Нелинейная динамика в лицах. История. *Personalia.*

Изв.вузов «ПНД», т.5, № 2,3, 1997

УДК 536.75:519.25, 621.391.822.2

НЕМАРКОВСКАЯ ТЕОРИЯ ФЛУКТУАЦИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЛИНЕЙНЫМ ТРЕНИЕМ

Р.Л. Стратонович

Предлагаемая работа является последней полностью подготовленной к печати статьей выдающегося ученого современности Руслана Леонтьевича Стратоновича, скоропостижно скончавшегося 13 января 1997 года.

В статье рассматриваются некоторые аспекты теории квантовых стохастических процессов, основанной на применении немарковских флуктуационно-диссипационных теорем, в частности, квантовой формулы Найквиста

$$S_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) = \hbar\omega\coth[\hbar\omega/(2kT)]\mathrm{Re}Z_{\alpha,\beta}(i\omega),$$

при помощи которой найдены корреляционные функции операторных ланжевеновских сил в системах с линейным трением. Особое внимание уделено большей сингулярности этих сил, чем это имеет место в квантовой марковской теории. Чтобы избежать бесконечностей, динамические уравнения представлены в интегральной форме. Для представления ланжевеновских сил введены и используются интегральные стохастические процессы $\sigma_\kappa(t)$ с конечными средними квадратами.

Рассмотрены также такие негауссовы характеристики, как тройные и четверные многовременные кумулянты для нелинейного случая и для случая флуктуирующих коэффициентов трения.

Рассматривается задача интерпретации необычных стохастических интегралов, содержащих процессы $\sigma_\kappa(t)$. Показано, что сходимость допредельной суммы к соответствующему интегралу имеет место в смысле нормы $\|A\|_\rho=[\mathrm{Tr}(AA^\dagger)]^{1/2}$.

1. Введение

Широко известна и многими используется марковская теория квантовых стохастических процессов (теория I), основанная на управляющем уравнении Коссаковского – Линдблада [1, 2], квантовой теореме регрессии [3] и квантовом стохастическом исчислении Хадсона – Партасарати [4]. Также разработана и используется другая теория квантовых стохастических процесссов (теория II), основанная на применении флуктуационно–диссипационных теорем (см., например, [5, 6]). Эти теории очень сильно отличаются друг от друга. Согласно первой теории в случае линейного трения ланжевеновские силы являются дельта–коррелированными процессами, в то время как согласно второй теории эти силы являются в большей степени сингулярными. В этом отношении теория I ближе к классической марковской теории, чем теория II.

Как правило, различные теории дают различные результаты (см., например, [7]), и весьма редки случаи, когда это не так. Примером последнего может служить узкополосная система, когда ширина полосы $\Delta\omega$ много меньше резонансной частоты ω_0 системы.

Любопытно отметить, что для систем с линейным трением обе теории являются квантовым обобщением классических марковских процессов в том смысле, что квантовые процессы, рассматриваемые в обеих этих теориях, стремятся к одному и тому же неквантовому марковскому процессу при $h \to 0$.

В данной работе рассматриваются некоторые аспекты теории II. Важным вопросом, возникающим в рамках данной теории, является вопрос о том, как обращаться с процессами, имеющими большую степень сингулярности, чем в неквантовой марковской теории. Как известно, в последней ланжевеновские процессы являются дельта–коррелированными, то есть обобщенными процессами. Рассмотрим для примера классическую одномерную систему, для которой стохастическое уравнение имеет вид

$$\dot{p} = -\gamma p + (2kTm\gamma)^{1/2}\xi(t). \tag{1.1}$$

Здесь $\langle\xi(t)\rangle=0$, $\langle\xi(t+\tau)\xi(t)\rangle=\delta(\tau)$, если внешняя система имеет температуру T. Так как $\langle\xi^2(t)\rangle=\infty$, имеем $|\xi(t)|=\pm\infty$ почти для всех t. Поэтому, строго говоря, уравнение (1.1) является уравнением типа $\pm\infty=\pm\infty$. Чтобы придать этому уравнению определенность, можно ввести интегральный процесс $\omega(t)=\int_0^t\xi(t')dt'$. Этот процесс несингулярный и называется винеровским процессом. С его помощью уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$dp = -\gamma p dt + (2kTm\gamma)^{1/2} d\omega(t). \tag{1.2}$$

Такая форма записи предполагает интегрирование обеих частей этого уравнения. В немарковском квантовом случае не только временные производные от импульсов, но и сами импульсы имеют бесконечные средние квадраты. В разделе 4 показано, что в квантовом случае для представления ланжевеновских сил в виде обычных (несингулярных) процессов необходимо двойное интегрирование. В этом случае лучше пользоваться интегральной формой динамического уравнения, не содержащей бесконечностей. В уравнениях (5.3) и (5.5) бесконечности отсутствуют, если выполняется условие (5.4). В неквантовом случае в таком условии нет необходимости.

Следует отметить, что это своеобразие теории II проявляется при всех температурах окружающей среды, включая $T=0$. Единственной причиной возникновения бесконечностей в теории II являются силы $\eta_\alpha(t)$, возникающие при нулевой температуре. Поэтому удобно выделить их, чтобы сосредоточиться на бесконечностях. Оставшаяся часть ланжевеновских сил $\zeta_\alpha(t)$ не представляет проблем (раздел 3). В разделе 4 рассматриваются процессы $\sigma_\alpha(t)$, связанные с $\eta_\alpha(t)$ и имеющие конечные средние квадраты. С их помощью записываются стохастические интегральные уравнения, в которых отсутствуют бесконечности. Эти стохастические уравнения позволяют найти стационарные и нестационарные многовременные моменты и кумулянты координат и импульсов для нелинейного случая. Однако существует более простой способ нахождения стационарных моментов и кумулянтов, а именно, напрямую с помощью линейных и нелинейных флуктуационно–диссипационных теорем (раздел 7).

