



СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

А.В. Андреев, С.Л. Шитлин

Двухкомпонентные сверхизлучающие среды состоят из смеси квазирезонансных атомов, отличающихся величиной дипольного момента перехода. Атомы с меньшим дипольным моментом находятся изначально в возбужденном состоянии и являются усиливающими, тогда как атомы с большим дипольным моментом являются поглощающими, так как в начальный момент они пребывают в основном состоянии. Варьируя концентрацию резонансно поглощающего компонента, можно более чем на порядок повысить интенсивность импульсов сверхизлучения, по сравнению со случаем однокомпонентной среды, состоящей только из усиливающих атомов.

В настоящей работе показано, что параметры импульсов сверхизлучения двухкомпонентной среды зависят не только от концентрации резонансно поглощающего компонента, но и от профиля ее распределения. Используя указанные зависимости, можно еще на порядок повысить интенсивность импульсов сверхизлучения и сократить их длительность. Физический механизм такого увеличения интенсивности и сокращения длительности импульсов состоит в возможности эффективной селекции пространственных мод генерации в пространственно неоднородных средах. Обсуждаются также алгоритмы, с помощью которых проводились численные эксперименты. Показано, что к данному классу задач применимы методы повышенного порядка точности.

Введение

Существенный прогресс в разработке лазерных систем, генерирующих короткие и ультракороткие импульсы, был связан с использованием методов модуляции добротности и синхронизации мод [1,2]. Значительное число подобных схем основано на введении в резонатор лазера резонансно поглощающей среды, так называемого насыщающегося поглотителя. Таким образом, активная среда лазера оказывается двухкомпонентной. Она содержит как резонансно усиливающий, так и резонансно поглощающий компоненты. Однако более правильно такую среду назвать составной, поскольку она состоит из двух физически разделенных объемов усиливающей и поглощающей сред. Взаимное влияние процессов усиления и поглощения в этих двух средах осуществляется через посредство поля в резонаторе и оно тем слабее, чем ниже добротность резонатора. Если добротность резонатора близка к нулю, то динамика населенностей в поглощающей среде перестает оказывать влияние на динамику населенностей в усиливающей среде. Поэтому в безрезонаторных схемах генерации когерентного излучения, каковыми являются, например,

сверхизлучающие среды, использование составных двухкомпонентных сред не приведет к изменению параметров импульсов, генерируемых инвертированной средой.

Однако введение в сверхизлучающую среду второго компонента, как было недавно показано в работах [3,4], позволяет существенно изменить динамику сверхизлучения (СИ), что дает возможность управления параметрами генерируемых импульсов. Характерные черты динамики двухкомпонентных сред значительно отличаются от таковых для однокомпонентных. Так, например, время задержки двухкомпонентного СИ намного превышает длительность импульса, что дает возможность преобразования длинных импульсов накачки в ультракороткие импульсы СИ [5]. В двухкомпонентных средах наблюдается «безынерционное» СИ [6], когда концентрация резонансно поглощающих атомов превышает концентрацию резонансно усиливающих и суммарная инверсия населенностей остается отрицательной в течение всего процесса генерации. В двухкомпонентных средах наблюдается подпороговое усиление импульсов, эффективность которого существенно превышает эффективность усиления в однокомпонентных средах [7]. Следует отметить, что двухкомпонентное СИ отличается от лазеров с насыщающимся поглотителем не только тем, что два компонента перемешаны в одном объеме, но и тем, что как усиливающий, так и поглощающий компоненты являются когерентными, то есть длительность импульса двухкомпонентного СИ меньше времен релаксации для каждого из компонентов.

Динамика двухкомпонентного СИ исследовалась в работах [3–7] в рамках одномерных моделей. Настоящая работа состоит из двух частей. В первой части проведено исследование динамики СИ с учетом поперечной неоднородности активной среды. Определено влияние геометрии среды на параметры генерируемых импульсов. Показано, что использование отражающих покрытий на боковых поверхностях активного объема позволяет не только компенсировать эффекты поперечной диффузии поля, но и дает дополнительные возможности управления параметрами генерируемых импульсов. Во второй части работы исследуется динамика двухкомпонентного СИ в среде, у которой плотность поглощающего компонента является неоднородной по длине образца. Проведенные численные эксперименты показали, что параметры импульсов двухкомпонентного СИ существенно зависят от профиля распределения плотности поглощающего компонента. Это дает возможность управления интенсивностью и длительностью генерируемых импульсов в большом динамическом диапазоне.

Исследование одномерных задач динамики СИ с математической точки зрения показало, что они обладают рядом полезных свойств, благодаря которым удастся построить эффективные численные алгоритмы их решения.

1. Уравнения динамики двухкомпонентного СИ поперечно неоднородных сред

Пусть активный объем в виде прямоугольника $0 \leq x \leq L$, $-d/2 \leq z \leq d/2$, где L – длина активной среды, а d – поперечный размер, состоит из атомов двух сортов, имеющих одинаковые частоты переходов и отличающихся по величине дипольного момента перехода. Атомы с меньшей величиной дипольного момента резонансного перехода в начальный момент возбуждены, а атомы второго сорта находятся в начальный момент в основном состоянии. Сверхизлучательные среды характеризуются, как правило, тем, что число Френеля $F=d^2/(\lambda L)$ лежит в пределах $0.1 \leq F < 10.0$. Следовательно, мы можем положить, что амплитуда векторного потенциала $A(\mathbf{r}, t)$ электромагнитной волны

$$A(\mathbf{r}, t) = A_0(x, z, t) \exp[i(\omega t - kx)] \quad (1)$$

является медленно меняющейся функцией продольной координаты x и времени t , но может быть быстро осциллирующей по поперечной координате z . В этом

случае мы можем воспользоваться приближением квазиоптики, состоящим в использовании следующего приближения для оператора Даламбера:

$$\Delta A - (1/c^2)\partial^2 A/\partial t^2 \approx \partial^2 A/\partial z^2 - (2i\omega/c^2)\partial A/\partial t - 2ik\partial A/\partial x + (\omega^2/c^2 - k^2)A. \quad (2)$$

