



## ЭВОЛЮЦИЯ БАСЕЙНОВ ПРИТЯЖЕНИЯ АТТРАКТОРОВ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА

*С.А. Астахов, Б.П. Безручко, Е.П. Селезнев, Д.А. Смирнов*

Экспериментально (на  $RL$ -диод цепях) и численно (на системе квадратичных отображений) исследованы особенности структуры бассейнов притяжения аттракторов диссипативно связанных систем с удвоением периода. Выделены типичные пути эволюции бассейнов притяжения; в том числе, обнаружены два возможных варианта их фрактализации.

### Введение

Область фазового пространства диссипативной динамической системы, из которой изображающая точка попадает на аттрактор, называется бассейном притяжения. Если аттракторов несколько (мультистабильность), фазовое пространство делится на бассейны притяжения сосуществующих аттракторов. С изменением управляющих параметров эволюционируют как сами аттракторы, так и их бассейны. Информация о структуре бассейнов важна при решении задач управления и переключения, так как от положения начальной точки в бассейне зависят вид и длительность переходного процесса. Более того, структура бассейнов может быть фрактальной, так что при конечной точности задания начальных условий прогноз предельного состояния системы может оказаться невозможным даже при отсутствии хаоса [1,2]. В работе представлены результаты экспериментальных и численных исследований особенностей структуры бассейнов притяжения аттракторов системы, достаточно типичной в нелинейном мире, – ансамбля двух симметрично связанных элементов, каждый из которых индивидуально демонстрирует переход к хаосу при изменении параметра через последовательность бифуркаций удвоения периода. Анализ ведется на основе данных о множестве колебательных состояний этой системы [3] и критериев, сформулированных в работах К.Мира [4,5]. Экспериментально исследуются две резистивно связанные  $RL$ -диод цепи [6,7], синфазно возбуждаемые гармонической внешней силой (на рис. 1 они выделены жирной линией). Динамика каждой из них в ограниченной области параметров, где проводится рассмотрение, качественно моделируется квадратичным отображением с единственным управляющим параметром. Как показано в [3], адекватной моделью этой радиофизической системы являются два квадратичных отображения с диссипативным [8] видом связи

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \\ y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + k(y_n^2 - x_n^2), \end{cases} \quad (1)$$

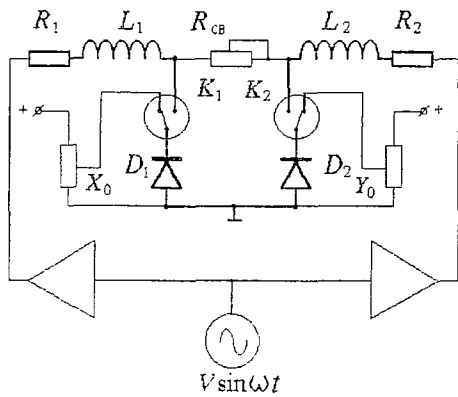


Рис. 1. Схема экспериментальной установки. Жирным выделены резонаторы, составляющие систему,  $R_{св}$  – резистор связи,  $K_1, K_2$  – электронные ключи

продемонстрирована применимость критериев, введенных в [4,5], для объяснения особенностей конфигурации бассейнов, обнаружена фрактализация бассейнов хаотических аттракторов.

## 1. Мультистабильность в связанных системах с удвоением периода

Рассматриваемые базовые системы (неавтономный осциллятор и отображение) инвариантны относительно временного сдвига на величину  $NT$ , где  $N=1,2,3,\dots$ , а  $T$  равно периоду воздействия в экспериментальной системе и  $T=1$  в модели. Это означает, что движения периода  $NT$  могут быть реализованы  $N$  способами, отличающимися сдвигом колебаний в подсистемах во времени на величину, кратную периоду воздействия,  $mT$  ( $m=0,1,\dots, N-1$ ). Далее мы будем называть их видами колебаний и обозначать индексами  $N_m$ , используя  $m$  в качестве основного классификационного признака. Циклам с  $m=0$  соответствуют синфазные колебания подсистем, когда  $X_n=Y_n$ , циклам с  $m \neq 0$  – несинфазные. Для четных  $N$  все циклы с индексом  $m=N/2$  (противофазные) при конечной связи симметричны относительно замены  $X$  на  $Y$  и демонстрируют бифуркацию рождения тора. Все пары циклов с индексами  $m$  и  $N-m$  асимметричны, но симметричны друг другу (то есть при замене  $X$  на  $Y$  они переходят друг в друга) и с изменением параметров демонстрируют удвоения периода. В [9] показано, что квазипериодические движения также попадают под предложенную классификацию, так как их можно рассматривать как режим биений между определенной парой асимметричных (относительно замены  $X_n \leftrightarrow Y_n$ ), но симметричных друг другу циклов. Каждый из видов колебаний существует в некоторой области параметров  $\lambda, k$ . Увеличение связи приводит к неустойчивости несинфазных видов, так что синфазные движения при некотором  $k$  остаются единственно возможными; однако при сильной связи ( $k > 0.5$ ) в системе появляется новый вид несинфазных движений [10], который в данной работе не рассматривается.

При значениях  $\lambda$  и  $\Lambda$  больше критических на базе каждого цикла в результате последовательности бифуркаций удвоения периода формируется хаотический аттрактор. В хаотических режимах, несмотря на отсутствие повторяемости в движениях, можно сохранить принцип классификации, используемый для периодических режимов, если понимать под  $m$  временной сдвиг между, например, максимальными значениями  $X_n$  и  $Y_n$ , а под  $N$  – число лент (связность) аттрактора. В дальнейшем хаотические режимы будем отмечать верхним положением индекса  $N^m$ . Случай  $m=0$  соответствует синфазному хаосу

где  $x_n, y_n$  – динамические переменные;  $n = 0,1,2,\dots$  – дискретное время;  $\lambda$  – параметр нелинейности;  $k$  – параметр связи. Аналогом параметра связи  $k$  в эксперименте служит проводимость резистора связи  $K=1/R_{св}$ , а параметра нелинейности  $\lambda$  – амплитуда внешнего воздействия  $\Lambda$ . Математическая модель (1) относится к классу необратимых отображений, и для нее справедливы предположения и ограничения, введенные в работах [4,5].

В результате выделены типичные для исследуемой системы пути эволюции бассейнов притяжения (их появление, исчезновение, дробление и объединение в соответствии с установленной ранее схемой бифуркационных переходов [3]),

(когда  $X_n=Y_n$ ) или хаотической синхронизации [8,11–15],  $m \neq 0$  – несинфазному хаосу. Хаотические аттракторы сохраняют свойства симметрии циклов с аналогичными индексами  $N$  и  $m$ . Симметрия аттракторов отражается и в структуре их бассейнов притяжения.