В Приложении 2 рассматривается задача интерпретации необычных стохастических интегралов, содержащих процессы $\sigma_\kappa(t)$. Показано, что сходимость допредельной суммы к соответствующему интегралу имеет место в смысле нормы $\|A\|_\rho=[\mathrm{Tr}(AA^\dagger\rho)]^{1/2}$.

2. Квантовые ланжевеновские силы, определяемые квантовой формулой Найквиста

Рассмотрим n–мерную систему S с координатами q_1, ... q_n и импульсами p_1, ... p_n. В случае линейного трения динамические уравнения имеют вид

$$\dot{q}_\alpha = (i/\hbar)[H,q_\alpha], \tag{2.1}$$

$$\dot{p}_\alpha = (i/\hbar)[H,p_\alpha] - \lambda_{\alpha\delta}\dot{q}_\delta , \tag{2.2}$$

где числовая матрица $\lambda_{\alpha\delta}$ должна быть симметричной в силу соотношений Онзагера. А также она должна быть полуположительно определенной, потому что энергетические потери, вызванные диссипацией, не могут быть отрицательными. В формуле (2.1) $\alpha=1,\dots,n$, а также предполагается суммирование по дважды встречающимся индексам.

Наличие трения означает, что система S взаимодействует с намного более сложной внешней системой E. Воздействие внешней системы на S проявляется не только через силы трения $-\lambda_{\alpha\delta}\dot{q}_\delta$, но и через случайные силы $\xi_\alpha(t)$ (ланжевеновские силы), которые следует добавить в правые части (2.2). Мы полагаем, что $H = T + U$, $T=1/2\ c_{\alpha\beta}\, p_\alpha\, p_\beta$ ($\|c_{\alpha\beta}\|=\|m_{\alpha\beta}\|^{-1}$), $U=U_1(q)$, при этом $U_1(x)$ является числовой (не операторной) функцией числовых аргументов. Тогда динамические уравнения с ланжевеновскими силами будут иметь вид

$$\dot{q}_\alpha = c_{\alpha\beta}\,p_\beta , \tag{2.3}$$

$$\dot{p}_\alpha = -U_{1\alpha}(q) - \gamma_{\alpha\beta}\,p_\beta + \xi_\alpha(t) \tag{2.4}$$

с $\gamma_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\delta}c_{\delta\beta}$, $U_{1\alpha}(x) = \partial U_1(x)/\partial x_\alpha$.

Ланжевеновские силы, входящие в (2.4), имеют нулевое среднее значение $\langle\xi_\alpha(t)\rangle = 0$. Они являются гауссовскими в силу линейности диссипации. Для получения статистических свойств ланжевеновских сил остается найти их корреляционные функции. Для этого могут быть применены флуктуационно–диссипационные теоремы, предполагающие в свою очередь использование адмитансов или импедансов. Для нахождения импедансов мы опускаем случайные силы в (2.4) и добавляем неоператорные внешние силы $f_\alpha(t)$, что дает

$$\dot{q}_\alpha = c_{\alpha\beta}p_\beta , \tag{2.5}$$

$$\dot{p}_\alpha = -U_{1\alpha}(q) - \gamma_{\alpha\beta}\,p_\beta + f_\alpha(t). \tag{2.6}$$

Если потенциальная энергия имеет минимум при $q=0$, то мы имеем

$$U_1(q) \equiv U_1(0) + 1/2\ a_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta + 1/6\ b_{\alpha\beta\gamma}q_\alpha q_\beta\, q_\gamma + \dots \tag{2.7}$$

с $a_{\alpha\beta} = \partial^2 U_1/\partial q_\alpha \partial q_\beta|_{q=0}$ и т. д. Поэтому из (2.5), (2.6) мы получаем уравнения

$$\dot{q}_\alpha = c_{\alpha\beta}\,p_\beta ,$$

$$\dot{p}_\alpha = -a_{\alpha\beta}q_\alpha - 1/2\ b_{\alpha\beta\gamma}\, q_\beta\, q_\gamma - \dots - \gamma_{\alpha\beta}\,p_\beta + f_\alpha(t).$$

Отсюда

$$m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta + \lambda_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta + a_{\alpha\beta}q_\beta + {}^1\!/_2\, b_{\alpha\beta\gamma}q_\beta q_\gamma + \ldots = f_\alpha(t). \tag{2.8}$$

Определение импедансов $Z_{\alpha,\beta}(s)$, $Z_{\alpha,\beta\gamma}(t_2-t_1,\ t_3-t_1)$, ... (см, например, [6, п. 5.6.1]) дается формулой

$$Z_{\alpha,\beta}\,(d/dt)\dot{q}_\beta(t) + {}^1\!/_2 \int Z_{\alpha,\beta\gamma}(t_1-t_2,\, t_1-t_3)\,\dot{q}_\beta(t_2)\,\dot{q}_\gamma(t_3)\,dt_2dt_3 + \ldots = f_\alpha(t). \tag{2.9}$$

Сравнивая (2.8) с (2.9), в частности, получаем

$$Z_{\alpha,\beta}(s) = m_{\alpha\beta}s + \lambda_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta}s^{-1}. \tag{2.10}$$

С помощью квантовой формулы Найквиста

$$S_{\alpha\beta}{}^{(\xi)}(\omega) = \hbar\omega\mathrm{cth}[\hbar\omega/(2kT)]\mathrm{Re}Z_{\alpha,\beta}(i\omega) \tag{2.11}$$

