



## ДИНАМИКА ОТОБРАЖЕНИЙ С ПОРОГОВЫМ ТИПОМ СВЯЗИ

*А.А. Короновский, В.И. Пономаренко, Д.И. Трубецков*

В данной работе рассматривается система логистических отображений с принципиально новым типом связи, поведение которой существенным образом отличается от поведения логистических отображений с традиционными типами связей. Исследование динамики системы проведено как численно, так и с помощью натурального эксперимента. Получены двухпараметрические карты режимов на плоскости управляющих параметров.

1. Системы с дискретным временем весьма широко исследуются физиками и математиками [1,2] и используются для описания процессов самой различной природы: дискретные отображения весьма успешно описывают не только физические, но и экологические, экономические и социальные процессы [3–5]. Внимание к системам с дискретным временем определяется их относительной простотой и возможностью их довольно быстрого исследования в широком диапазоне изменения значений управляющих параметров. Более того, именно на языке систем с дискретным временем возможно наиболее понятное и «прозрачное» объяснение природы хаотической динамики, сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим. В этом смысле логистическое отображение играет фундаментальную роль в теории критических явлений у порога динамического хаоса [6]. Кроме того, на основе отображений, в том числе и на основе логистического отображения, строятся широкие классы связанных отображений, цепочек и решеток отображений, которые моделируют распределенные системы и играют важную роль в понимании динамики подобных систем [1].

2. В этой работе мы рассмотрим динамику системы, описываемой связанными логистическими отображениями, в поведении которых принципиальную роль играют кусочно–линейные характеристики. Заметим, что простейшие кусочно–линейные отображения очень хорошо изучены и в определенном смысле являются классическими, наряду с логистическим отображением (например, преобразование пекаря [7], «остроконечное» преобразование [8]). Более того, классическое логистическое отображение при определенном значении параметра при помощи взаимно однозначного преобразования может быть преобразовано к виду кусочно–линейного отображения [9]. В этой же работе будут рассматриваться логистические отображения с принципиально новым типом связи, который мы называем «пороговой связью». Кусочно–линейная характеристика и обеспечивает пороговый характер взаимодействия отображений и является принципиально

важной для всей динамики системы в целом. Заметим, что поскольку тип связи является принципиально новым, то одним из важных вопросов будет следующий: насколько существенным окажется влияние нового механизма связи? Иными словами, будет ли поведение хорошо изученных логистических отображений, связанных пороговой связью, каким-либо существенным образом отличаться от поведения тех же самых логистических отображений с «традиционными» типами связей (скажем, с диссипативной связью), которые в настоящее время широко исследуются в литературе (см., например, [10]).

Для начала рассмотрим два логистических отображения, двунаправленным образом связанных друг с другом

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n[a - x_n \pm s \cdot \text{sign}(y_n - y_s)], \\y_{n+1} &= y_n[a - y_n \pm s \cdot \text{sign}(x_n - x_s)],\end{aligned}\tag{1}$$

Выбор параметров  $a$  и  $s$  осуществляется таким образом, чтобы каждое из логистических отображений по отдельности не демонстрировало никакой сложной динамики. Когда же рассматриваются связанные отображения, то поведению каждого из них соответствует устойчивая неподвижная точка ( $a - (1 \pm s)$ ), если в другом отображении значение переменной меньше некоторого порога  $x_s$  (или  $y_s$ ). Как только значение переменной (например  $x_n$ ) превышает этот порог, в другом логистическом отображении притягивающей неподвижной точкой становится ( $a - 1 \pm s$ ) (из-за действия слагаемого  $\text{sign}(x_n - x_s)$ ). Таким образом, если попытаться в нескольких словах кратко описать суть процессов, происходящих в системе, описываемой (1), то можно сказать, что сущностью динамики системы являются переходные процессы. Каждое логистическое отображение стремится к устойчивому состоянию равновесия, и в этом случае, если слагаемые  $s \cdot \text{sign}(x_n - x_s)$  и  $s \cdot \text{sign}(y_n - y_s)$ , отвечающие за взаимосвязь отображений, взяты с одинаковыми знаками, вся система (1) весьма быстро приходит в одно из двух состояний равновесия (в зависимости от начальных условий). Наиболее же интересен случай, когда в отображениях (1) слагаемые, ответственные за связь, входят с разными знаками. В этом случае переходным процессам в каждом из отображений (разумеется, при соответствующих значениях параметров) не суждено закончиться из-за воздействия другого отображения. В рассматриваемом отображении происходит скачкообразная смена устойчивой неподвижной точки, в результате чего в системе реализуются колебательные режимы. Именно поэтому дальнейшее рассмотрение мы проводим для системы двух логистических отображений (1), в которую слагаемые связи входят со знаком «-» в первое отображение и со знаком «+» во второе.