На рис. 2 представлена качественная схема, иллюстрирующая эволюцию движений в исследуемых ансамблях с изменением параметра  $\lambda$  при фиксированной слабой связи ( $k=0.006$ ), в выделенных фрагментах приведены фазовые портреты соответствующих видов колебаний для модельной системы. Опираясь на эту схему, рассмотрим эволюцию бассейнов притяжения при изменении параметров.

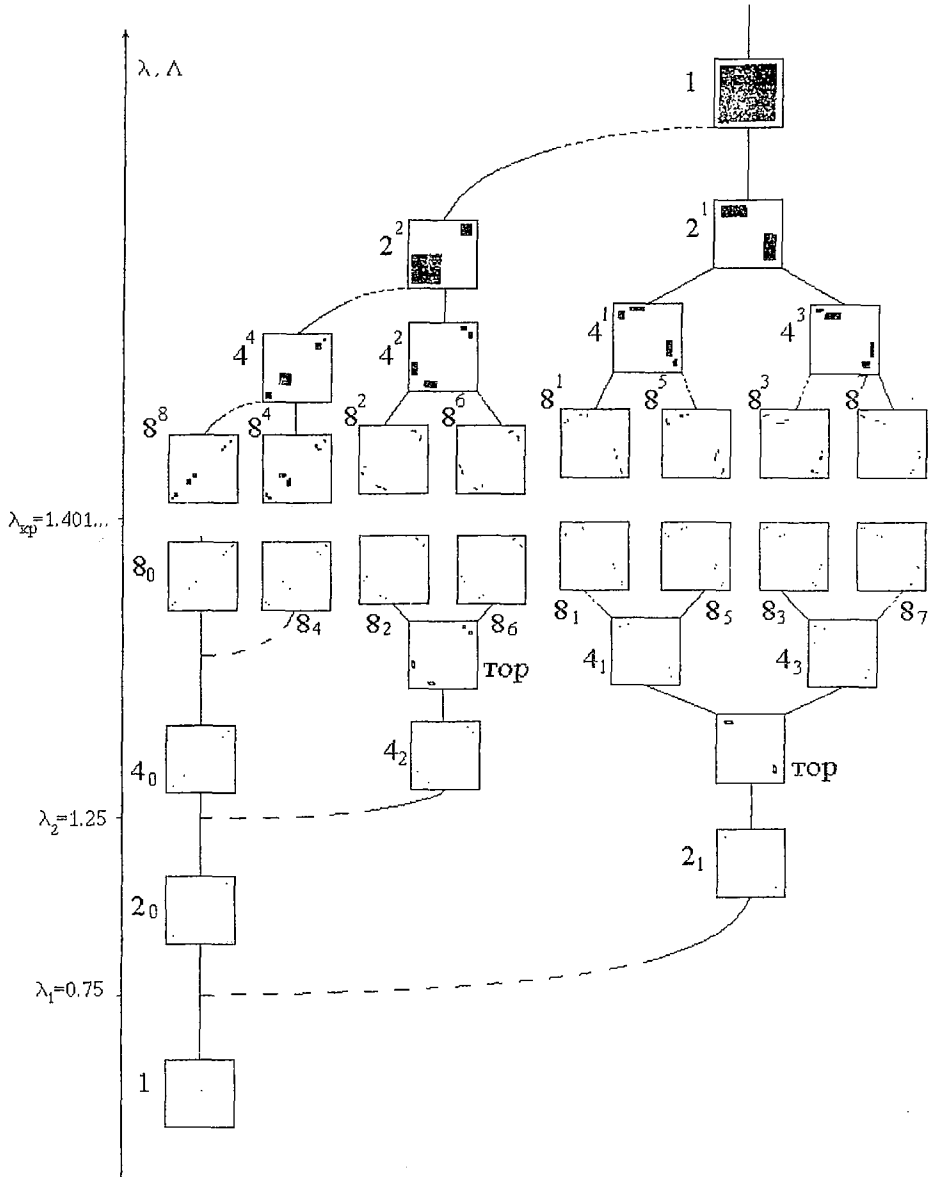


Рис. 2. Качественная схема эволюции колебательных режимов системы (1) при изменении параметра  $\lambda$  для случая малой связи ( $k=0.006$ ). В выделенных квадратах представлены аттракторы соответствующих ветвей схемы. Штриховые линии условны и демонстрируют принадлежность верхних ветвей схеме тому или иному основанию. Значения  $\lambda$  соответствуют первым двум бифуркациям удвоения периода и переходу к хаосу в изолированных подсистемах

## 2. Структура бассейнов притяжения аттракторов и ее эволюция

Рассмотрим особенности формирования бассейнов на примере модели (1), двигаясь по схеме рис. 2 снизу вверх, от значений  $\lambda$ , при которых в фазовом пространстве существует единственный цикл периода 1. Так, в примере, представленном на рис. 3, а, устойчивым решением является точка  $A$  (цикл периода 1), а бассейном его притяжения – вся область значений  $X_0, Y_0$ , ограниченная прямыми линиями  $|X_0|=|X_B|$ ,  $|Y_0|=|Y_B|$ , где  $X_B, Y_B$  соответствуют неустойчивому решению (точке  $B$ ). При  $k=0.0$  бассейн представляет собой квадрат со стороной  $[1+(1+4\lambda)^{1/2}]$ ; с увеличением коэффициента связи он постепенно деформируется, приобретая при  $k=0.5$  форму круга (рис. 3, б). Так как граница содержит и саму неустойчивую точку, радиус круга  $[1+(1+4\lambda)^{1/2}]/2^{1/2}$  можно определить, найдя неустойчивое решение.