(см., например, [6, ф. (5.6.42)]) можно получить матрицу спектральных плотностей

$$S_{\alpha\beta}{}^{(\xi)}(\omega) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\, {}^1\!/_2\, \langle[\xi_\alpha(t+\tau),\, \xi(t)]_+\rangle_0\, d\tau \tag{2.12}$$

операторных случайных сил. Здесь нижний индекс 0 обозначает равновесное среднее. Подставляя (2.10) в (2.11), получаем

$$S_{\alpha\beta}{}^{(\xi)}(\omega) = \hbar\omega\lambda_{\alpha\beta}\mathrm{cth}[\hbar\omega/(2kT)]. \tag{2.13}$$

Спектр

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}{}^{(\xi)}(\omega) = \int e^{-i\omega\tau}\,\langle[\xi_\alpha(t+\tau),\, \xi_\beta(t)]\rangle_0 d\tau \tag{2.14}$$

усредненного коммутатора $\langle[\xi_\alpha(t+\tau),\ \xi_\beta(t)]\rangle_0$ может быть найден из (2.10) с помощью формулы (см., например, [6, стр. 197, 198])

$$\langle[D(\tau), B]\rangle_0 = 2\mathrm{th}[i\hbar/(2kT)\ (\partial/\partial\tau)]\ {}^1\!/_2\, \langle[D(\tau),B]_+\rangle_0,$$

которая является следствием формулы Кубо – Мартина – Швингера. В результате получаем

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}{}^{(\xi)}(\omega) = -2\mathrm{th}[\hbar\omega/(2kT)]S_{\alpha\beta}{}^{(\xi)}(\omega)$$

и, следовательно,

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}{}^{(\xi)}(\omega) = -2\hbar\omega\lambda_{\alpha\beta}.$$

Это означает, что

$$\langle[\xi_\alpha(t+\tau),\, \xi_\beta(t)]\rangle_0 = 2i\hbar\lambda_{\alpha\beta}\delta'(\tau) \tag{2.15}$$

с $\delta'(\tau) = d\delta(\tau)/d\tau$.

3. Разделение ланжевеновских сил на две части. Стохастические силы при нулевой температуре

Мы полагаем

$$\xi_\alpha(t) = b_{\alpha\kappa}[\eta_\kappa(t) + \zeta_\kappa(t)], \tag{3.1}$$

где

$$b_{\alpha\kappa}b_{\beta\kappa} = \hbar\lambda_{\alpha\beta} \tag{3.2}$$

и $\eta_\kappa(t)$ являются гауссовыми операторными стохастическими процессами с нулевыми средними значениями и со следующими свойствами

$$S_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\omega) = |\omega|\delta_{\kappa\nu}, \tag{3.3}$$

$$\langle[\eta_\kappa(t_1), \eta_\nu(t_2)]\rangle_0 = 2i\delta_{\kappa\nu}\delta'(t_{12}) \tag{3.4}$$

($t_{12}=t_1-t_2$). Операторы B_1, ... , B_r называются гауссовыми, если они обладают следующими свойствами: (i) все $[B_j,B_k]$ кратны единичному оператору; (ii) логарифм характеристической функции $\langle e^{i\Sigma_j B_j u_j}\rangle$ равен сумме линейных и квадратичных форм по $\{u_j\}$. Благодаря гауссовым свойствам $\xi_\alpha(t)$ и $\eta_\kappa(t)$ знаки усреднения $\langle\ldots\rangle_0$ могут быть опущены в (2.14), (2.15) и (3.4). Нетрудно видеть, что $\tilde{\xi}_\alpha(t) \overset{\text{def}}{=} b_{\alpha\kappa}\eta_\kappa(t)$ являются силами при нулевой температуре, так как для них справедлив предельный вариант (2.13) $S_{\alpha\beta}^{(\tilde{\xi})}(\omega) = \lim_{T\to 0} S_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) = \hbar|\omega|\lambda_{\alpha\beta}$.

Мы полагаем, что $\{\eta_\kappa(t)\}$ и $\{\zeta_\kappa(t)\}$ статистически независимы

$$\langle\eta_\kappa(t_1)\zeta_\nu(t_2)\rangle = 0, \quad \langle\zeta_\nu(t_2)\eta_\kappa(t_1)\rangle = 0. \tag{3.5}$$

Далее,

$$S_{\alpha\beta}^{(\xi)}(\omega) = b_{\alpha\kappa}b_{\beta\nu}[S_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\omega) + S_{\kappa\nu}^{(\zeta)}(\omega)]$$

и, в силу (2.11), (3.1) – (3.3), имеем

$$S_{\kappa\nu}^{(\zeta)}(\omega) = \omega\delta_{\kappa\nu}\{\mathrm{sh}[\hbar\omega/(2kT)]\}^{-1}e^{-\hbar|\omega|/(2kT)}. \tag{3.6}$$

Аналогично получаем

$$[\zeta_\kappa(t_1), \zeta_\nu(t_2)] = 0. \tag{3.7}$$

Из (3.6), (3.7) мы видим, что $\zeta_\kappa(t)$ подобны гауссовым классическим многокомпонентным процессам, дифференцируемым сколько угодно раз. Процессы же $\eta_\kappa(t)$, наоборот, очень сингулярны, а именно, более сингулярны, чем дельта–коррелированные процессы (но менее сингулярны, чем временные производные дельта–коррелированных процессов). Их нужно понимать только как обобщенные процессы.