Заметим, что исследовать систему (1) можно по-разному: во-первых, конечно же, можно осуществить численное моделирование (что, разумеется, было проведено нами в первую очередь). Однако, существует еще один способ изучения подобных систем, у которого есть ряд своих преимуществ. Речь идет об исследовании (1) с помощью радиотехнической модели, динамика которой описывается с помощью тех же самых логистических отображений, связанных двунаправленной пороговой связью. Именно при проведении натурального эксперимента появляется возможность исследования систем в реальном времени, что иногда позволяет существенно сократить трудоемкость проводимых исследований. Так натуральный эксперимент оказывает неоценимую услугу при исследовании систем с сильной мультистабильностью [11]. Более того, совпадение результатов натурального и численного экспериментов позволяет с большей степенью доверия относиться к полученным результатам.

Мы провели как численный, так и натуральный эксперименты и, забегая вперед, сразу отметим, что результаты этих экспериментов находятся в очень хорошем соответствии друг с другом.

**3.** При разработке радиотехнической модели для удобства в (1) была сделана

замена переменных  $X_n=5x_n$ ,  $Y_n=5y_n$ . При этом значения динамических переменных увеличиваются в 5 раз и становятся более удобными для экспериментального анализа. Сделав такую подстановку в (1), получаем

$$X_{n+1} = 1/5 X_n [A - X_n - S \cdot \text{sign}(Y_n - Y_s)],$$

$$Y_{n+1} = 1/5 Y_n [A - Y_n + S \cdot \text{sign}(X_n - X_s)],$$

где новые параметры отличаются от старых в 5 раз, то есть  $A=5a$ ,  $S=5s$ ,  $X_s=5x_s$ ,  $Y_s=5y_s$ .

Радиотехническая схема соответствует системе отображений (2) и представляет собой два канала ( $X$  и  $Y$ ), каждый из которых моделирует динамику одного из уравнений (2). Блок-схема радиотехнической модели имеет вид, показанный на рис. 1. Рассмотрим его работу на примере канала  $X$ . Канал  $X$  содержит нелинейный блок, формирующий зависимость  $X_{n+1}=f(X_n)$  и линейный блок, в котором осуществляется аналоговое запоминание значений  $X_n$  и  $X_{n+1}$ . Управление электронными ключами 6 и 8 линейного блока осуществляется от тактового генератора 4, причем на ключ 6 сигнал генератора подается через инвертор 5, что обеспечивает противофазное замыкание ключей (когда ключ 6 замкнут, ключ 8 разомкнут, и наоборот). Тактовый генератор является общим для каналов  $X$  и  $Y$ . В процессе работы линейный блок обеспечивает запоминание выходного напряжения нелинейного блока и трансляцию его на вход нелинейного блока, создавая таким образом изменение напряжений на конденсаторах  $C_1$  и  $C_2$ , соответствующее дискретной последовательности  $X_{n+1}=f(X_n)$ .

Нелинейный блок содержит компаратор 1, суммирующий усилитель 2 и умножитель 3, а также элементы регулировки параметров  $Y_s$ ,  $A$ ,  $S$ . На один вход компаратора 1 подается постоянное напряжение, соответствующее параметру  $Y_s$ , а на другой вход – переменная  $Y$ , вырабатываемая вторым каналом схемы. Такое включение соответствует связи, действующей со стороны второго канала на первый, со знаком «-». Напряжение на выходе компаратора соответствует функции  $\text{sign}(Y_n - Y_s)$ . Размах выходного напряжения регулируется при помощи резистивного делителя. Результирующее напряжение, равное  $S \cdot \text{sign}(Y_n - Y_s)$ , подается на один из входов суммирующего усилителя 2. На второй вход суммирующего усилителя подается регулируемое напряжение, соответствующее параметру нелинейности  $A$ , а на третий вход – напряжение с выхода линейного блока, соответствующее переменной  $X$ . Напряжение с выхода суммирующего усилителя, равное  $A - X + S \cdot \text{sign}(Y_n - Y_s)$ , подается на один из входов аналогового умножителя 3, а на другой его вход подается напряжение  $X$ . С выхода его снимается напряжение, равное  $1/10 X [A - X + S \cdot \text{sign}(Y_n - Y_s)]$ . Усилитель 10 имеет