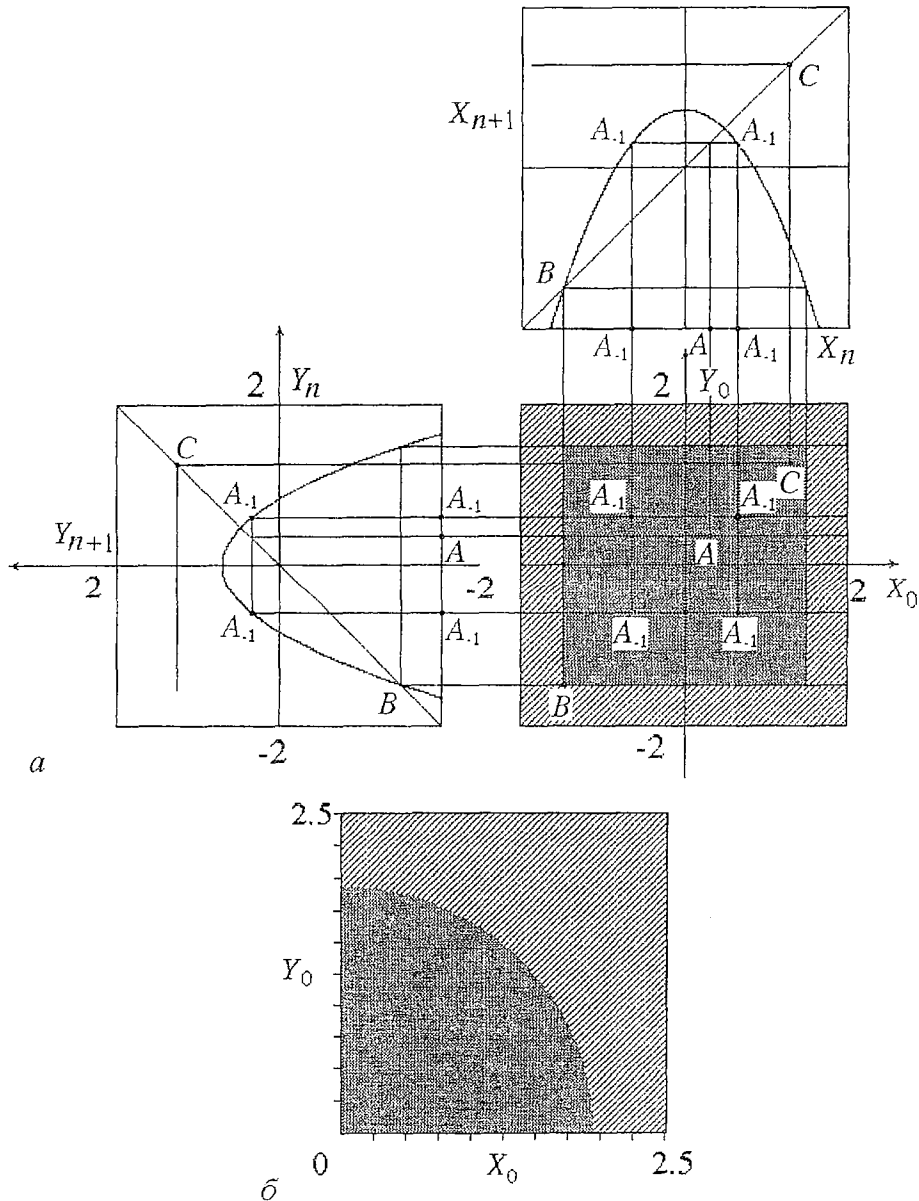


Рис. 3. Бассейн притяжения цикла периода 1 при  $\lambda=0.5$ ,  $k=0.0$  (а) и  $k=0.5$  (б)

Если начальная точка  $(X_0, Y_0)$  находится вне бассейна, с течением времени решение «убегает» на бесконечность; на рис. 3 эта область отмечена штриховкой. Система (1) инвариантна относительно замены  $X_n \rightarrow -X_n$ ,  $Y_n \rightarrow -Y_n$ , поэтому каждая точка  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$ , включая точки аттракторов, будет иметь по 4 прообраза первого ранга, симметрично расположенные относительно осей  $X=Y=0$  (рис. 3, а). Отмеченной симметрией обладают и бассейны притяжения аттракторов, поэтому далее будем приводить на рисунках лишь правый верхний квадрант плоскости  $(X_0, Y_0)$ .

С появлением в фазовом пространстве второго аттрактора область конечных решений дробится на бассейны сосуществующих аттракторов. Принцип дробления поясняет рис. 4, а, построенный, как и рис. 3, а, для случая  $k=0.0$ , но при значениях параметра  $\lambda > \lambda_1$ , где  $\lambda_1=0.75$  значение первой бифуркации удвоения периода. Здесь цикл периода 1 (точка А) уже потерял устойчивость и в фазовом пространстве сосуществуют два аттрактора – циклы периода 2:  $2_0$  и  $2_1$  (см. рис. 4, а и схему на рис. 2). Множество неустойчивых точек, включающее в себя и точку А с прообразами всех рангов, формирует границы бассейнов притяжения сосуществующих циклов. В отсутствие связи оно расположено на параллельных осям прямых, которые дробят бассейн цикла, их, согласно схеме рис. 2, «порождающего». Отметим, что вблизи границы области дробящегося бассейна имеет место фрактальная структура – с приближением к границе происходит неограниченное уменьшение одного из характерных размеров составляющих бассейн областей (рис. 4, б). Увеличение  $\lambda$  сопровождается ростом числа сосуществующих регулярных аттракторов в фазовом пространстве; на схеме рис. 2 увеличивается число ветвей. При этом бассейны циклов, соответствующих на рис. 2 основанию любого разветвления (например, линия  $2_0$  является основанием разветвления на  $4_0$  и  $4_2$ ), дробятся так, что вблизи их бывших границ образуется фрактальная структура (рис. 5, б). Дробление продолжается вплоть до критического значения параметра  $\lambda = \lambda_{кр}$ , соответствующего переходу к хаосу (бифуркационные переходы описаны в [3] и в данной работе не обсуждаются).

Подобные описанным изменения структуры бассейнов притяжения при  $k \rightarrow 0$  имеют место и при движении по схеме рис. 2 сверху вниз от единственного односвязного хаотического аттрактора к бесконечному множеству многосвязных вблизи точки перехода порядок – хаос ( $\lambda = \lambda_{кр}$ ).

Введение связи по-разному сказывается на конфигурации бассейнов притяжения аттракторов, отличающихся формой и видом симметрии. Кроме уже отмеченного искривления границ бассейнов, изменение  $k$  приводит к перераспределению площадей бассейнов сосуществующих аттракторов. Площадь бассейнов притяжения циклов, мультипликаторы которых с ростом связи стремятся к  $(+1)$ , сокращается; за их счет увеличивается площадь «выживающих» циклов. Поглощая часть площади бассейна исчезающего вида, границы которого становятся вогнутыми (рис. 4, в), области бассейна «выживающих» циклов становятся округлыми. С дальнейшим увеличением  $k$  вблизи границы устойчивости несинфазных симметричных циклов имеет место «расщепление» элементов их бассейнов (рис. 4, з).