Если бы интеграл в формулах (3.9) или (3.10) сходился, то расчет обратного преобразования Фурье

$$K_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\tau) \overset{\text{def}}{=} 1/2\,\langle[\eta_\kappa(t+\tau),\eta_\nu(t)]_+\rangle = 1/(2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}S_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\omega)d\omega, \tag{3.8}$$

в силу (3.3), дал бы

$$K_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\tau) = \delta_{\kappa\nu}/(2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}|\omega|d\omega = (1/\pi)\delta_{\kappa\nu}\varphi(\tau) \tag{3.9}$$

с

$$\varphi(\tau) = \int_0^\infty \cos(\omega\tau)\omega d\omega. \tag{3.10}$$

Мы попробуем конкретизировать интеграл (3.10) с помощью предельного перехода $\varphi(\tau) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon(\tau)$, где

$$\varphi_\varepsilon(t) = \int_0^\infty e^{-\varepsilon\omega}\cos(\omega\tau)\omega d\omega = (\varepsilon^2-\tau^2)/(\varepsilon^2+\tau^2)^2. \tag{3.11}$$

Затем мы получаем

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} -1/\tau^2 & \text{при } \tau \neq 0, \\ \infty & \text{при } \tau = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Конечно, последняя формула не может служить определением функции $\varphi(\tau)$ также как уравнение

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \neq 0, \\ \infty & \text{при } \tau = 0 \end{cases}$$

не может быть определением дельта–функции. Правильное определение $\varphi(\tau)$ как обобщенной функции («распределение» Шварца) дается формулой

$$\int_a^b f(\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(b)/b - f(a)/a - \mathrm{P}\int_a^b df(\tau)/d\tau\, d\tau/\tau \quad (3.13)$$

($a < 0$, $b > 0$), где P обозначает главное (в смысле Коши) значение интеграла; $f(\tau)$ принадлежит к семейству функций со следующими свойствами: (1) они имеют первые производные и (2) интеграл в правой части (3.13) существует в смысле главного значения. Из уравнения (3.13) следует, что

$$\varphi(\tau) = d(\mathrm{P}/\tau)/d\tau. \quad (3.14)$$

Формула (3.11) представляет собой ε–приближение этой функции.

Для проверки формулы (3.13) применим ее для расчета преобразования Фурье

$$S_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}K_{\kappa\nu}^{(\eta)}(\tau)d\tau, \quad (3.15)$$

обратного (3.8). Используя выражение в правой части (3.9) и формулу (3.13), мы видим, что правая часть (3.15) равна выражению

$$\lim_{b\to\infty} (1/\pi)\delta_{\kappa\nu}\int_{-b}^{b} e^{-i\omega\tau}\varphi(\tau)d\tau = \lim_{b\to\infty}(1/\pi)\delta_{\kappa\nu}\{e^{-i\omega b}/b + e^{i\omega b}/b + i\omega\mathrm{P}\int_{-b}^{b} e^{-i\omega\tau}d\tau/\tau\}.$$

В пределе $b\to\infty$ это дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}K_{\kappa\lambda}^{(\eta)}(\tau)d\tau = \omega\,\mathrm{sign}\,\omega\,\delta_{\kappa\lambda},$$

что согласуется с (3.3). Здесь использована хорошо известная формула $(2\pi i)^{-1}\times\mathrm{P}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\tau^{-1}d\tau = {}^1/_2\mathrm{sign}\,\omega$.

4. Интегральные операторные процессы

Для нас желательно работать с процессами менее сингулярными, чем процессы при нулевой температуре $\eta_\kappa(t)$, а именно, с процессами, имеющими конечный средний квадрат. Для этой цели мы сначала введем неопределенные интегралы от $\eta_\kappa(t)$

$$\upsilon_\kappa^{\mathrm{id}}(t) = \int\eta_\kappa(t)dt + \mathrm{const}, \quad \sigma_\kappa^{\mathrm{id}}(t)dt = \int\upsilon_\kappa^{\mathrm{id}}(t)dt + \mathrm{const}$$

или

$$\upsilon_\kappa^{\mathrm{id}}(t) = \int_0^t\eta_\kappa(t')dt' + \upsilon_\kappa^0, \quad \sigma_\kappa^{\mathrm{id}}(t)dt = \int_0^t\upsilon_\kappa^{\mathrm{id}}(t')dt' + \sigma_\kappa^0. \quad (4.1)$$

При этом υ_κ^0, σ_κ^0 – некоторые гауссовы операторы (с нулевыми средними значениями), не зависящие от t. Затем мы конкретизируем интегралы, то есть перейдем к определенным интегралам, положив

$$\tilde{\upsilon}_\kappa(t,t_*) = \int_{t_*}^{t} \eta(t')dt', \qquad (4.2)$$

$$\upsilon_\kappa(t)=\int_{-1}^{0}\tilde{\upsilon}_\kappa(t,t_*)dt_* = \int_0^t\eta_\kappa(t')dt'+\int_{-1}^{0}(1+t')\eta(t')dt', \quad t \geq t_0. \qquad (4.3)$$

Кроме того

$$\sigma_\kappa(t) = \int_0^t \upsilon_\kappa(t')dt'. \qquad (4.4)$$

Формула (4.2) может быть записана в виде

$$\tilde{\upsilon}_\kappa(t,t_*) = \int_{t_*}^{t} dt' e^{s(t'-t)}\eta_\kappa(t) = (1/s)\{1 - e^{-s(t-t_*)}\}\eta_\kappa(t), \qquad (4.5)$$

где $s=\partial/\partial t$. В силу (4.5) получаем

$$\tfrac{1}{2}\langle[\tilde{\upsilon}_\kappa(t_1,t_*),\tilde{\upsilon}_\nu(t_2,t_*)]_+\rangle_0=(-1/s_1^2)\{1-e^{-s_1(t_1-t_*)}\}\{1-e^{s_1(t_2-t_*)}\}K_{\kappa\nu}^{(\eta)}(t_1-t_2) \qquad (4.6)$$