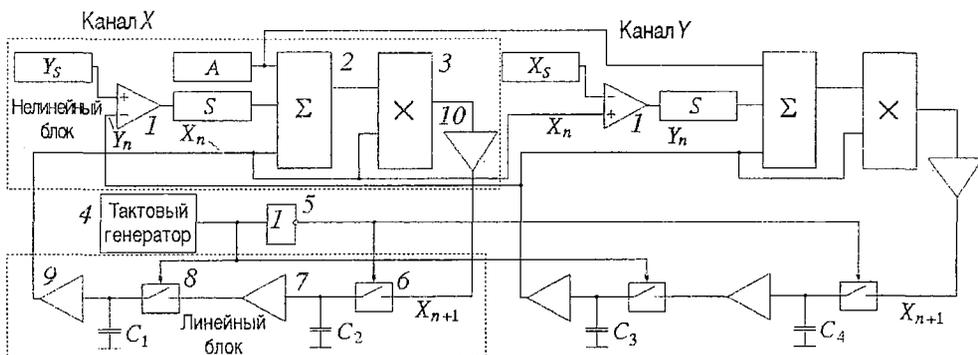


Рис. 1. Блок-схема радиотехнической модели

коэффициент усиления, равный двум, и таким образом, напряжение на его выходе равно

$1/5X[A-X+S \cdot \text{sign}(Y_n - Y_s)]$ . Канал  $Y$  отличается от канала  $X$  подключением входов компаратора, при котором реализуется пороговая связь, действующая со стороны канала  $X$  на канал  $Y$  со знаком «+».

4. В ходе численного эксперимента нами было построено несколько карт (рис. 2) на плоскости управляющих параметров  $x_s$  и  $y_s$  (при фиксированных значениях параметров  $a$  и  $s$ ), иллюстрирующих поведение рассматриваемой