Все симметричные циклы (кроме синфазных), например  $2_1$ , с ростом параметра  $\lambda$  демонстрируют бифуркацию рождения тора. Бассейн притяжения квазипериодических колебаний (рис. 5, а) полностью поглощает бассейн притяжения цикла, на базе которого они сформировались. Зеркально симметричные пары циклов, рождающиеся в результате синхронизации движений на торе, например  $4_1$  и  $4_3$ , дробят бассейн притяжения тора таким образом, что площадь бассейнов циклов одинакова, бассейны зеркально симметричны, так что две границы их элементов вогнутые, а две – выпуклые (рис. 5, б).

Описанный путь эволюции бассейнов универсален и в его реализации участвуют регулярные аттракторы всех ветвей схемы (см. рис. 2). Бассейны притяжения хаотических аттракторов эволюционируют аналогично, если при

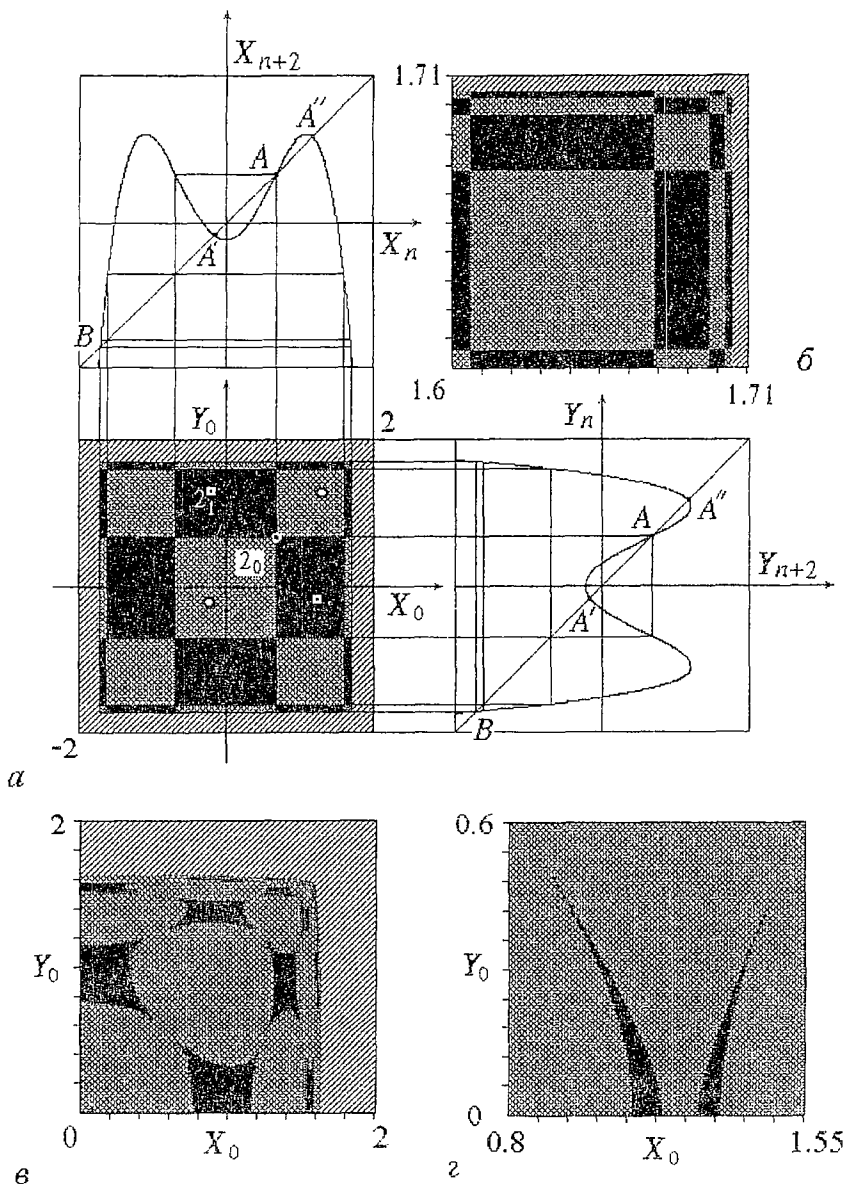


Рис. 4. Графики вторых итераций  $x_{n+2}=f(x_n)$ ,  $y_{n+2}=f(y_n)$  системы (1) и бассейны притяжения циклов  $2_0$  (черные окружности) и  $2_1$  (белые квадраты с черными точками внутри) при  $\lambda=1.2$  и  $k=0.0$ .  $A$  – неустойчивая точка (цикл периода 1 показан белой окружностью),  $A'$ ,  $A''$  устойчивые точки (цикл периода 2) (а). Увеличенное разрешение фрагмента обнаруживает более мелкие области у границы (б). Изменение формы бассейнов с ростом связи  $k$ :  $\lambda=1.2$  и  $k=0.01$  (в),  $\lambda=1.2$  и  $k=0.0485$  (г)

изменении параметров реализуются подобные нижней части схемы рис.2 перестройки, но при условии, что критическая линия (К.Мира [4,5]) не отсекает сегменты бассейнов притяжения. Поясним сказанное.

Исследуемая система (1) относится к классу необратимых отображений. Причем плоскость  $(X,Y)$  состоит из двух полуплоскостей  $Z_4$  и  $Z_0$ , точки которых соответственно имеют 4 прообраза или не имеют прообразов (точнее, не имеют действительных прообразов). Например, точка  $A$  на рис.3 имеет четыре прообраза, координаты которых получаются в результате построения обратных диаграмм Ламерея, то есть после первой итерации система (1) из этих точек попадает в  $A$ . В