($s_1=\partial/\partial t_1$). Подстановка формулы (3.9) в правую часть (4.6) дает

$$\tfrac{1}{2}\langle[\tilde{\upsilon}_\kappa(t_1, t_*), \tilde{\upsilon}_\nu(t_2,t_*)]_+\rangle_0 = \delta_{\kappa\nu}/(2\pi)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t_{12}}\{1-e^{-i\omega(t_1-t_*)}\}\{1-e^{i\omega(t_2-t_*)}\}d\omega/|\omega|. \qquad (4.7)$$

Для $t_1=t_2$ этот интеграл расходится логарифмически при $\omega=\pm\infty$, то есть значительно слабее, чем (3.9) и слабее, чем интегральное представление дельта функции. Это свидетельствует о том, что $\tilde{\upsilon}_\kappa(t_1,t_*)$ и $\upsilon_\kappa(t)$ менее сингулярны, чем $\eta_\kappa(t)$ и даже чем дельта–коррелированные процессы. Мы можем получить следующую формулу

$$\sigma_\kappa(t) = (1/s^2)\{1 - e^{-st} - t[e^{-st} - e^{-s(t+1)}]\}\eta_\kappa(t) \qquad (4.8)$$

точно также, как мы получили (4.5). Если мы запишем формулу типа (4.7) для $\tfrac{1}{2}\langle[\sigma_\kappa(t_1),\sigma_\nu(t_2)]_+\rangle_0$, то мы увидим, что интеграл сходится. Это доказывает, что процесс $\sigma_\kappa(t)$ является конечным, то есть несингулярным.

Расчеты показывают (см. Приложение 1), что процессы $\upsilon_\kappa(t)$, $\sigma_\kappa(t)$ имеют следующие двухвременные симметризованные моменты и коммутаторы

$$\tfrac{1}{2}\langle[\upsilon_\kappa(t_1),\upsilon_\nu(t_2)]_+\rangle_0 = \pi^{-1}\delta_{\kappa\nu}[-\ln|t_{12}| + (t_1+1)\ln(t_1+1) +$$

$$+ (t_2+1)\ln(t_2+1) - t_1\ln t_1 - t_2\ln t_2 - \tfrac{1}{2}], \qquad (4.9)$$

$$\tfrac{1}{2}\langle[\sigma_\kappa(t_1),\sigma_\nu(t_2)]_+\rangle_0 =(2\pi)^{-1}\delta_{\kappa\nu}[t_{12}^2\ln|t_{12}| + t_2(t_1+1)^2\ln(t_1+1) +$$

$$+ t_1(t_2+1)^2\ln(t_2+1) - (t_2+1)t_1^2\ln t_1 - (t_1+1)t_2^2\ln t_2], \qquad (4.10)$$

$$[\upsilon_\kappa(t_1),\upsilon_\nu(t_2)] = -i\delta_{\kappa\nu}\mathrm{sign}\,t_{12}, \qquad (4.11)$$

$$[\sigma_\kappa(t_1),\sigma_\nu(t_2)] = \tfrac{1}{2}\, i\delta_{\kappa\nu}(t_{12}|t_{12}| - t_1^2 + t_2^2). \qquad (4.12)$$

Из (4.10) мы видим, что процессы $\sigma_\kappa(t)$ имеют конечный средний квадрат при каждом t в отличие от $\eta_\kappa(t)$ и $\upsilon_\kappa(t)$. Это означает, что $\sigma_\kappa(t)$ являются обычными (не обобщенными) операторными стохастическими процессами. С этого момента мы будем считать (4.10) и (4.12) постулатами.

5. Интегральная форма динамических уравнений

Дифференцируя обе части уравнения (2.3) и используя (2.4), получаем

$$m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta = -U_{1\alpha}(q) - \lambda_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta + b_{\alpha\kappa}[\ddot{\sigma}_\kappa(t) + \zeta_\kappa(t)]. \tag{5.1}$$

Здесь, согласно уравнениям (3.1), (4.3) и (4.4), вместо $\xi_\alpha(t)$ записано $\ddot{\sigma}_\kappa(t)+\zeta_\kappa(t)$. Так как операторные процессы $\sigma_\kappa(t)$ не являются дифференцируемыми в обычном смысле, то более удобно записать (5.1) в другой форме, используя дифференциалы,

$$m_{\alpha\beta}d^2q_\alpha = -U_{1\alpha}(q)dt^2 - \lambda_{\alpha\beta}dq_\beta dt + b_{\alpha\kappa}[d^2\sigma_\kappa(t) + \zeta_\kappa(t)dt^2]. \tag{5.2}$$

Эта дифференциальная форма уравнения является более сложной, чем форма (1.2) неквантовой теории. Конечно, форма (5.2) предполагает здесь интегрирование по t. Интегральная форма (5.2) имеет вид

$$m_{\alpha\beta}q_\beta(t) = \int_{t_0}^{t}(t-t')[-U_{1\alpha}(q(t')) + b_{\alpha\kappa}\zeta(t')]dt' - \lambda_{\alpha\beta}\int_{t_0}^{t}q_\beta(t')dt' +$$

$$+ b_{\alpha\kappa}[\sigma_\kappa(t) - \sigma_\kappa(t_0)] + [m_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha\beta}(t-t_0)]q_\beta(t_0) + [m_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta(t_0) - b_{\alpha\kappa}\dot{\sigma}_\kappa(t_0)](t-t_0) \tag{5.3}$$