Представляя поле в среде в виде двух встречных волн, распространяющихся вдоль и против оси x , и пользуясь приближением (2), несложно получить следующую систему уравнений из полной системы уравнений Максвелла – Блоха:

$$\begin{aligned} \partial a_1/\partial t + \partial a_1/\partial x + i\gamma \partial^2 a_1/\partial z^2 + i\delta a_1 &= p_1 + q_1 + \beta_1^{1/2} p_0 (1+R)/2 + \beta_2^{1/2} q_0 (1+r)/2, \\ \partial a_2/\partial t - \partial a_2/\partial x + i\gamma \partial^2 a_2/\partial z^2 + i\delta a_2 &= p_2 + q_2 + \beta_1^{1/2} p_0 (1+R)/2 + \beta_2^{1/2} q_0 (1+r)/2, \\ \partial p_{1,2}/\partial t - \alpha_1 p_{1,2} &= \beta_1 a_{1,2} R, \\ \partial q_{1,2}/\partial t - (\alpha_2 + i\Delta) q_{1,2} &= \beta_2 a_{1,2} r, \\ \partial R/\partial t &= -\sum_{n=1}^2 (p_n a_n^* + p_n^* a_n), \\ \partial r/\partial t &= -\sum_{n=1}^2 (q_n a_n^* + q_n^* a_n), \end{aligned} \quad (3)$$

где безразмерные время t и координаты x, z связаны с размерными величинами x', z', t' следующими соотношениями:

$$t=t'/\tau, \quad x=x'/L, \quad z=z'/d, \quad (4)$$

то есть $x \in [0, 1]$, $z \in [-1/2, 1/2]$, а время нормировано на время пролета кванта через среду $\tau=L/c$. Безразмерные параметры $\alpha_n, \beta_n, \gamma, \delta$ имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_{1,2} &= \tau/T_2^{(1,2)}, \quad \beta_{1,2} = (2\pi\omega d_{1,2}^2)N\tau^2/\hbar V, \\ \gamma &= L/(2\chi d^2) = \lambda L/(4\pi d^2) = 1/(4\pi F), \quad \delta = c^2/(2\omega)(\omega^2/c^2 - k^2)\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где $T_2^{(1,2)}$ – время поперечной релаксации, $d_{1,2}$ – дипольные моменты резонансных переходов для первого и второго компонентов, $F=d^2/(\lambda L)$ – число Френеля. Параметр Δ в (3) определяет величину отстройки резонансных частот компонентов. Безразмерные плотности инверсии населенностей первого компонента, изначально возбужденного (R), и второго компонента, изначально поглощающего (r), нормированы следующим образом:

$$R(\mathbf{r}, t) = \rho_1(\mathbf{r}, t)/(N/V), \quad r(\mathbf{r}, t) = \rho_2(\mathbf{r}, t)/(N/V), \quad (6)$$

где N/V – плотность числа атомов первого компонента. Следовательно, $-1 \leq R \leq 1$, $-r_0 \leq r \leq r_0$, где r_0 – концентрация поглощающего компонента. Безразмерные медленно меняющиеся амплитуды встречных волн $a_{1,2}$ в (3) нормированы таким образом, что плотность энергии поля определяется выражением

$$w(\mathbf{r}, t) = \hbar\omega(N/V) \sum_{n=1}^2 |a_n(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (7)$$

Нормировка амплитуд волн поляризации, создаваемых первым ($p_{1,2}$) и вторым ($q_{1,2}$) компонентами, однозначно определяется выражениями (4), (6), (7). Слагаемые, пропорциональные p_0 и q_0 в правых частях уравнений для поля системы уравнений (3), моделируют источники спонтанной поляризации.

Система уравнений (3) решается со следующими начальными

$$a_{1,2}(x, z, 0) = 0, \quad p_{1,2}(x, z, 0) = q_{1,2}(x, z, 0) = 0, \quad (8)$$

$$R(x,z,0) = 1, \quad r(x,z,0) = -r_0$$

и граничными

$$a_1(x=0,z,t) = a_2(x=1,z,t) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial z}(x,z=0,t)=0, \quad \frac{\partial a_{1,2}}{\partial z}(x,z=\pm Z,t)=0 \quad (10)$$

условиями.

Пусть $\beta_1 < \beta_2$ или $d_1 < d_2$, тогда начальные условия (8) означают, что компонент с меньшей величиной дипольного момента перехода в начальный момент возбужден, а второй компонент находится на нижнем уровне резонансного перехода. Поскольку частота Раби пропорциональна величине дипольного момента перехода, то мы будем называть среду «1» медленной, а среду «2» – быстрой.

Условия (9) означают отсутствие отражения поля на торцах активной среды. Первое из условий (10) следует из начальных условий (8) и означает, что при симметричных относительно замены $z \rightarrow -z$ начальных условиях решение также будет симметрично относительно указанной замены. Действительно, система уравнений (3) симметрична относительно преобразования $z \rightarrow -z$, поэтому её решения должны удовлетворять следующим условиям: $a(x,-z,t) = \pm a(x,z,t)$, $p_n(x,-z,t) = \pm p_n(x,z,t)$, $q_n(x,-z,t) = \pm q_n(x,z,t)$. Поскольку при выводе уравнений (3) производилось усреднение по физически малому объему, то однородные условия (8) соответствуют ситуации, когда поперечный размер среды много больше межатомного расстояния, и, следовательно, мы можем не учитывать флуктуаций спонтанного поля.

