \left[ E - \frac{Ax_m a^T}{a^T Ax_m} \right] e^{A t_m} e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1}.
\end{aligned}$$

Так как

$$e^{B s_m} Ax_m = e^{B s_m} B [x_m \mp p] = B \{ e^{B s_m} (x_m \mp p) \pm p \mp p \} = B (y_m \mp p) = A y_m,$$

то

$$\begin{aligned}
D\pi_m(y_0) &= \left[ E - \frac{Ay_m a^T}{a^T Ay_m} \right] e^{B s_m} e^{A t_m} e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1} - \\
&- \left[ \frac{Ay_m a^T}{a^T Ax_m} - \frac{Ay_m (a^T Ay_m) a^T}{(a^T Ay_m) a^T Ax_m} \right] e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1} = \\
&= \left[ E - \frac{Ay_m a^T}{a^T Ay_m} \right] e^{B s_m} e^{A t_m} e^{B s_{m-1}} e^{A t_{m-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1}.
\end{aligned}$$

Итак, производная от рассматриваемого отображения  $\pi_n: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^-$ ,  $\pi_n(y_0) = y_n$  для случая  $n=m$  имеет вид

$$D\pi_n(y_0) = \left[ E - \frac{Ay_n a^T}{a^T Ay_n} \right] e^{B s_n} e^{A t_n} e^{B s_{n-1}} e^{A t_{n-1}} \dots e^{B s_1} e^{A t_1},$$

что и требовалось доказать. Теорема доказана полностью.

Рассмотрим периодическую орбиту в фазовом пространстве и определим характер ее устойчивости. Пусть  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_n, x_n$  – точки пересечения замкнутой фазовой траектории с разделительными плоскостями  $V_{\pm 1}$ . Рассмотрим отображение  $\pi_n: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^-$ , которое ставит в соответствие точке  $z \in V_{\pm 1}^-$  (из  $\varepsilon$ -окрестности  $y_n$ ) точку, порождаемую пересечением фазовой траектории, выходящей из  $z$ ,  $\delta(\varepsilon)$ -окрестности  $z$ , лежащей на плоскости  $V_{\pm 1}^-$ . Пусть также для этого отображения выполняется условие  $\pi_n(y_0) = y_n$ . Очевидно, что точка  $y_n$  является неподвижной точкой этого отображения. Для того, чтобы определить характер устойчивости неподвижной точки  $y_n$  отображения  $\pi_n: V_{\pm 1}^- \rightarrow V_{\pm 1}^-$  (и, соответственно, характер устойчивости периодической орбиты, порождающей последовательность точек пересечения  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_n, x_n$ ), линеаризуем отображение  $\pi_n(y_n)$  в окрестности неподвижной точки  $y_n$

$$\pi_n(y_n + \delta y_n) = \pi_n(y_n) + D\pi_n(y_n) \delta y_n.$$

Тогда об устойчивости неподвижной точки  $y_n$  можно судить по собственным числам матрицы Флоке  $D\pi_n(y_n)$  [15], а именно: неподвижная точка  $y_n$  устойчива (и, соответственно, устойчива периодическая орбита), если все собственные числа матрицы Флоке по модулю меньше единицы. Так, для последовательности точек пересечения  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_n, x_n$  при условии периодичности  $y_0 = y_n$  матрица Флоке, в соответствии с приведенной теоремой, будет иметь вид



$$D\pi_n(y_n) = \left[ E - \frac{Ay_n a^T}{a^T Ay_n} \right] e^{B_{Sn} e^{A_{In}} e^{B_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{B_{S1}} e^{A_{I1}},$$

а ее собственные значения  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  полностью определяют характер устойчивости рассматриваемой периодической орбиты.