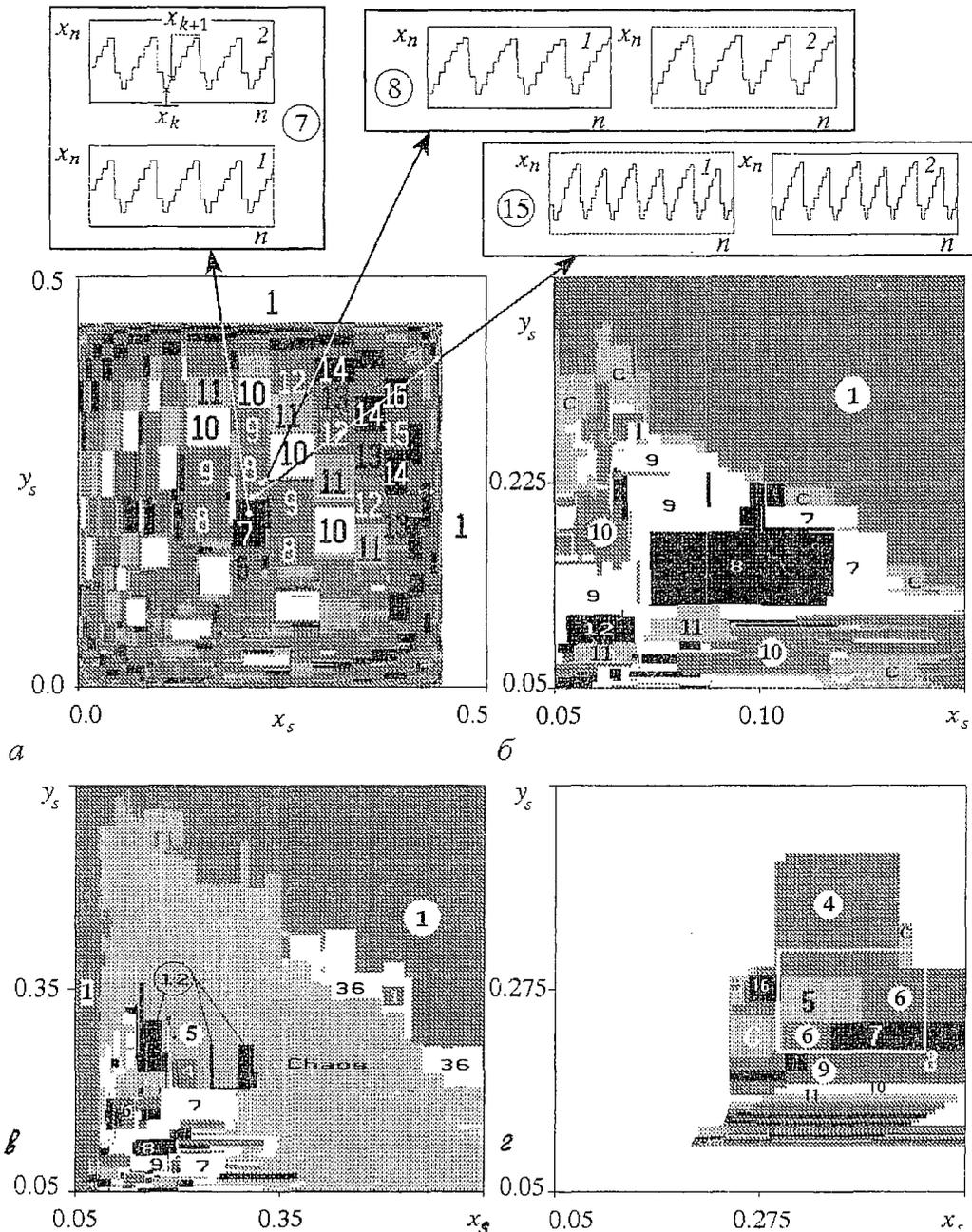


Рис. 2. Карта режимов колебаний при различных значениях параметров  $a$  и  $s$ :  $a - 1.2, 0.25$ , область параметров разделена на «равнину» и «шахматную доску»;  $b - 1.2, 0.5$ ;  $в - 1.4, 0.5$ ;  $г - 1.6, 0.5$ , на плоскости параметров появляются «дыры», где невозможно существование колебаний

системы. Результаты, полученные в ходе натурального и численного экспериментов, находятся в хорошем соответствии друг с другом и результаты натурального эксперимента полностью подтверждают (и повторяют) результаты эксперимента численного. Уже одного беглого взгляда на рисунки достаточно, чтобы понять, что динамика, демонстрируемая системой связанных логистических отображений с пороговой связью (каждое из которых по отдельности вообще не проявляет никаких колебательных режимов), весьма разнообразна: в случае, изображенном на рис. 2, *а*, плоскость управляющих параметров оказывается разделенной на две большие области – «равнину», на которой реализуются устойчивые колебания периода 1, и «шахматную доску», которая, в свою очередь, оказывается разбитой на прямоугольные области, внутри которых реализуются свои колебательные режимы. Причем, для «шахматной доски» можно выделить следующую интересную закономерность: в центре находятся колебательные режимы с малыми периодами колебаний, а при продвижении к краям «доски» происходит увеличение периода колебаний на единицу. Между областями, соответствующими колебаниям периода  $n$  и  $(n-1)$ , находятся более тонкие режимы колебаний более высоких порядков, причем для этих режимов, лежащих между режимами колебаний периода  $n$  и  $(n-1)$ , самым низким является период колебаний  $(2n-1)$ . Следует отметить, что подобный сценарий реализуется и во многих других системах как с дискретным, так и с непрерывным временем [4, 12]. На этом же рисунке показаны «временные реализации»  $x_n = x_n(n)$ , полученные в ходе натурального эксперимента для колебательных режимов (кривые 1) и соответствующие им зависимости для тех же самых режимов численного эксперимента (кривые 2). На рис. 3 приведены фазовые портреты, соответствующие характерным режимам колебаний, которые реализуются при значениях параметров  $a=1.2$ ,  $s=0.25$  и которые иллюстрируют вышеописанную закономерность: при увеличении параметра колебательный режим периода 7 (см. рис. 3, *а* с «временной реализацией» на рис. 2, *а*) сменяется режимом периода 22 (рис. 3, *б*), затем возникает режим периода 15 (рис. 3, *в*), потом режим периода 8 (рис. 3, *г*). Между режимами периодов 8 (рис. 3, *г*) и 9 (рис. 3, *е*) лежит режим периода 17 (рис. 3, *д*), а между режимами периодов 14 (рис. 3, *ж*) и 15 (рис. 3, *и*) находится режим периода 29 (рис. 3, *э*).