2. Влияние поперечной диффузии поля на динамику двухкомпонентного СИ

2.1. Планарный слой. На рис. 1 показана зависимость пиковой интенсивности импульса от величины параметра γ при различных значениях отстройки Δ резонансных частот компонентов среды. Параметр γ обратно пропорционален числу Френеля F . При $\gamma = 0$ система уравнений (3) совпадает с одномерной системой уравнений Максвелла – Блоха. Мы видим, что с ростом γ происходит уменьшение интенсивности генерируемых импульсов. Это связано с тем, что при $F \ll 1$ характерная ширина распределения поля по координате z за счет эффектов поперечной диффузии становится больше толщины среды d и эффективность взаимодействия поля и среды уменьшается. При $\Delta \neq 0$ зависимость интенсивности импульса от γ становится не монотонной. Это связано с проявлением модовой структуры поля по поперечной координате. Ранее было показано [8], что в рамках одномерной модели интенсивность двухкомпонентного СИ выше при отстройке быстрого компонента, чем в точном резонансе. Как видно из рис.1, это имеет место и при $\gamma > 0$. Однако динамика генерации пространственно ограниченных сред зависит от знака отстройки Δ .

На рис. 2 показана зависимость пиковой интенсивности импульса двухкомпонентного СИ от величины отстройки Δ при различных значениях γ . В одномерном случае, то есть при $\gamma = 0$, как было показано в [8], существует оптимальная величина расстройки Δ_0 резонансных частот компонентов. Как показали теоретические исследования и численные эксперименты, $\Delta_0 \approx \alpha_2$, то есть оптимальная величина отстройки равна полуширине линии резонансного перехода быстрых атомов. При $\gamma = 0$ зависимость $I_0(\Delta)$ является симметричной. При $\gamma > 0$ указанная симметрия пропадает. Такое поведение $I_0(\Delta)$ объясняется различиями в поперечной структуре поля при $\Delta = \pm \Delta_0$. На линейной стадии развития коллективного спонтанного распада, когда $|a| \ll 1$, а $R \approx 1$ и $r \approx -r_0$, мы можем

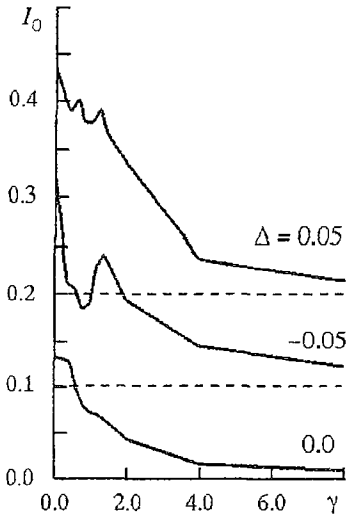


Рис. 1. Пиковая интенсивность импульсов СИ двухкомпонентной среды как функция параметра γ при различных отстройках Δ

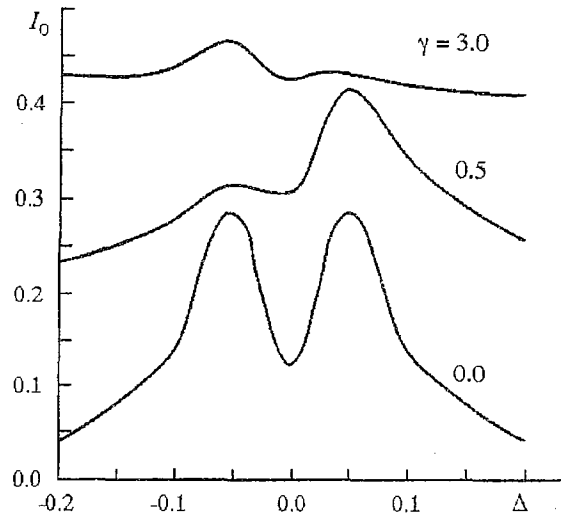


Рис. 2. Пиковая интенсивность импульсов двухкомпонентного СИ как функция отстройки Δ при различных значениях γ

говорить о диэлектрической проницаемости среды, определяющей связь k и ω в выражении (1)

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega) \approx \{1 + (2/\omega)\beta_2 r_0 \Delta / (\Delta^2 + \alpha_2^2) + i(2/\omega)[\beta_1 R_0 / \alpha_1 - \beta_1 r_0 \alpha_2 / (\Delta^2 + \alpha_2^2)]\}^{1/2}.$$

При $\epsilon'(\omega) > 1$ на границе раздела среда – вакуум мы будем иметь полное внутреннее отражение для скользящего падения поля на границу раздела. Это означает, что при $\Delta > 0$ поле концентрируется в образце и эффективность взаимодействия поля и среды растет. При $\Delta < 0$ действительная часть диэлектрической проницаемости $\epsilon'(\omega) < 1$ и ширина поперечного распределения поля растет. Таким образом, мы видим, что в поперечно неоднородных средах появляется селективность по отстройке частоты быстрых атомов относительно частоты медленных. Величина отстройки Δ_0 , при которой достигается абсолютный максимум интенсивности генерации, лежит также вблизи $\Delta_0 \approx \alpha_2$. Однако, как это видно из рис. 2, ее знак зависит от величины числа Френеля, то есть от поперечной структуры поля в среде. На рис. 3 показаны профили импульсов двухкомпонентного СИ при различных