Заметим теперь, что

$$\pi_n(y_n) = e^{C_{Sn} e^{A_{In}} e^{C_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{C_{S1}} e^{A_{I1}} y_n = y_n, \quad (6)$$

где  $C=A^{-1}BA$ . Действительно,  $x_1 = e^{A_{I1}} y_n$ ,  $y_1 = e^{B_{S1}}(x_1 \mp p) \pm p$ . В силу соотношения (5) получим

$$\begin{aligned} y_1 &= A^{-1}A\{e^{B_{S1}}(x_1 \mp p) \pm p\} = A^{-1}B e^{B_{S1}}(x_1 \mp p) = \\ &= A^{-1}e^{B_{S1}}B(x_1 \mp p) = A^{-1}e^{B_{S1}}Ax_1. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $A^{-1}e^{B_{S1}}A = e^{C_{S1}}$  (в чем нетрудно убедиться, используя непосредственно определение экспоненты от матрицы в виде степенного ряда [16]), получим  $y_1 = e^{C_{S1}}x_1 = y_1 = e^{C_{S1}}e^{A_{I1}}y_n$ . Продолжая по цепочке  $x_2, y_2, \dots, y_n, x_n$  проводить выкладки, аналогичные проделанным только что, получим соотношение (6).

Представим теперь  $D\pi_n(y_n)$  в виде  $D\pi_n(y_n) = L(y_n)M$ , где

$$L(y_n) = \left[ E - \frac{Ay_n a^T}{a^T Ay_n} \right], \quad M = e^{B_{Sn} e^{A_{In}} e^{B_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{B_{S1}} e^{A_{I1}}.$$

Заметим, что матрица  $M$  имеет собственный вектор  $u_1 = A^{-1}y_n$  и соответствующее ему собственное число  $\lambda_1^M = 1$ . Действительно,

$$\begin{aligned} M(Ay_n) &= e^{B_{Sn} e^{A_{In}} e^{B_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{B_{S1}} e^{A_{I1}} Ay_n = e^{B_{Sn} e^{A_{In}} e^{B_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{B_{S1}} A e^{A_{I1}} y_n = \\ &= e^{B_{Sn} e^{A_{In}} e^{B_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots A e^{C_{S1}} e^{A_{I1}} y_n = \dots = A e^{C_{Sn} e^{A_{In}} e^{C_{Sn-1}} e^{A_{In-1}} \dots e^{C_{S1}} e^{A_{I1}} y_n \end{aligned}$$

и в силу соотношения (6) получим  $M(Ay_n) = \lambda_1^M Ay_n$ , где  $\lambda_1^M = 1$ . Нетрудно убедиться также, что матрица  $L(y_n)$  проецирует точки пространства  $R^3$  на плоскость  $x_1=0$  вдоль вектора  $Ay_n$ , и, следовательно, матрица  $D\pi_n(y_n)$  имеет собственный вектор  $Ay_n$  и соответствующее ему собственное значение  $\lambda_1=0$ . Более того, если матрица  $M$  имеет два других собственных вектора  $u_2, u_3$  и соответствующие им собственные значения  $\lambda_2, \lambda_3$ , то тогда собственными векторами матрицы  $D\pi_n(y_n)$  будут векторы  $L(y_n)u_2, L(y_n)u_3$ , а собственными числами  $-\lambda_2, \lambda_3$  [8]. Следовательно, зная собственные значения матрицы (одно из которых единица), можно однозначно определить характер устойчивости рассматриваемого периодического режима. Фактически  $\lambda_2^M = \lambda_2$  и  $\lambda_3^M = \lambda_3$  являются мультипликаторами предельного цикла.

### Заключение

Все проделанные выкладки, несмотря на их громоздкость, позволили получить новые весьма интересные и необычные результаты для генератора «Торус» [12], которые вряд ли бы удалось получить каким-либо иным способом и которые были подтверждены в ходе специально поставленного численного эксперимента. Следует обратить внимание также на то обстоятельство, что несмотря на то, что все выкладки были проведены для систем с 1.5 степенями свободы, возможно их обобщение для систем с числом степеней свободы большим,