($t_0\geq 0$). Дифференцированием легко проверить, что формула (5.3) эквивалентна (5.1) или (5.2). Предпочтительнее использовать интегральное уравнение (5.3), потому что все входящие в него операторы (за исключением $\dot{\sigma}_\kappa(t_0)$ и, может быть, $\dot{q}_\beta(t_0)$) конечны, то есть имеют конечные средние квадраты. Правда, как это можно видеть из (4.4), (4.9),

$$\langle[\dot{\sigma}_\kappa(t_0)]^2\rangle = \langle\upsilon_\kappa^2(t_0)\rangle = \infty,$$

но мы требуем, чтобы разность $m_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta(t_0) - b_{\alpha\kappa}\dot{\sigma}_\kappa(t_0)$ была конечной

$$\langle[m_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta(t_0) - b_{\alpha\kappa}\dot{\sigma}_\kappa(t_0)]^2\rangle < \infty\,. \tag{5.4}$$

Это накладывает ограничения на выбор $q_\alpha(t_0)$. В этом случае $\langle\dot{q}_\beta(t_0)\dot{q}_\gamma(t_0)\rangle$ и $\langle\dot{q}_\beta(t_0)\dot{\sigma}_\kappa(t_0)\rangle$ должны быть бесконечными, как и $\langle[\dot{\sigma}_\kappa(t_0)]^2\rangle$. В силу (5.4) интегральное уравнение (5.3) с математической точки зрения вполне корректно.

Могут быть выведены другие интегральные уравнения, эквивалентные (5.3). Например мы можем решить уравнение $m_{\alpha\beta}\ddot{q}_\beta+\lambda_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta+a_{\alpha\beta}q_\beta=\ldots$, временно полагая его правую часть известной. Для его решения удобно применить метод преобразования Лапласа. Таким образом мы получаем следующее интегральное уравнение

$$q_\alpha(t) = \int_{t0}^{t} G_{\alpha,\beta}(t-t')[-\tilde{U}_{1\beta}(q(t')) + b_{\beta\kappa}\zeta_\kappa(t')]dt' - \int_{t0}^{t}\dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t')b_{\gamma\kappa}d\sigma_\kappa(t') +$$

$$+ \dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t_0)m_{\beta\gamma}q_\gamma(t_0) + G_{\alpha,\beta}(t-t_0)[\lambda_{\beta\gamma}q_\gamma(t_0) + m_{\beta\gamma}\dot{q}_\gamma(t_0) - b_{\beta\kappa}\dot{\sigma}_\kappa(t_0)] \qquad (5.5)$$

($t_0 \geq 0$). Здесь $G_{\alpha,\beta}(t)$ матрица функций, имеющих преобразование Лапласа $\|\hat{m}s^2 + \hat{\lambda}s + \hat{a}\|^{-1}$, $\dot{G}_{\alpha,\beta}(t)=dG_{\alpha,\beta}(t)/dt$. Интеграл, содержащий $d\sigma(t')/dt'$ был взят по частям. В (5.5) было использовано обозначение $\tilde{U}(q)=U(q)-{}^1/_2 a_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta$. Уравнение (5.5) имеет то же самое преимущество перед (5.1), что и перед (5.3).

6. Один метод решения интегральных уравнений

Стохастические уравнения (5.5) могут быть решены итерациями согласно схеме

$$q_\alpha^{(n)}=\int_{t0}^{t} G_{\alpha,\beta}(t-t')[-\tilde{U}_{1\beta}(q^{(n-1)}(t')) + b_{\beta\kappa}\zeta_\kappa(t')]dt' - \int_{t0}^{t}\dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t')b_{\gamma\kappa}d\sigma_\kappa(t') +$$

$$+ \dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t_0)m_{\beta\gamma}q_\gamma^0+G_{\alpha,\beta}(t-t_0)[\lambda_{\beta\gamma}q_\gamma^0 + m_{\beta\gamma}\dot{q}_\gamma^0 - b_{\beta\kappa}\dot{\sigma}_\kappa^0] \qquad (6.1)$$

($q_\alpha^0=q_\alpha(t_0)$ и так далее). Здесь $q_\alpha^{(n)}$ – n–ое приближение. В случае справедливости уравнения (2.7) разумно взять $q_\alpha^0=\langle q_\alpha\rangle_0=0$ в качестве нулевого приближения. Тогда мы получаем приближение первого порядка

$$q_\alpha^{(1)} = \int_{t0}^{t} G_{\alpha,\beta}(t-t')b_{\beta\kappa}\zeta_\kappa(t')dt' - \int_{t0}^{t}\dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t')b_{\gamma\kappa}d\sigma_\kappa(t')+[G_{\alpha,\beta}(t-t_0)\lambda_{\beta\gamma}+$$

$$+ \dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t_0)m_{\beta\gamma}]q_\gamma^0 + G_{\alpha,\beta}(t-t_0)[m_{\beta\gamma}\dot{q}_\gamma^0 - b_{\beta\kappa}\dot{\sigma}_\kappa^0], \qquad (6.2)$$

если $T=T_0$. В Приложении 2 показано, что стохастический интеграл $\int_{t0}^{t}\dot{G}_{\alpha,\beta}(t-t')b_{\gamma\kappa}d\sigma_\kappa(t')$, входящий в (5.5), (6.1), (6.2), можно понимать как предел в смысле нормы $\|A\|_\rho = [\mathrm{Tr} AA^\dagger \rho]^{1/2}$. Для случая

$$U_1(q) \equiv U_1(0) + {}^1/_2\, a_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta + {}^1/_6\, b_{\alpha\beta\gamma}q_\alpha q_\beta\, q_\gamma$$