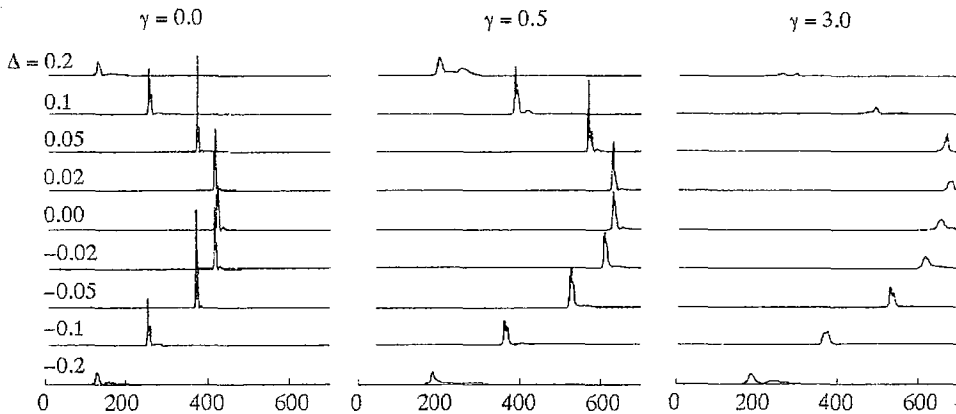


Рис. 3. Профили импульсов СИ на выходе двухкомпонентной среды при различных γ, Δ

значениях параметров γ и Δ . Мы видим, что с ростом $|\Delta|$ происходит уменьшение времени задержки $t_0(\Delta)$ импульса СИ. Из рисунка также видно, что скорость спадания времени задержки с ростом Δ зависит от величины параметра γ , то есть числа Френеля. При $\gamma = 0.5$ в диапазоне $-\alpha_2 \leq \Delta \leq \alpha_2$ разброс времени задержки составляет не более 10% от его величины. Это обстоятельство имеет большое практическое значение, поскольку дает возможность формирования узкого импульса СИ с большим временем задержки в неоднородно уширенной среде. Отметим, что время задержки импульса СИ определяет предельную длительность импульса накачки, поэтому возможности преобразования длинного импульса накачки в ультракороткий импульс СИ однозначно определяются величиной отношения времени задержки к длительности импульса СИ.

2.2. Планарный слой с отражением на боковых границах. Рассмотрим теперь случай, когда боковые грани планарного слоя являются полностью отражающими. В этом случае граничные условия (10) заменяются следующими:

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial z}(x, z=0, t) = 0, \quad a_{1,2}(x, z=\pm 1/2, t) = 0. \quad (11)$$

На рис. 4 показаны зависимости пиковой интенсивности импульса СИ от величины параметра γ при различных значениях отстройки Δ . Как видно из рисунка, проявления поперечной модовой структуры поля в этом случае выражены значительно более ярко. Изменение поперечной толщины слоя в области $0 \leq \gamma \leq 2$ приводит к значительному изменению соотношения пиковых интенсивностей импульсов для различных отстроек Δ . Пиковая интенсивность импульсов перестает падать с ростом γ , то есть с изменением поперечной толщины слоя d . При больших значениях γ пиковая интенсивность импульсов перестает сильно зависеть от отстройки Δ , а ее величина становится близка к значению $I(\Delta=0)$ для $\gamma = 0$.

При нулевой отстройке частот компонентов ($\Delta = 0$) вариацией γ можно приблизительно вдвое увеличить пиковую интенсивность импульсов. Наиболее

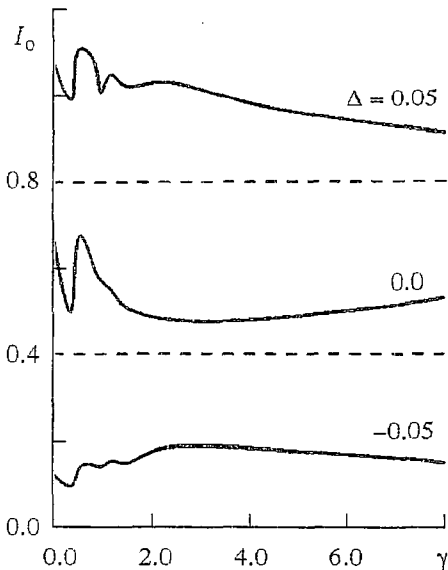


Рис. 4. Зависимость пиковой интенсивности импульсов СИ двухкомпонентной среды от параметра γ при различных значениях Δ при наличии отражающих покрытий

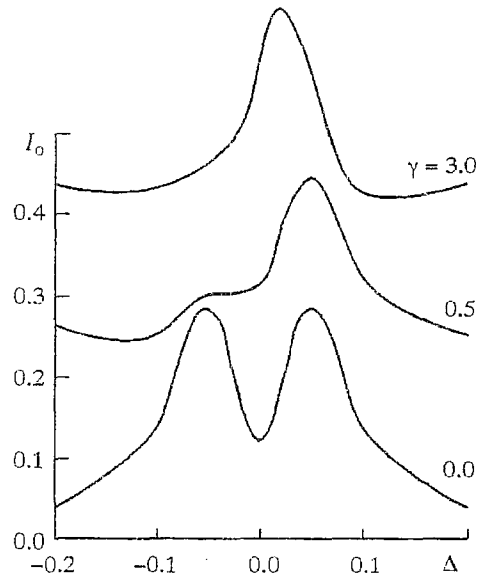


Рис. 5. Зависимость пиковой интенсивности импульса двухкомпонентного СИ от Δ для различных γ при использовании отражающих покрытий

значительно поперечная структура поля проявляется при ненулевых значениях отстройки. Как видно из сравнения кривых для $\Delta=0.05$ и $\Delta=-0.05$, при $\gamma \neq 0$ параметры импульсов зависят от знака отстройки Δ . Зависимость пиковой интенсивности импульсов от величины отстройки Δ при различных значениях γ показана на рис. 5.

2.3. Особенности динамики двухкомпонентного СИ поперечно неоднородных сред. Таким образом, проведенные численные эксперименты показывают, что параметры импульсов, генерируемых двухкомпонентными поперечно неоднородными средами, существенно зависят от геометрии активного объема. Оптимальными являются среды, для которых поперечная толщина d удовлетворяет условию $\gamma \leq 2$. При $\gamma > 2$ интенсивность импульсов значительно ниже, чем в области $0 < \gamma \leq 2$, и она монотонно убывает с ростом γ . В пространственно неоднородных средах в области $0 < \gamma \leq 2$ параметры импульсов СИ зависят от знака отстройки Δ , что связано с проявлением поперечной модовой структуры поля.