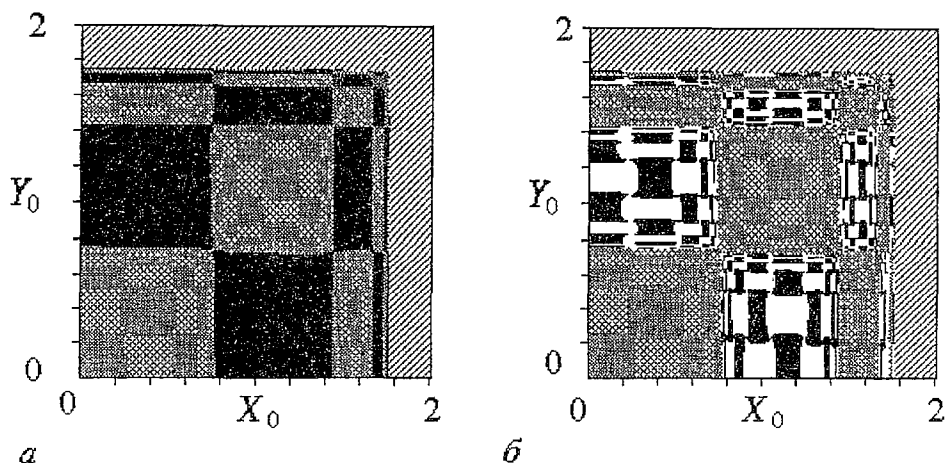


Рис. 5. Бассейны притяжения: *a* – циклов  $4_0$ ,  $4_2$  и тора при  $\lambda=1.3$  и  $k=0.01$ ; *б* – циклов  $4_0$ ,  $4_2$ ,  $4_1$ ,  $4_3$  при  $\lambda=1.3$  и  $k=0.006$

тоже время точка  $B$  не имеет прообразов, так как обратные диаграммы Ламерея не попадают на графики отображений, и, таким образом, на плоскости  $(X_0, Y_0)$  нет таких точек, из которых система (1) после первой итерации попадает в точку  $B$ . Границей между множествами таких точек является линия, названная в [4,5] критической. Критическую линию можно найти численно первой итерацией множества точек  $(X_0, Y_0)$ , при которых Якобиан  $J$  матрицы отображения обращается в нуль [4,5]. Для системы (1)  $J=4x_n y_n (1-2k)$ , то есть при  $k \neq 0,5$  таким множеством являются оси  $X=0$  и  $Y=0$ , а критическая линия  $l_{кр}$  (на рис.6 и рис. 7 она отмечена пунктиром) представляет собой два луча, выходящих из точки с координатами  $(\lambda, \lambda)$ .

Рассмотрим эволюцию бассейнов притяжения хаотических аттракторов в зависимости от их взаимного расположения с критической линией. При  $k \neq 0$  границы элементов бассейнов имеют выпуклую или вогнутую форму, последние, следуя введенной К.Мира географической терминологии, будем называть «заливами». При слабой связи критическая линия пересекает бассейны, не отсекая сегменты «заливов». Рис. 6, *a* и его увеличенный фрагмент – рис. 6, *б* иллюстрируют эту ситуацию для случая, когда в исследуемой системе сосуществуют четыре четырехсвязных хаотических аттрактора. С изменением параметров из-за различного влияния связи два аттрактора  $4^2$  и  $4^4$  объединяются в один –  $2^2$ , соответствующим образом сливаются и их бассейны притяжения (рис. 6, *в*). Аттракторы  $4^1$  и  $4^3$  почти не меняются, но внутри почти всех элементов их бассейнов притяжения (кроме тех, где находятся точки решения) образуются «озера» [4,5] (см. рис. 6, *в* и его увеличенный фрагмент на рис.6,*г*). Появление этих «озер» объясняется тем, что изменение параметров привело к смещению критической линии, в результате которого каждый ее луч отсек сегмент «залива» одного из элементов бассейнов притяжения аттракторов  $4^1$  и  $4^3$  (ср. рис.6,*б* и *г*). В результате такого изменения внутри части односвязной области притяжения аттрактора  $4^1$ , принадлежащей  $Z_4$ , появляется множество точек отсеченного участка бассейна аттрактора  $4^3$  (см. рис. 6, *г*). Наличие неограниченного числа прообразов различных рангов приводит к глобальным изменениям – появлению бесконечно большого числа «озер». Дальнейшее изменение параметров приводит к тому, что внутри «озер» формируются «острова», когда «озеро» пересекает критическую линию (рис. 6, *д* и увеличенный фрагмент – рис. 6, *е*). Затем внутри появившихся «островков» вновь формируются «озера» (в дальнейшем будем их называть вложенными) и так далее.

При дальнейшем изменении параметров  $\lambda$  и  $k$  происходят изменения, которые не удается объяснить с помощью описанного подхода. Аттрактор  $2^2$