Заметим, что по мере приближения к краям «шахматной доски», зоны колебательных режимов становятся все уже и уже и вышеописанный механизм добавления периода колебаний начинает нарушаться. Другой особенностью поведения системы двух логистических отображений с двунаправленной пороговой связью при данных значениях параметров является полное отсутствие хаотических колебаний. Все колебательные режимы однозначно идентифицируются как сложнопериодические.

При изменении значений параметров  $a$  и  $s$  ситуация существенным образом изменяется. Так, при  $a=1.2$ ,  $s=0.5$  (см. рис. 2, *б*) «шахматная доска» уменьшается в размерах, ее внутренняя структура нарушается: теперь уже не удастся проследить закономерность, подобную той, о которой говорилось выше – области периодических колебаний беспорядочно разбросаны по плоскости управляющих параметров. Рядом с областями периодических колебаний находятся области непериодических колебаний, идентифицировать колебательные режимы в которых ни по виду фазового портрета, ни по «временным реализациям» невозможно. Ситуация усугубляется еще и тем, что не удастся выявить классических сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим (к примеру, сценария Фейгенбаума), которые позволяли бы с уверенностью утверждать, что непериодические режимы являются хаотическими: система переходит с одного листа, где реализуется периодический режим, на другой, где существует непериодический режим, скачком, характерным является существование гистерезисных складок на плоскости управляющих параметров и, соответственно, мультистабильность. Более серьезное исследование показывает, что эти области на плоскости управляющих параметров все-таки соответствуют хаотическим колебаниям: максимальный ляпуновский показатель для таких колебаний существенно положителен. Так, при  $a=1.4$ ,  $s=0.5$   $x_3=0.0845$ ,  $y_3=0.1580$