Использование полностью отражающих покрытий на боковых гранях активного объема позволяет эффективно управлять динамикой различных спектральных компонентов неоднородно уширенных сред. В области $0 \leq \gamma \leq 1$ незначительное изменение γ приводит к значительному изменению соотношения скоростей коллективного распада различных компонент неоднородного спектра. В противоположность этому, при больших значениях γ скорости коллективного распада различных спектральных компонентов уравниваются. Следовательно, варьируя расстояние между зеркалами, ограничивающими поперечный размер активной среды, мы можем эффективно управлять спектром импульсов, генерируемых двухкомпонентными неоднородно уширенными средами.

3. Управления параметрами импульсов двухкомпонентного СИ вариацией продольного профиля распределения компонентов

Выше мы рассмотрели случай, когда оба компонента среды находятся в одном и том же объеме V . Пусть теперь объемы, занятые медленным и быстрым компонентом, не совпадают. Ограничимся для простоты случаем $\gamma \ll 1$, когда применима одномерная модель. Пусть L – длина медленной среды, то есть в безразмерных единицах медленный компонент находится в области $0 \leq x \leq 1$. Будем считать, что быстрая среда находится в области $x_1 \leq x \leq 1$, где $x_1 \in [0, 1]$. Следовательно, при $x_1=0$ мы имеем однородную двухкомпонентную среду, у которой быстрые и медленные атомы равномерно распределены в области $0 \leq x \leq 1$. При $x_1 = 1$ среда становится однокомпонентной, состоящей лишь из медленных атомов. Выберем следующие значения безразмерных параметров сред:

$$\alpha_1 = 0.01, \beta_1 = 1.0, \alpha_2 = 0.04, \beta_2 = 4.0, R_0 = 1.0, r_0 = 0.75, \Delta = 0.0.$$

Значение r_0 выбрано из тех соображений, что при указанных значениях остальных параметров задачи в случае $x_1 = 0$ достигается максимальное значение интенсивности СИ двухкомпонентной среды.

На рис. 6 показана зависимость пиковой интенсивности, длительности и времени задержки импульса генерации от величины параметра x_1 . Мы видим, что варьируя длину объема, занятого быстрыми атомами, мы можем на порядок величины поднять интенсивность импульса генерации и более чем в три раза сократить его длительность. Одновременно с сокращением импульса происходит и уменьшение времени задержки t_0 . Однако, при $x_1 \approx 0.1$, для которого максимальна интенсивность и минимальна длительность импульса, время задержки более чем на два порядка превосходит длительность импульса. Следовательно, мы не теряем

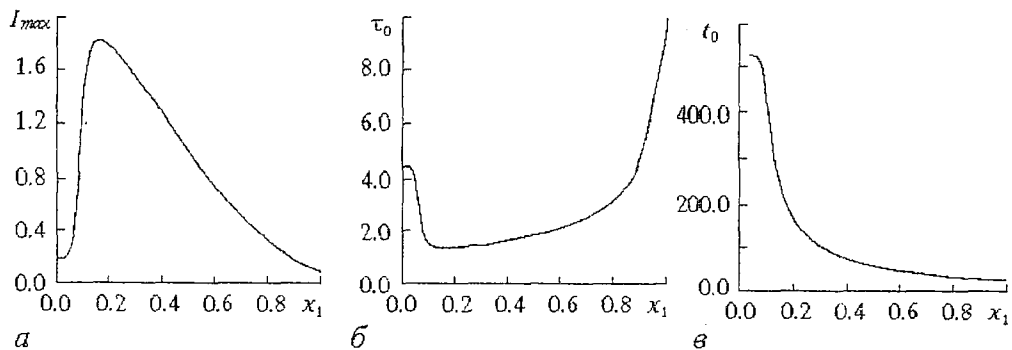


Рис. 6. Зависимости пиковой интенсивности (а), длительности (б) и времени задержки (в) импульсов СИ от величины параметра x_1 составной двухкомпонентной среды

возможности преобразования широких импульсов накачки в ультракороткие импульсы СИ.

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что существует оптимальное соотношение длин, занятых медленными $L_1 = 1$ и быстрыми $L_2 = 1 - x_1$ атомами, которое зависит от соотношения дипольных моментов, ширины линий и концентрации компонентов. В чем причина резкого возрастания интенсивности коллективного распада двухкомпонентных составных сред? Таких причин две. Первая заключается в том, что составная среда селективна по направлению генерации. На рис. 6 показана интенсивность волны, распространяющейся слева направо, то есть в точке $x = 1$. Интенсивность встречной волны на левом конце активной среды $x = 0$ пренебрежимо мала, как это показано на рис. 7. Вторая причина состоит в том, что спонтанный распад медленных атомов в области, занятой двухкомпонентной средой, подавлен по сравнению с процессом, происходящим в однокомпонентной среде ($0 \leq x \leq x_1$) медленных атомов. Это и приводит к резкой асимметрии пространственно-временной динамики волн, распространяющихся в составной среде слева направо и справа налево. Варьируя соотношение L_1/L_2 , мы можем практически полностью подавить одну из волн, как это видно из сравнения рис. 6 и 7, и получить однонаправленную коллективную генерацию.

На рис. 8 показана зависимость параметров импульсов генерации для другой

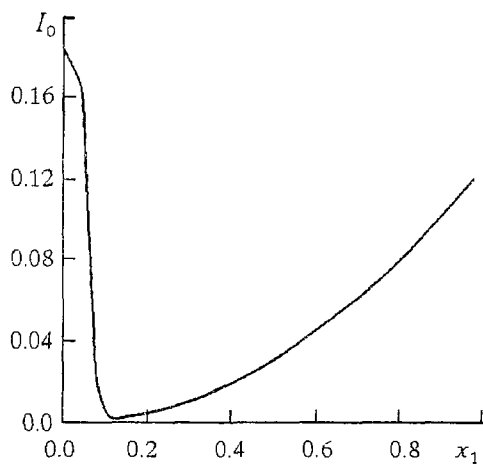


Рис. 7. Пиковая интенсивность обратной волны составной двухкомпонентной среды в зависимости от значения параметра x_1

геометрии эксперимента. В этом случае двухкомпонентная среда, состоящая из медленных и быстрых атомов, находится в области $0 \leq x \leq 1$, а в области $-l \leq x \leq 0$ находится однокомпонентная среда медленных атомов. Представленные на рисунке графики есть зависимости пиковой интенсивности, длительности и времени задержки импульса генерации от длины участка l , занятого лишь медленными атомами. Как видно из рисунка, резкое нарастание пиковой интенсивности и сокращение длительности импульса происходит лишь до тех пор, пока l не достигнет оптимального значения l_{opt} . Дальнейшее увеличение l приводит к медленному нарастанию интенсивности импульса и практически не изменяет его длительность.