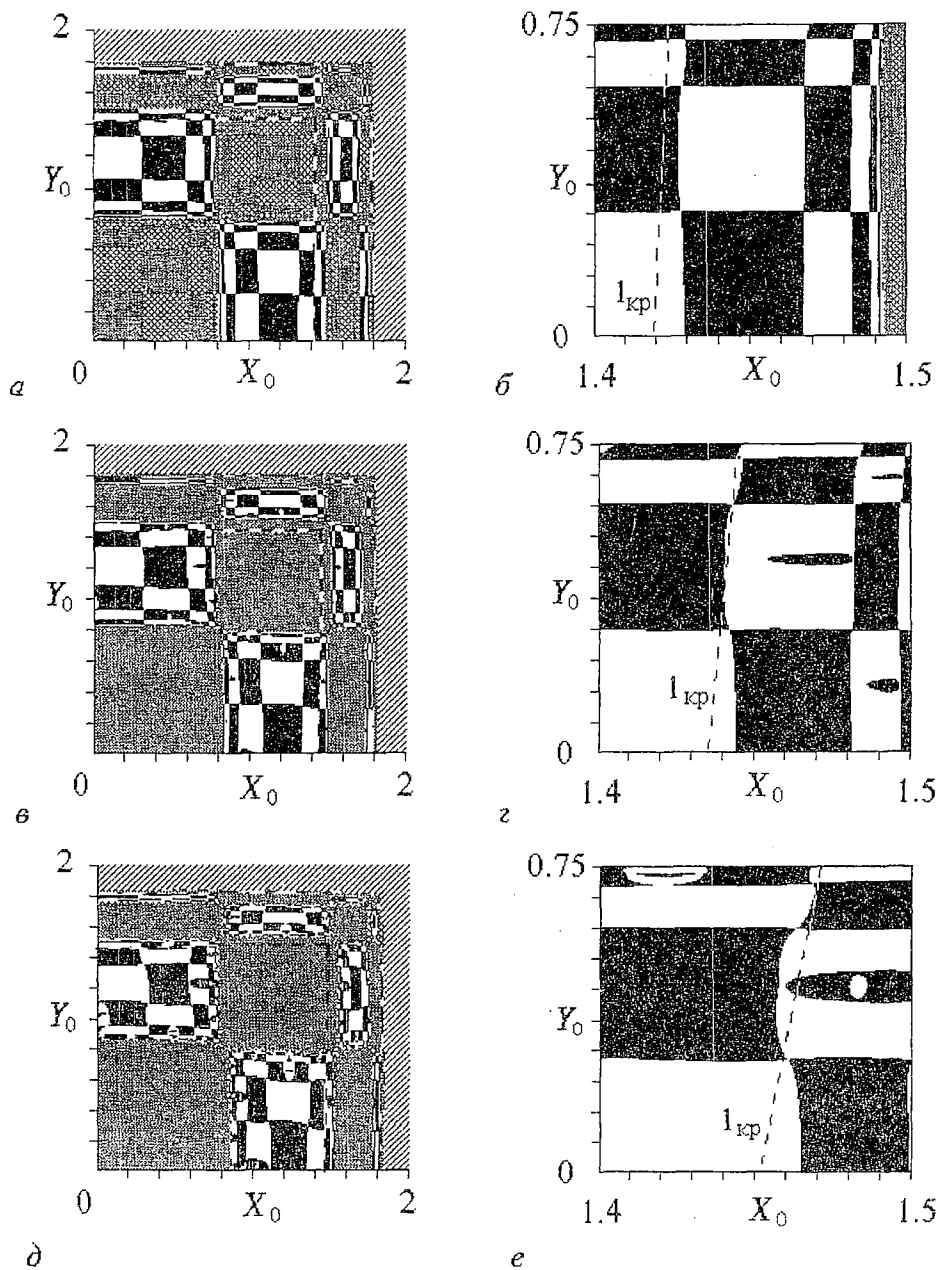


Рис. 6. Формирование «озер» в бассейнах притяжения хаотических аттракторов:  $a - \lambda=1.428, k=0.006$ ;  $b -$  увеличенный фрагмент  $a$ ;  $в - \lambda=1.454, k=0.0128$ ;  $г -$  увеличенный фрагмент  $в$ ;  $д - \lambda=1.49, k=0.025$ ,  $е -$  увеличенный фрагмент  $д$

претерпевает кризис в результате слияния с неустойчивым циклом  $N=1$  и становится непритягивающим. Это сопровождается качественно новым изменением области на плоскости  $(X_0, Y_0)$ , которую занимал его бассейн: происходит фрактальное дробление на бассейны притяжения аттракторов  $4^1$  и  $4^3$  (рис. 7,  $a$  и увеличенные фрагменты на рис. 7,  $в$  и  $г$ ). Последнее приводит к тому, что критическая линия проходит через фрактальное множество, и в результате невозможно определить характер ее пересечения с элементами бассейнов. Однако, степень вложения «озер» (рис. 7,  $б$ ) после таких изменений остается конечной, а



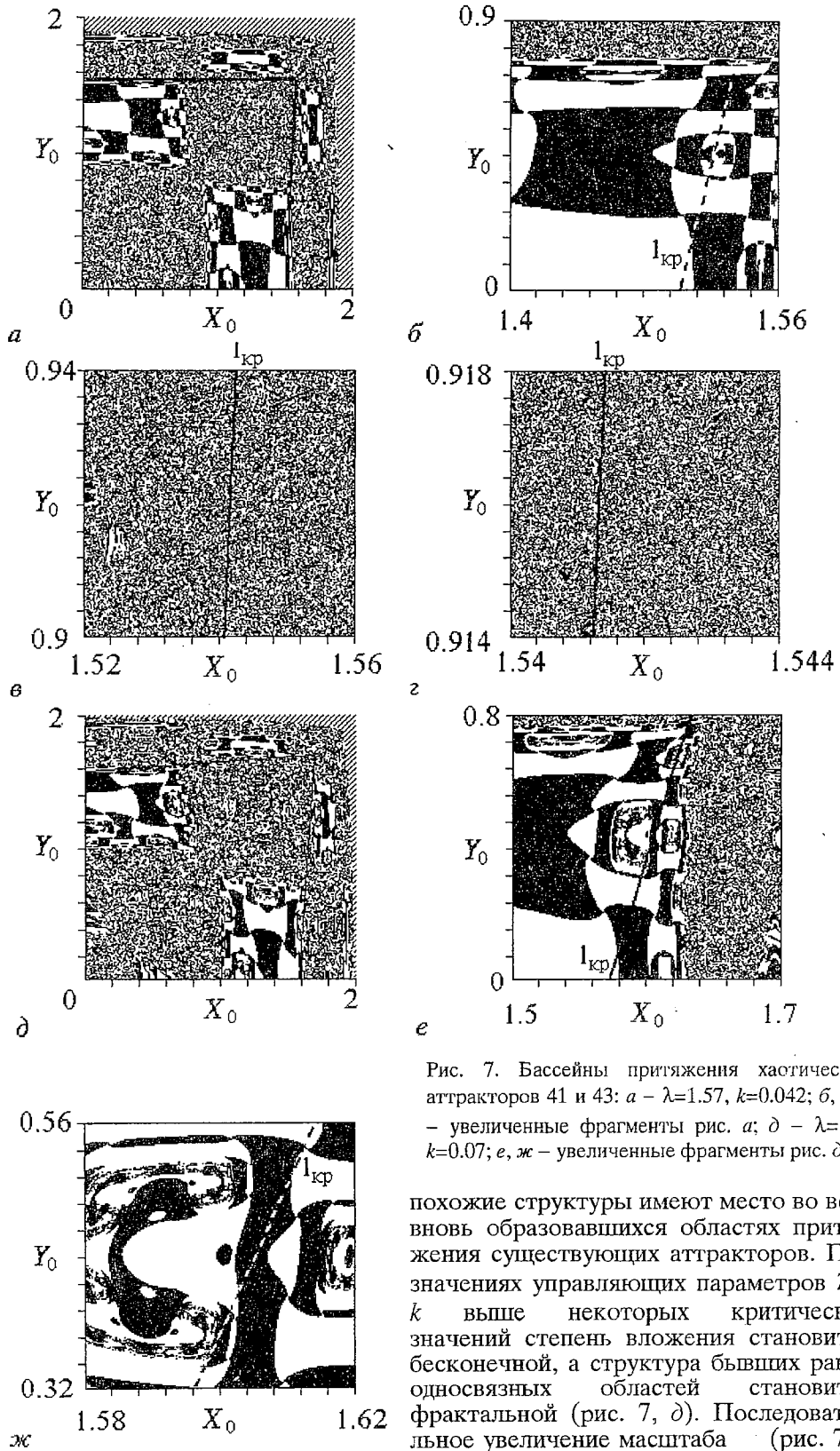


Рис. 7. Бассейны притяжения хаотических аттракторов 41 и 43: а -  $\lambda=1.57, k=0.042$ ; б, в, г - увеличенные фрагменты рис. а; д -  $\lambda=1.7, k=0.07$ ; е, ж - увеличенные фрагменты рис. д

похожие структуры имеют место во всех вновь образовавшихся областях притяжения существующих аттракторов. При значениях управляющих параметров  $\lambda$  и  $k$  выше некоторых критических значений степень вложения становится бесконечной, а структура бывших ранее односвязных областей становится фрактальной (рис. 7, д). Последовательное увеличение масштаба (рис. 7, е и ж) выявляет новые более мелкие

области. Описанный сценарий фрактализации бассейнов притяжения носит универсальный характер и проявляется для хаотических аттракторов более высокой связности, но в более узком интервале значений параметров.