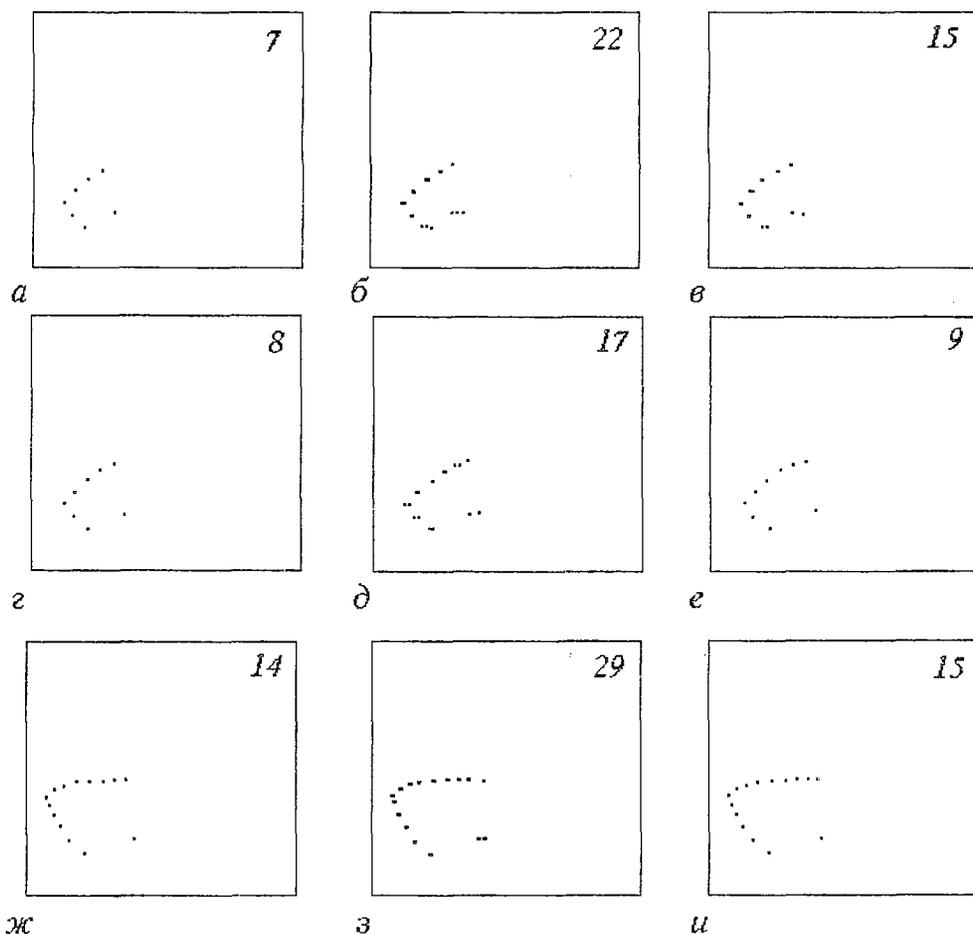


Рис. 3. Фазовые портреты некоторых характерных режимов колебаний при  $a=1.2$ ,  $s=0.25$ : а – период 7,  $x_s=0.2379$ ,  $y_s=0.2379$ ; б – период 22,  $x_s=0.2412$ ,  $y_s=0.2548$ ; в – период 15,  $x_s=0.2412$ ,  $y_s=0.2593$ ; г – период 8,  $x_s=0.2469$ ,  $y_s=0.2784$ ; д – период 17,  $x_s=0.2457$ ,  $y_s=0.3133$ ; е – период 9,  $x_s=0.2457$ ,  $y_s=0.3256$ ; ж – период 14,  $x_s=0.3695$ ,  $y_s=0.3695$ ; з – период 29,  $x_s=0.3695$ ,  $y_s=0.3706$ ; и – период 15,  $x_s=0.3695$ ,  $y_s=0.3796$

максимальный ляпуновский показатель равен  $\lambda_{\max}=+0.64$ . На рис. 4 приведены некоторые типичные фазовые портреты для хаотических колебаний.

С дальнейшим увеличением значений управляющих параметров  $a$  и  $s$  ситуация еще больше усугубляется: все то, что осталось от «шахматной доски», еще больше сжимается, а область, соответствующая хаотическим колебаниям, увеличивается (см. рис. 2, в). Дальнейшее увеличение параметров  $a$  и  $s$  приводит к тому, что на плоскости управляющих параметров  $(x_s, y_s)$  появляются «дыры», в которых решения (1) «разлетаются» – последовательность значений  $\{x_n, y_n\}$  неограниченно возрастает по модулю (см. рис. 2, г).

Еще одной характерной особенностью в поведении рассматриваемой системы двух логистических отображений с двунаправленной пороговой связью является мультистабильность (о чем уже вскользь упоминалось выше), которая проявляется с увеличением параметров  $a$  и  $s$ . При одних и тех же значениях управляющих параметров, в зависимости от предыстории движения по карте режимов, могут реализоваться несколько различных колебательных режимов. На рис. 5 воспроизведен лишь небольшой фрагмент плоскости управляющих параметров, приведенной на рис. 2, г (на рисунке этот фрагмент обведен рамкой).