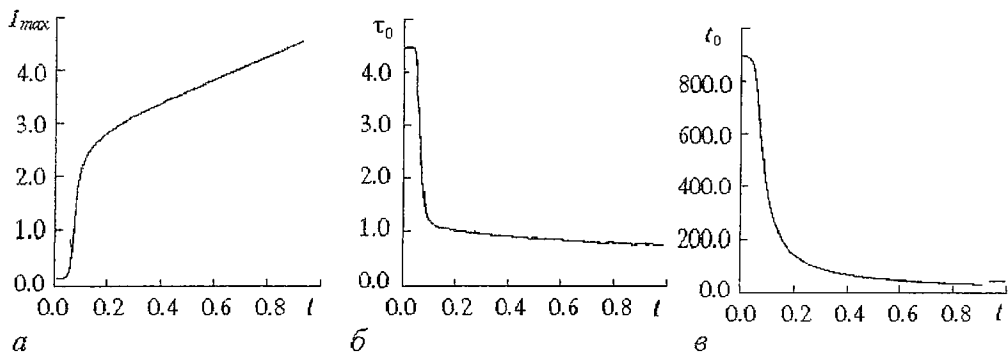


Рис. 8. Зависимости пиковой интенсивности (а), длительности (б) и времени задержки (в) импульсов СИ от длины участка l для составной двухкомпонентной среды

Заключение

Проведенные численные эксперименты позволяют сделать вывод: зависимость динамики СИ двухкомпонентных сред от геометрии среды принципиально отличается от соответствующих зависимостей для однокомпонентных сред. Это открывает новые возможности управления параметрами импульсов двухкомпонентного СИ. Варьируя размер поперечной и продольной неоднородностей среды, мы можем в широких пределах управлять интенсивностью и длительностью импульсов СИ. При оптимальных значениях поперечной и продольной неоднородностей возможно более чем на порядок увеличить интенсивность и сократить длительность импульсов. Такая резкая зависимость параметров импульсов генерации от геометрии среды связана с селекцией пространственных мод поля в активном объеме. Как известно [9], при коллективной генерации интенсивность генерации каждой моды падает квадратично с увеличением числа мод генерации. Поэтому селекция пространственных мод на начальном этапе генерации позволяет существенно увеличить интенсивность генерируемого импульса.

Приложение 1

Некоторые математические аспекты численного моделирования одномерных задач динамики СИ

С математической точки зрения рассмотренные в разделе 3 задачи описываются системами гиперболических уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial u_k}{\partial x} &= R_k(\mathbf{u}), & k=1, \dots, N_1, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} - \frac{\partial u_k}{\partial x} &= R_k(\mathbf{u}), & k=N_1+1, \dots, N_2-1, \\ \frac{\partial u_k}{\partial t} &= R_k(\mathbf{u}), & k=N_2, \dots, N, \quad \mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_N\}, \quad (x, t) \in P = (0, X) \times (0, T], \end{aligned} \quad (12)$$

где N_1 – число неизвестных функций, удовлетворяющих уравнению первого типа, а N – полное число неизвестных функций. Введем обозначения

$$\mathbf{u}^+ = \{u_1, \dots, u_{N_1}\}, \quad \mathbf{u}^- = \{u_{N_1+1}, \dots, u_{N_2-1}\}, \quad \mathbf{u}^0 = \{u_{N_2}, \dots, u_N\}.$$

Для системы (12) ставятся начальные и граничные условия

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{p}(x), \quad \mathbf{u}^+(0, t) = \mathbf{q}^+(t), \quad \mathbf{u}^-(X, t) = \mathbf{q}^-(t). \quad (13)$$

Опишем численный метод решения (12), (13). Введем равномерную сетку

$$\omega_h = \{(x_i, t_n) : x_i = ih, t_n = nh, h = X/N_x, T = N_t h\}. \quad (14)$$

На ней определим следующую аппроксимацию начально–краевой задачи (12), (13):

$$\begin{aligned} [(\mathbf{y}^+)_{n+1}{}^{i+1} - (\mathbf{y}^+)_n{}^i]/h &= \mathbf{R}(((\mathbf{y})_{n+1}{}^{i+1} + (\mathbf{y})_n{}^i)/2), \\ [(\mathbf{y}^-)_{n-1}{}^{i+1} - (\mathbf{y}^-)_n{}^i]/h &= \mathbf{R}(((\mathbf{y})_{n-1}{}^{i+1} + (\mathbf{y})_n{}^i)/2), \\ [(\mathbf{y}^0)_{n+1}{}^{i+1} - (\mathbf{y}^0)_n{}^i]/h &= \mathbf{R}(((\mathbf{y})_{n+1}{}^{i+1} + (\mathbf{y})_n{}^i)/2). \end{aligned} \quad (15)$$

Пусть начальные и граничные условия аппроксимируются точно

$$\begin{aligned} (\mathbf{y})_n{}^0 &= \mathbf{p}(nh), & n &= 0, \dots, N_x, \\ (\mathbf{y}^+)_0{}^i &= \mathbf{q}^+(ih), & i &= 0, \dots, N_t, \\ (\mathbf{y}^-)_{N_x}{}^i &= \mathbf{q}^-(ih), & i &= 0, \dots, N_t. \end{aligned} \quad (16)$$