приближение второго порядка может быть записано в форме

$$q_\alpha^{(2)} = \int_{t0}^{t} G_{\alpha,\beta}(t-t_2)\xi_\alpha(t_2)dt_2 + {}^1/_2\int_{t0}^{t}\int_{t0}^{t} G_{\alpha,\beta\gamma}(t-t_2,t-t_3)\xi_\beta(t_2)\xi_\gamma(t_3)dt_2dt_3, \qquad (6.3)$$

где положено $t_0 = -\infty$ и введено обозначение

$$G_{\alpha,\beta\gamma}(t-t_2,\, t-t_3)=-\int_{-\infty}^{t} G_{\alpha,\mu}(t-t')b_{\mu\nu\sigma}G_{\mu,\beta}(t'- t_2)G_{\nu,\gamma}(t'-t_3). \qquad (6.4)$$

Формула (6.2) может быть использована для нахождения нестационарного симметризованного момента

$${}^1/_2\,\langle[q_\alpha^{(1)}(t_1),\, q_\beta^{(1)}(t_2)]_+\rangle =\int_{t0}^{t_1}\int_{t0}^{t_2}\dot{G}_{\alpha,\gamma}(t_1-t'_1)\dot{G}_{\beta,\delta}(t_2-t_2')b_{\gamma\kappa}b_{\delta\lambda} \times$$

$$\times\, {}^1/_2\,\langle[\dot{\sigma}_\kappa(t_1'),\, \dot{\sigma}_\lambda(t_2')]_+\rangle\, dt_1'dt_2'' + S, \qquad (6.5)$$

где S – сумма всех членов, которые могут быть выражены через

$$\langle[\dot\sigma_\kappa(t_1'), \dot\sigma_\lambda(t_0)]_+\rangle,\ \langle[\dot\sigma_\kappa(t_1'), m_{\beta\gamma}\dot q_\gamma^0 - b_{\beta\lambda}\dot\sigma_\lambda^0]_+\rangle,\ \langle[\dot\sigma_\kappa(t_1'), q_\gamma^0]_+\rangle \tag{6.6}$$

и

$$\langle[m_{\beta\gamma}\dot q_\gamma^0 - b_{\beta\kappa}\dot\sigma_\kappa^0, q_\mu^0]_+\rangle,\ \langle[m_{\beta\gamma}\dot q_\gamma^0 - b_{\beta\kappa}\dot\sigma_\kappa^0,\ m_{\delta\mu}\dot q_\mu^0 - b_{\delta\lambda}\dot\sigma_\lambda^0]_+\rangle,\ \langle[q_\delta^0, q_\mu^0]_+\rangle. \tag{6.7}$$

Полученный выше результат (6.5) отличается от соответствующего неквантового варианта, который можно получить с помощью марковской теории, а также от того, который может быть получен на основе квантовой марковской теории, присутствием в нем зависимости $^1/_2\langle[q_\alpha^{(1)}(t_1), q_\beta^{(1)}(t_2)]_+\rangle$ от антикоммутаторов (6.6) и (6.7)

Из (4.9) легко можно видеть, что двойной интеграл в правой части (6.5) и интегралы в (6.6) конечны. Таким образом, величины $^1/_2\langle[q_\alpha^{(1)}(t_1), q_\beta^{(1)}(t_2)]_+\rangle$ конечны, если антикоммутаторы (6.7) конечны.

7. Стационарные моменты и корреляторы. Негауссовы свойства $q_\alpha(t)$

Формулы (6.2), (6.3) могут быть применены для расчета тройных и четверных моментов и корреляторов (кумулянтов) от $q_\alpha(t)$. Однако нет небходимости использовать эти формулы для нахождения стационарных моментов и корреляторов, так как для этой цели можно непосредственно пользоваться флуктуационно–диссипационными теоремами. Согласно обычной флуктуационно–диссипационной теореме (см., например, [6, ф. (5.3.9)]) имеем

$$^1/_2\langle[q_\alpha^{(1)}(\omega_1), q_\beta^{(1)}(\omega_2)]_+\rangle = {}^1/_2 i\hbar \mathrm{cth}[\hbar\omega_2/(2kT)]\,\mathrm{Im}F_{\alpha\beta}(\omega_1)\delta(\omega_1+\omega_2) \tag{7.1}$$

с $\hat F(\omega) = ||-\hat m\omega^2 + \hat\lambda i\omega + \hat a||^{-1}$, $q_\alpha^{(1)}(\omega) = (2\pi)^{-1/2}\int e^{-i\omega t}q_\alpha^{(1)}(t)dt$.

Тройные и четверные корреляторы (кумулянты) $\langle q_{\alpha 1}(\omega_1), q_{\alpha 2}(\omega_2), q_{\alpha 3}(\omega_3)\rangle$, $\langle q_1, q_2, q_3, q_4\rangle$ описывают негауссовы свойства $q_\alpha(t)$ или $q_\alpha(\omega)$. Здесь и в дальнейшем используем обозначения $q_1 = q_{\alpha 1}(\omega_1)$, $q_2 = q_{\alpha 2}(\omega_2)$ и т. д. В силу [6, ф. (5.3.65)] имеем

$$\langle q_\alpha(\omega_1), q_\beta(\omega_2), q_\gamma(\omega_3)\rangle = -2\hbar^2[\Gamma_2^-\Gamma_3^-\,\mathrm{Re}G'_{\alpha,\beta\gamma}(\omega_2,\omega_3) + \Gamma_1^+\Gamma_3^-\mathrm{Re}G'_{\beta,\alpha\gamma}(\omega_1,\omega_3) +$$

$$+ \Gamma_1^+\Gamma_2^+\mathrm{Re}G'_{\gamma,\alpha\beta}(\omega_1,\omega_2)]\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3), \tag{7.2}$$

где

$$\Gamma_j^\pm = -{}^1/_2\mathrm{cth}[\hbar\omega_j/(2kT)] \pm {}^1/_2,$$

$$G'_{\alpha 1,\alpha 2,\alpha 3}(\omega_2,\omega_3) = -F_{\alpha\lambda}(-\omega_2-\omega_3)b_{\lambda\mu\nu}F_{\mu\beta}(-\omega_2)F_{\nu\gamma}(-\omega_3) \tag{7.3}$$

((7.3) является спектром от (6.4)).