### 3. Сравнение с экспериментом

На рис. 8 приведены двумерные проекции бассейнов притяжения циклов  $N = 2$  и  $4$  экспериментальной системы. В отличие от модели (1), исследованная часть плоскости  $(X_0, Y_0)$  ограничена пределами, выход за которые грозит разрушением диода из-за тепловой неустойчивости. В отсутствие связи ( $k = 0.0$ ) элементы бассейнов имеют прямоугольную форму (рис. 8, а), так что картина напоминает шахматную доску с разновеликими клетками. Увеличение связи, как и в модели, сопровождается расширением бассейна синфазного вида за счет несинфазного (рис. 8, б). Появление в фазовом пространстве дополнительных циклов при изменении параметров приводит к дроблению всех элементов существовавших ранее бассейнов в соответствии с описанными для системы (1) закономерностями (рис. 8, в). Вблизи сепаратрисы, разделяющей бассейны притяжения циклов различных  $(4_0, 4_2)$  и  $(4_1, 4_3)$  ветвей наблюдается последовательное уменьшение элементов, однако установить их самоподобие в эксперименте не представлялось возможным из-за нестабильностей и технических ограничений на масштаб разрешения. Поэтому граница между «блоками» на рисунке отмечена жирной линией, а пограничные области просто заштрихованы.

На рис. 9 приведены результаты экспериментальных исследований

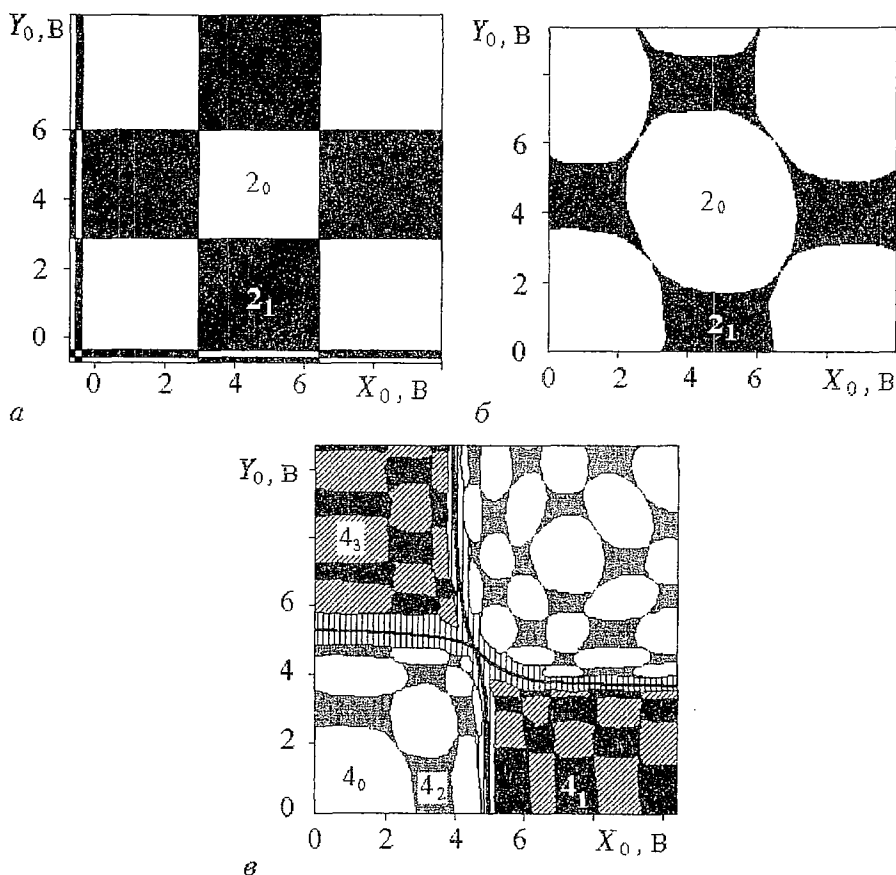


Рис. 8. Бассейны притяжения циклов экспериментальной системы на плоскости  $(X_0, Y_0)$ : а – циклов  $2_0$  и  $2_1$  при  $k=0.0$ ; б – при  $k \neq 0.0$ ; в – циклов  $4_0, 4_2, 4_1$  и  $4_3$

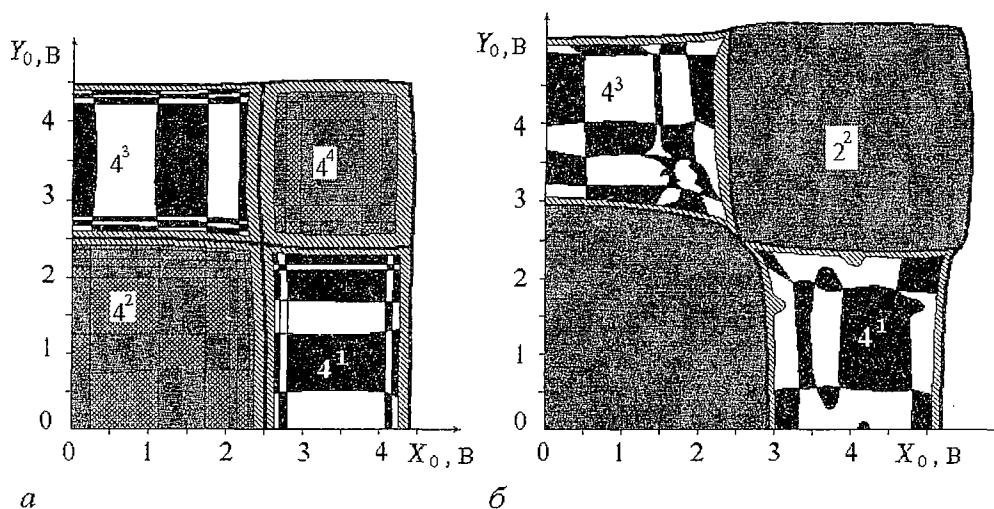


Рис. 9. Бассейны притяжения хаотических аттракторов экспериментальной системы: *a* –  $V=1$  В,  $k=0.002$  мСм; *б* –  $V=1.79$  В,  $k=0.025$  мСм