Предположим, что для рассмотренных в разделе 3 задач динамики СИ точка разрыва плотности поглощающих атомов приходится на узел сетки. Тогда для достаточно гладких начальных и граничных функций численный метод (15), (16) имеет второй порядок точности и является консервативным. На его основе, применяя методику, изложенную в [10], удастся разработать методы повышенного порядка точности. Можно показать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Предположим, что $p_k(x) \in C^{2r+3}(0, X)$, $k=1, \dots, N$; $q_k(t) \in C^{2r+3}(0, T)$, $k=1, \dots, N_2-1$, где $r \geq 0$ – заданное целое число. Зафиксируем числа $0 < N_1 < \dots < N_{r+1}$ и построим последовательность сеток $\omega_{h_1}, \omega_{h_2}, \dots, \omega_{h_{r+1}}$ с шагами $h_k = 1/(N_k M)$. На каждой из сеток ω_{h_k} рассмотрим разностную задачу (15), (16), для которой будем предполагать существование единственного решения y_k . Составим линейную комбинацию, определенную на сетке $\omega_{h'}$ с шагом $h' = 1/M$,

$$y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{r+1} y_{r+1}. \quad (17)$$

Веса $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r+1}$ удовлетворяют системе

$$\sum_{k=1}^{r+1} \lambda_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{r+1} h^{2j} \lambda_k = 1, \quad j=1, \dots, r. \quad (18)$$

Определитель системы (18) отличен от нуля, следовательно, её решение существует. Тогда имеет место оценка

$$\|y - R_h \mathbf{u}\|_{C, h} \leq C_1 h^{2(r+1)}. \quad (19)$$

где R_h – оператор, ставящий в соответствие функции, определенной на прямоугольнике P , сеточную функцию по правилу

$$R_h \mathbf{u}(nh, ih) = \mathbf{u}(nh, ih), \quad n=0, \dots, N_x, \quad i=1, \dots, N_t.$$

Приложение 2

Оптимизация профиля распределения плотностей компонентов и методы оптимального управления в задачах динамики СИ

Введем в задачу (12), (13) управляющие воздействия и запишем ее следующим образом:

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + \Lambda \partial \mathbf{u} / \partial x = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1(x, t), \mathbf{v}_2(x), \mathbf{v}_3(t), \mathbf{v}_4). \quad (20)$$

Здесь $(x, t) \in P$, Λ – диагональная матрица, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ – N -мерный вектор состояния; $\mathbf{v}_1(x, t), \mathbf{v}_2(x), \mathbf{v}_3(t), \mathbf{v}_4$ – управляющие функции. В обозначениях приложения 1 для системы (20) поставим граничные и начальные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{p}(\mathbf{v}_1^0(x), \mathbf{v}_2^0, x), \quad x \in [0, X], \\ \mathbf{u}^+(0, t) &= \mathbf{g}^+(\mathbf{v}_1^+(t), \mathbf{v}_2^+, t), \quad t \in [0, T], \\ \mathbf{u}^-(X, t) &= \mathbf{g}^-(\mathbf{v}_1^-(t), \mathbf{v}_2^-, t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (21)$$

В (20) и (21) $\mathbf{v}_1(x, t), \mathbf{v}_2(x), \mathbf{v}_3(t), \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1^0(x), \mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_1^+(x), \mathbf{v}_2^+, \mathbf{v}_1^-(x), \mathbf{v}_2^-$ – векторные управления, причем $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_2^0, \mathbf{v}_2^+, \mathbf{v}_2^-$ не зависят от x и t . Ставится задача минимизации функционала

$$I(\mathbf{u}) = \int_0^X \varphi(\mathbf{u}(x, 0), x) dx + \int_0^T [\varphi_0(\mathbf{u}^-(0, t), t) + \varphi_1(\mathbf{u}^+(X, t), t)] dt + \iint_P \Phi(\mathbf{u}(x, t), x, t) dx dt \quad (22)$$

на множестве допустимых управлений, которыми являются наборы функций со значениями из заданных ограниченных множеств соответствующих евклидовых пространств. Один из подходов к исследованию задач оптимального управления для гиперболических систем уравнений основан на применении принципа максимума [11]. Мы рассмотрим конечно-разностный метод решения поставленной задачи минимизации.

Опишем сеточный аналог (20), (21). Для этого введем в рассмотрение дискретные управления в виде сеточных функций. Аппроксимируем (20), (21) разностным методом (15), (16). На решении полученной системы разностных уравнений ищем минимум функционала

$$\begin{aligned} I_h(\mathbf{u}) &= \sum_j \varphi(\mathbf{u}_h(jh, 0), jh) h + \sum_i [\varphi_0^-(\mathbf{u}_h(0, ih), ih) + \varphi_0^+(\mathbf{u}_h(X, ih), ih)] h + \\ &+ \sum_{j,i} \Phi(\mathbf{u}_h(jh, ih), jh, ih) h^2 \end{aligned} \quad (23)$$

на множестве допустимых управлений, значения которых выбираются из тех же ограниченных множеств, что были введены для допустимых управлений дифференциальной задачи. Здесь $\mathbf{u}_h(jh, ih)$ – решение разностной системы. Методы численного моделирования дискретных задач оптимального управления хорошо известны [12–14]. Будем предполагать, что решения задач оптимизации в дискретном и непрерывном случаях существуют.