чем 1.5. Действительно, заменяя пространство размерности 3 ( $R^3$ ) на пространство размерности  $n$  ( $R^n$ ), вектора из пространства  $R^3$  на соответствующие вектора из пространства  $R^n$ , матрицы параметров порядка 3 на матрицы порядка  $n$  и т.д., можно проделать выкладки, полностью аналогичные выкладкам, приведенным в настоящей работе, для динамической системы с  $n/2$  степенями свободы, которая описывается  $n$  обыкновенными дифференциальными уравнениями, некоторые из которых содержат нечетную кусочно-линейную функцию с тремя сегментами, остальные дифференциальные уравнения линейны, а фазовое пространство системы оказывается состоящим из трех подпространств. Вполне понятно, что полученные результаты для системы с  $n/2$  степенями свободы будут аналогичны результатам, полученным в данной работе. Заметим, что мы рассматривали систему с 1.5 степенями свободы, во-первых, потому, что в этом случае возможно наглядно пространственное исследовать конкретную систему с 1.5 степенями свободы. Следует обратить внимание также на то обстоятельство, что подход, описанный в [8] и развитый в данной работе, может, по всей видимости, быть использован и для анализа систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с кусочно-линейными функциями (причем, необязательно нечетными) и фазовым пространством, состоящим из подпространств, число которых больше, чем 3.

В заключение выражаю искреннюю признательность А.А.Кипчатову (который фактически «спровоцировал» автора на выполнение данной работы) за ряд ценных советов и плодотворные обсуждения.

## Библиографический список

1. *Shuxin Wu*. Chua's circuit family // Proc. IEEE. 1987. Vol. 75, № 8. P. 1022.
2. *Андрюшкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А.* Путь к хаосу в кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. ПНД. 1993. Т. 1, № 1, № 2. С. 93.
3. *Кипчатов А.* Особенности сложной динамики неавтономного нелинейного контура // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 2. С. 182.
4. *Bezruchko V.P., Kipchatov A.A., Krasichkov L.V., Seleznev E.P.* Complex dynamics of driven piece-wise linear oscillator // Proc. of International Symposium on Nonlinearity theory and applications (NOLTA'93). Hawaii, USA. 1993. Vol. 2. P. 471.
5. *Кипчатов А.А., Подин С.В.* Исследование поведения неавтономного релаксационного генератора в пространстве параметров // Изв. вузов. ПНД. 1996. Т. 4, № 4, 5. С. 30.
6. *Андрюшкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А.* Экспериментальное двухпараметрическое исследование неоднозначных режимов колебаний при разрушении квазипериодических торов // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXXVIII, № 11. С. 1195.
7. *Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R.* // IEEE Trans. Circuits and Syst. 1987. Vol. 34, № 3. P.240.
8. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L.O., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the double scroll circuit // International Journal of Bifurcation and chaos. 1991. Vol. 1. №. 1. PP. 139.
9. *Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* The double scroll // IEEE Trans. Circuit Syst. 1985. Vol. 32. P. 797.
10. *Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T.* The double scroll family // IEEE Trans Circuit Syst. 1986. Vol. 33. P. 1072.
11. *Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* Birth and death of the double scroll // Physica 24D. P. 97.
12. *Кипчатов А.А., Короновский А.А.* Тонкие эффекты самоподобного поведения кусочно-линейной системы вблизи линии бифуркации рождения тора // Изв. вузов. ПНД. 1997. Т. 5, № 2. С. 17.

13. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. М.: Наука, 1967. 736 с.

14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.

15. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.

16. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1967. 780 с.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 18.02.97  
после переработки 21.03.97*

## THE MULTIPLICATORS OF PERIODICAL SOLUTIONS FOR THE GENERATOR WITH THE PIECE-WISE LINEAR ELEMENT

*A.A. Koronovskiy*

This article deals with systems with the phase space consisting of three linear subspaces. These systems are described by  $n$  ordinary linear differential equations with piece-wise linear functions in their right side. The equations allowing to find the periodical solutions of these systems and its multipliers depending upon the values of control parameters have been obtained. It allows to trace the regimes maps in the space of control parameters.