бассейнов притяжения четырехсвязных хаотических аттракторов. При слабой связи структура этих бассейнов (рис. 9, *a*) качественно соответствует рис.7, *a*, жирной линией обозначена сепаратриса, разделяющая бассейны притяжения пар аттракторов и в окрестности которой имеет место накопление областей (на рис. 9 отмечено штриховкой). При совместном изменении параметра внешнего воздействия и связи в структуре бассейнов притяжения экспериментальной системы наблюдаются изменения, описанные выше для системы (1). Аттракторы  $4^2$  и  $4^4$  сливаются, образуя аттрактор  $2^2$ . А внутри ранее односвязных областей бассейнов притяжения аттракторов  $4^1$  и  $4^3$  с изменением параметров образуются «озера», которые иллюстрирует рис.7, *в*. Дальнейшее изменение параметров приводит к тому, что в результате кризиса аттрактор  $2^2$  становится непритягивающим. При этом его бассейн притяжения дробится сложным образом на бассейны притяжения аттракторов  $4^1$  и  $4^3$ . Можно предположить, что в данном случае, как и для системы (1) (см. рис. 7, *д*), формируется фрактальная или фракталоподобная структура, но построить ее в эксперименте не представляется возможным. Опосредованно о наличии фрактальной структуры свидетельствует вид переходного процесса, и влияние на него естественных флуктуаций экспериментальной системы – установление того или иного режима – становится непредсказуемым.

### Заключение

Описано изменение конфигурации бассейнов притяжения аттракторов при вариации управляющих параметров (нелинейности и связи) в широких пределах, выделены типичные перестройки в их структуре. Экспериментально и численно обнаружено, что исчезновение одного из сосуществующих хаотических аттракторов может в некоторых случаях приводить к фрактальному дроблению его бассейна на бассейны оставшихся странных аттракторов. Обнаружены ситуации, когда изменение параметров приводит к появлению в структуре бассейнов притяжения множества «озер». Внутри этих «озер» образуются новые, а при некоторых критических значениях управляющих параметров структура бассейна становится фрактальной. Описанный сценарий носит универсальный характер и проявляет себя и в структуре бассейнов притяжения хаотических аттракторов большей связности. Отметим в то же время, что несмотря на все наблюдаемые метаморфозы бассейнов притяжения границы каждой отдельной крупной или мелкой односвязной области остаются гладкими.

В целом наблюдается качественное соответствие результатов физического

эксперимента и численного исследования, что свидетельствует об общности описанных закономерностей для объектов с удвоением периода из выделенного класса и о грубости представленной картины. Наблюдаемая в эксперименте асимметрия в структуре бассейнов притяжения относительно прямой  $X_0=Y_0$  связана с неидентичностью реальных подсистем, что доказано специальными экспериментами.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 96-02-16753.*

## Библиографический список

1. Grebogi C., Ott E., York J.A. Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients and unstable-unstable pair bifurcations // Phys.Rev.Lett. 1983. Vol.50, № 13. P. 935.
2. Grebogi C., Ott E., York J.A. Metamorphose of basin boundaries in nonlinear dynamical systems // Phys.Rev.Lett. 1996. Vol.56, № 10. P. 1011.
3. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т.60, вып.10. С.19.
4. Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H., Cathala J.C // Int.J. of Bif.&Chaos. 1995. Vol.4, № 2. P. 343.
5. Мира К. О бассейнах, порождаемых двумерными необратимыми отображениями. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 2. С.40.
6. Linsay P.S. Period doubling and chaotic behaviour in a driven anharmonic oscillator // Phys.Rev.Lett. 1981. Vol.47, № 19. P.1349.
7. Buskirk R., Jeffries C. Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // Phys.Rev.A. 1985. Vol.31, № 5. P.3332.
8. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв.вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 8. С. 991.
9. Астахов В.В., Безручко Б.П., Кузнецов С.П., Селезнев Е.П. Особенности возникновения квазипериодических движений в системе диссипативно связанных нелинейных осцилляторов под внешним периодическим воздействием // Письма в ЖТФ. 1988. Т.14, вып.1. С.37.
10. Прохоров М.Д. Виды колебаний диссипативно связанных систем с удвоением периода при сильной связи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 4,5. С. 99.
11. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems // Prog.Theor. Phys. 1983. Vol.69. P.32.
12. Picovsky A.S. On interaction of strange attractors // Z. Phys. 1984. Vol.B55. P.149.
13. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв.вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 9. С.1050.
14. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постлов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркация развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С.1120.
15. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П. Квазиоднородные стохастические движения и их разрушение в системе связанных нелинейных осцилляторов // Изв.вузов. Радиофизика. 1988. Т.31, № 5. С.627.

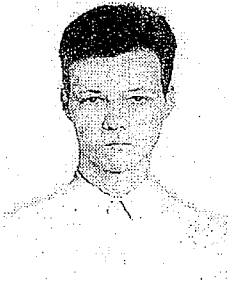
Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 25.10.96  
после переработки 25.06.97

## EVOLUTION OF BASINS OF ATTRACTION FOR COUPLED PERIOD DOUBLING SYSTEMS

*S.A. Astakhov, B.P. Bezruchko, Ye.P. Seleznev, D.A. Smirnov*

Peculiarities of basin structure for dissipatively coupled period doubling systems are investigated both experimentally (*RL*-diode circuits) and numerically (system of quadratic maps). Characteristic types of basin evolution are recognized; in particular, two possible variants of basin fractalization are found.



*Астахов Сергей Александрович* – родился в Саратове (1976). Студент 4-го курса СГУ. Соросовский студент (1995, 1996). Круг научных интересов: экспериментальное исследование нелинейных явлений в радиофизических системах. Автор двух публикаций.



*Смирнов Дмитрий Алексеевич* – родился в Ершове Саратовской области (1977). Студент 3-го курса Колледжа прикладных наук СГУ, специализация – физика нелинейных динамических систем. Соросовский студент (1996, 1997). Область научных интересов: построение и исследование дискретных моделей нелинейных неавтономных динамических систем, анализ временных рядов. Автор трех публикаций