Обозначим какое-нибудь оптимальное управление непрерывной задачи через $\bar{\xi} = \{\mathbf{v}_{1, \text{opt}}(x, t), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}(x), \mathbf{v}_{3, \text{opt}}(t), \mathbf{v}_{4, \text{opt}}, \mathbf{v}_{1, \text{opt}}^0(x), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^0, \mathbf{v}_{1, \text{opt}}^+(x), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^+, \mathbf{v}_{1, \text{opt}}^-(x), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^-\}$, соответствующее решение через $z(x, t)$. Оптимальное управление дискретной задачи – $\bar{\xi}_h$, а соответствующее решение – $\bar{x}_h(ih, jh)$. Пусть ξ_h – дополнение управления $\bar{\xi}_h$ кусочно-линейным образом, совпадающее с ним в узловых точках, $z_h(x, t)$ – соответствующее ξ_h решение дифференциальной задачи. Можно показать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Предположим, что $\mathbf{f}, \mathbf{p}, \mathbf{g}^+, \mathbf{g}^-, \varphi, \varphi_0^-, \varphi_0^+, \Phi$ – непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, t) &= \mathbf{f}(z(x, t), \mathbf{v}_{1, \text{opt}}(x, t), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}(x), \mathbf{v}_{3, \text{opt}}(t), \mathbf{v}_{4, \text{opt}}), \\ \mathbf{q}_0(x) &= \mathbf{p}(\mathbf{v}_{1, \text{opt}}^0(x), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^0, x), \\ \mathbf{q}^+(t) &= \mathbf{g}^+(\mathbf{v}_{1, \text{opt}}^+(t), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^+, t), \\ \mathbf{q}^-(t) &= \mathbf{g}^-(\mathbf{v}_{1, \text{opt}}^-(t), \mathbf{v}_{2, \text{opt}}^-, t). \end{aligned} \quad (24)$$

Допустим, выбранное оптимальное управление непрерывной задачи таково, что функция $q(x,t)$ непрерывно дифференцируема вдоль любой характеристики системы за исключением конечного числа (меньше заданного $k \geq 0$) точек разрыва первого рода. Пусть функции $q^0(x)$, $q^+(t)$, $q^-(t)$ также непрерывно дифференцируемы и имеют только разрывы первого рода в количестве, меньшем k . Тогда оптимальное управление дискретной задачи сходится при $h \rightarrow 0$ к оптимальному управлению непрерывной задачи по функционалу и имеет место оценка

$$0 \leq I(\bar{z}_h) - I(\bar{z}) \leq C_2 h. \quad (25)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания Гособразования РФ (шифр проекта 95-0-5.5-177).

Библиографический список

1. Ханин Я.И. Динамика квантовых генераторов. М.: Советское радио, 1975.
2. Крюков П.Г., Летохов В.С. Распространение импульса света в резонансно усиливающей (поглощающей) среде // УФН. 1969. Т. 99, № 2. С. 169.
3. Андреев А.В., Полевой П.В. Сверхизлучение двухкомпонентных сред // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57, № 2. С. 99.
4. Andreev A.V., Polevoy P.V. Superradiance of two-component media // Quantum Optics. 1994. Vol. 6. P. 57.
5. Андреев А.В., Полевой П.В. Генерация ультракоротких импульсов двухкомпонентными сверхизлучающими средами // Квантовая электроника. 1993. Т. 20, № 10. С. 991.
6. Andreev A.V., Polevoy P.V. Superradiance in IR and optical transitions of molecules // Infrared Phys. Tech. 1995. Vol. 36. P. 15.
7. Андреев А.В., Полевой П.В. Динамика усиления и распространения импульсов в двухкомпонентных средах // ЖЭТФ. 1994. Т. 106, № 5. С. 1343.
8. Андреев А.В., Полевой П.В. Сверхизлучение двухкомпонентных квазирезонансных сред // Квантовая электроника. 1996. Т. 23. С. 647.
9. Andreev A.V., Emelyanov V.I., Ilinskii Ya.A. Cooperative Effects in Optics. Bristol and Philadelphia: IOP Publ., 1993.
10. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности разностных схем. М.: Наука, 1979.
11. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 2. Оптимальное управление / Под ред. О.В. Васильева, В.А. Срочко, В.А. Телецкого. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1990.
12. Ермольев Ю.М., Гуленко В.П., Царенко Г.И. Конечно-разностный метод в задачах оптимального управления. Киев: Наукова думка, 1978.
13. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.
14. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1979.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию 25.12.96
после переработки 25.03.97

SUPERRADIANCE OF TWO-COMPONENT SPATIAL INHOMOGENEOUS MEDIA

A.V. Andreev, S.L. Sheetlin

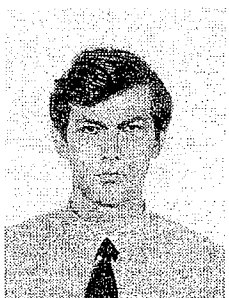
The two-component superradiative medium consists of two species of atoms with the different dipole moments of the quasi-resonant transitions. The atoms with the smaller dipole moment are initially in the excited state, while the atoms of the second type are initially in the ground state. In the initial stage of the superradiance dynamics the first component is amplifying one, the second component is resonantly absorbing.

By varying the concentration of the resonantly absorbing atoms it is possible to increase the intensity of superradiance in the few order of magnitude with respect to the monocomponent medium of the amplifying atoms alone.

Here we show that the variation in the distribution of the component densities enables us the additional possibilities in the control of the superradiance pulse parameters. The additional increase in the order of magnitude for the peak pulse intensity is obtained at the optimal distribution. The nature of such variation in the pulse profile and its intensity is due to the opportunity for the effective spatial mode selection in the spatial inhomogeneous media. We discuss the algorithms of the numerical solution and show that the enhanced accuracy methods can be developed in this case.



Андреев Анатолий Васильевич – родился в 1951 году, окончил физический факультет Московского государственного университета (1975). После окончания аспирантуры (1978) работает на физическом факультете МГУ, с 1993 года – в должности профессора кафедры общей физики и волновых процессов. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1978) и доктора физико-математических наук (1989) в области теоретической квантовой электроники, теории волн, рентгеновской оптики. Соавтор монографий «Кооперативные явления в оптике» (Наука, 1988), «Cooperative Effects in Optics» (IOP Publ., 1993).



Шитлин Сергей Леонидович – родился в 1971 году, окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета (1993), аспирантуру (1996). Занимается математическим моделированием процессов сверхизлучения многоуровневых и многокомпонентных сред.