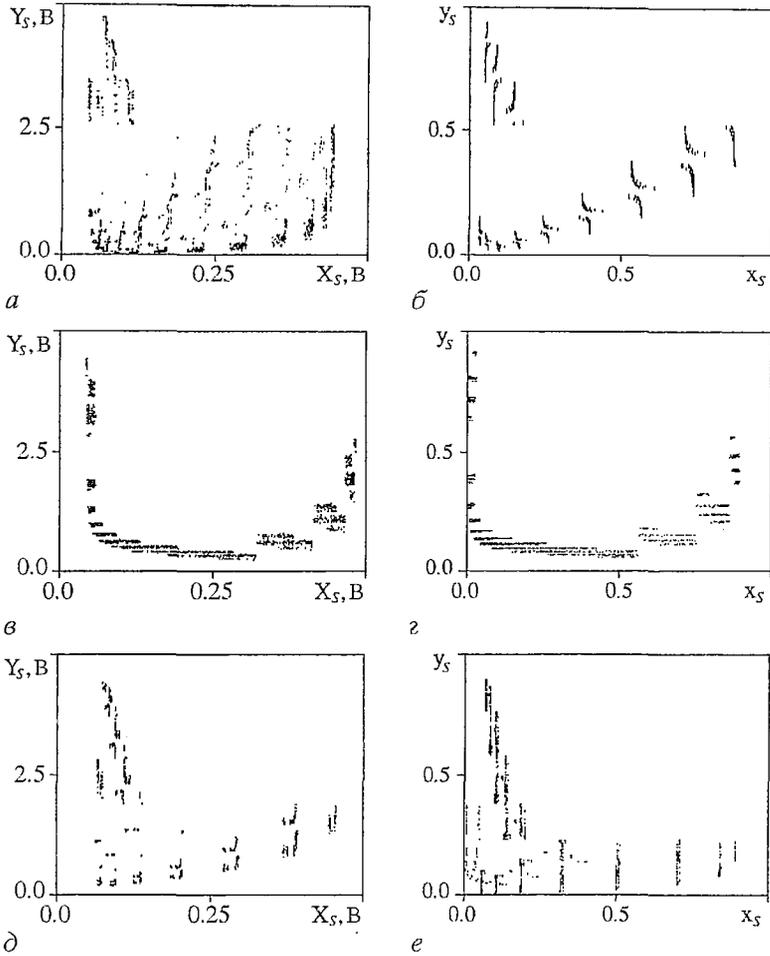


Рис. 4. Фазовые портреты некоторых хаотических режимов колебаний, полученные в ходе натурального эксперимента (*a, в, д*) и соответствующие им фазовые портреты, построенные в ходе численного эксперимента (*б, г, е*): *a* -  $A=6$  В,  $S=0.5$ ,  $X_s=0.26$  В,  $Y_s=1.26$  В; *б* -  $a=1.2$ ,  $s=0.5$ ,  $x_s=0.052$ ,  $y_s=0.252$ ; *в* -  $A=7$  В,  $S=2.5$ ,  $X_s=0.37$  В,  $Y_s=0.18$  В; *г* -  $a=1.4$ ,  $s=0.5$ ,  $x_s=0.37$ ,  $y_s=0.18$ ; *д* -  $A=7$  В,  $S=2.5$ ,  $X_s=0.4$  В,  $Y_s=0.8$  В; *е* -  $a=1.4$ ,  $s=0.5$ ,  $x_s=0.08$ ,  $y_s=0.13$

Рис. 5 в полной мере позволяет осознать, насколько сложно поведение рассматриваемой системы: на этом рисунке показаны листы, соответствующие различным режимам колебаний.

Следует отметить, что квадратичный член в отображениях (1) играет существенную роль и попытка сконструировать линейные отображения с пороговой связью по тому же принципу оказывается неудачной: решения нарастают неограниченно и ни о каких колебательных режимах говорить не приходится.

5. Таким образом, подводя итоги всему вышесказанному, еще раз подчеркнем, что нами была изучена динамика системы двух логистических

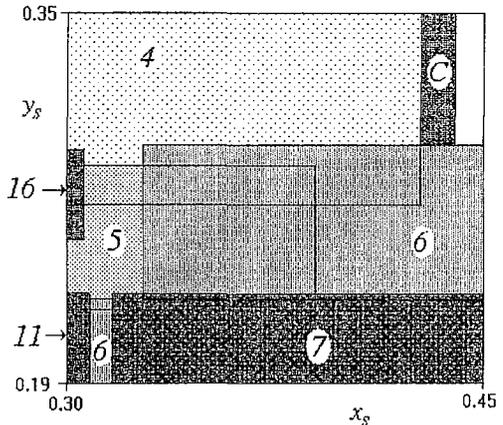


Рис. 5. Фрагмент карты режимов, приведенной на рис. 2, г; показана многострунная структура карты параметров

отображений с принципиально новым типом связи, поведение которой существенным образом отличается от поведения тех же самых логистических отображений с традиционными типами связей. Заметим также, что новый тип связи во многом аналогичен кооперативному и антагонистическому взаимовлияниям, описанным профессором Штуттгартского университета В.Вайдлихом [13, 14], анализ которых играет важную роль при качественном моделировании поведения социально-экономических систем.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант N 96-02-16753.*

### **Библиографический список**

1. Kaneko K. Theory and applications of coupled map lattices. John Wiley and Sons. Ltd. Baffins Lane. Chichester. West Sussex. PO19 1UD. England. 1993. 191 p.
2. Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., Федоренко В.В. Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
3. Смит Дж.М. Модели в экологии. М: Мир, 1976.
4. Kamuro S., Takashi A. Numerical study on a coupled-logistic map as a simple model for a predator-prey system // Journal of the physical society of Japan. Vol.59, № 4. April 1990. P.1184.
5. Аллен Дж.Р. Математическая экономия. М.: ИЛ, 1963.
6. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика одномерных отображений. Часть I: сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 1,2. С. 15.
7. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир. 1991, 368 с.
8. Korsch H.J., Jodl H.-J. Chaos: a program collection for the PC. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994. P. 196.
9. Jetschke G. Mathematik der Selbstorganisation: Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner Strukturen in Physik, Chemie und Biologie. Berlin: Deutsch. Verl. der Wissenschaften. 1989. 336 s.
10. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П. Мультистабильность и хаос в замкнутой цепочке элементов с удвоением периода: физический и численный эксперимент // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. X школа-семинар. Межвуз. сб. науч. тр. Кн.2. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. С. 51.
11. Васкес А. Родригес, Хуэртас Х.Л., Руэда А., Перес-Вердю Б., Чжуа Л.О. // ТИИЭР. 1987. Т.75, № 8. С. 124.
12. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Экспериментальное дупараметрическое исследование неоднозначных режимов колебаний // Изв. вузов. Радиофизика. 1995. Т. XXXVIII, № 11. С. 1195.
13. Weidlich W. Physics and social science – the approach of synergetics // Phys. Repts. 1991. Vol. 204, № 1. P. 1.
14. Короновский А.А., Трубецков Д.И. Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 27.12.96  
после переработки 21.03.97*

## **THE DYNAMICS OF MAPS WITH THE THRESHOLD TYPE OF COUPLING**

*A.A. Koronovski, V.I. Ponomarenko, D.I. Trubetskov*

This article deals with the system of logistic maps with the radically new coupling type. The behaviour of this system differs radically from the behaviour of the logistic

maps with the traditional coupling types. The investigation of these systems has been carried out both numerically and with the help of the radio–engineering experiment. We have obtained two–parameter regimes maps on the control parameters plane.



*Пономаренко Владимир Иванович* родился в ноябре 1960 года в Саратове. В 1982 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета. В 1992 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук. Работает старшим научным сотрудником в Саратовском филиале института радиотехники и электроники РАН и доцент КИПН. Автор и соавтор 25 научных работ. Область научных интересов – нелинейная динамика, экспериментальное моделирование сложных систем, методы параллельной обработки информации.



*Трубецков Дмитрий Иванович* родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в СГУ (1965) и доктора физико–математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор, член–корреспондент Российской Академии наук. Область научных интересов – радиофизика в той ее части, которая связана с взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями и с теорией сверхвысокочастотных электронных приборов; теория колебаний и волн; применение методов нелинейной динамики в различных областях науки; история науки.

Автор и соавтор одиннадцати монографий и учебных пособий по сверхвысокочастотной электронике, теории колебаний и волн и истории электронных ламп сверхвысоких частот, в том числе монографии «Аналитические методы расчета в электронике СВЧ» (М.: Сов. радио, 1970; совместно с В.Н. Шевчиком), коллективной монографии «Электроника ламп с обратной волной» (Изд. Сарат. ун–та, 1975), учебного пособия «Введение в теорию колебаний и волн» (первое издание, М.: Наука, 1984; второе – М.: Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем), книги «Формирование радиоэлектроники» (М.: Наука, 1988, раздел «История электронных ламп сверхвысоких частот»). В 1989 году книга «Введение в теорию колебаний и волн» в Нидерландах переведена на английский язык и вышла под названием «Oscillations and waves in linear and nonlinear systems» (The Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1989). Опубликовал четыре книги лекций по электронике СВЧ и истории электронных ламп и много научных статей по указанным выше направлениям. Зам. главного редактора журнала «Прикладная нелинейная динамика». Член редколлегии журнала «Известия вузов. Радиофизика».