Кроме того, в случае, когда

$$U_1(q) \equiv U_1(0) + {}^1/_2\, a_{\alpha\beta}q_\alpha q_\beta + {}^1/_{24}\, c_{\alpha\beta\gamma\delta}q_\alpha q_\beta\, q_\gamma\, q_\delta$$

и когда коэффициенты трения $\lambda_{\alpha\beta}$ не флуктуируют, мы имеем, согласно [6, ф. (5.4.20)],

$$\langle q_\alpha(\omega_1), q_\beta(\omega_2), q_\gamma(\omega_3), q_\delta(\omega_4)\rangle = 2\hbar^3[\Gamma_2^-\Gamma_3^-\Gamma_4^-\,\mathrm{Im}G'_{\alpha,\beta\gamma\delta}(\omega_2,\omega_3,\omega_4) +$$

$$+ \Gamma_1^+\Gamma_3^-\Gamma_4^-\,\mathrm{Im}G'_{\beta,\alpha\gamma\delta}(\omega_2,\omega_3,\omega_4) + \Gamma_1^+\Gamma_2^+\Gamma_4^-\,\mathrm{Im}G'_{\gamma,\alpha\beta\delta}(\omega_1,\omega_2,\omega_4) +$$

$$+ \Gamma_1^+\Gamma_2^+\Gamma_3^+\mathrm{Im}G'_{\delta,\alpha\beta\gamma}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)]\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4). \tag{7.4}$$

Здесь

$$G'_{\alpha,\beta\gamma\delta}(\omega_2,\,\omega_3,\,\omega_4) = -F_{\alpha\lambda}(-\omega_2-\omega_3-\omega_4)c_{\lambda\mu\nu\sigma}F_{\mu\beta}(-\omega_2)F_{\nu\gamma}(-\omega_3)F_{\sigma\delta}(-\omega_4).$$

В случае, когда коффициенты $\lambda_{\alpha\beta}$ являются случайными процессами, к правой части (7.4) следует добавить несколько последующих членов. Обозначая правую часть (7.4) точками, мы получаем, согласно [6, ф. (5.4.85)],

$$\langle q_1,q_2,q_3,q_4\rangle = \ldots - \hbar^2[\Gamma_3^-\Gamma_4^-G_{12,34}^{(2)} + \Gamma_4^-(\Gamma_3^-G_{13,24}^{-(2)} + \Gamma_3^+G_{31,24}^{+(2)}) +$$
$$+ e^{-\beta\hbar\omega_1}\Gamma_2^+\Gamma_3^+G_{41,23}^{(2)} + \Gamma_1^+\Gamma_4^-G_{23,14}^{(2)} +$$
$$+ \Gamma_1^+(\Gamma_3^-G_{24,31}^{-(2)}+\Gamma_3^+G_{42,31}^{+(2)})+\Gamma_1^+\Gamma_2^+G_{34,12}^{(2)}]. \qquad (7.5)$$

Здесь $G_{12,34}^{(2)} = G_{12,34}^{-(2)} + G_{21,34}^{+(2)}$ и, в силу [6, ф. (5.4.77), (5.7.49)],

$$G_{12,34}^{-(2)} = F_{\alpha 1\kappa}(\omega_1)F_{\alpha 2\mu}(\omega_2)[J^-_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) + K_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4)] \times$$
$$\times F_{\nu\alpha 3}(-\omega_3)F_{\sigma\alpha 4}(-\omega_4),$$
$$G_{21,34}^{+(2)} = F_{\alpha 1\kappa}(\omega_1)F_{\alpha 2\mu}(\omega_2)[J^+_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) + K_{\mu\kappa,\sigma\nu}(\omega_2,\omega_1,\omega_4,\omega_3)] \times$$
$$\times F_{\nu\alpha 3}(-\omega_3)F_{\sigma\alpha 4}(-\omega_4).$$

Согласно теории, приведенной в Приложении 3, функции $J^{\pm}_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega_1,\ldots,\omega_4)$ равны нулю. Кроме того, используя (П3.5) и переходя к спектральному распределению, имеем

$$K_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega_1,\ldots,\omega_4) = -(8\pi)^{-1}(\omega_1-\omega_3)(\omega_2-\omega_4)S_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega_1+\omega_3)\delta(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4), \qquad (7.6)$$

где

$$S_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}R_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\tau)d\tau,$$

$$R_{\kappa\mu,\nu\sigma}(\tau) = \langle\lambda_{\kappa\mu}(t+\tau),\,\lambda_{\nu\sigma}(t)\rangle.$$

Средние значения различных коммутаторов и антикоммутаторов (и их комбинации) от q_1, q_2, q_3, q_4 могут быть получены с помощью формул (7.2), (7.4), (7.5).

Автор благодарен В.П.Белавкину за интересные обсуждения и факультету математики Ноттингемского университета за гостеприимство.

Работа была выполнена при финансовой поддержке E.P.S.R.C.(проект GR/K08024).

Приложение 1

Некоторые полезные интегралы

Нетрудно проверить, что

$$J_1(t_1,t_2,t_{10},t_{20}) \overset{\text{def}}{=} \int_{t_{10}}^{t_1}ds_1\int_{t_{20}}^{t_2}ds_2 f(s_1-s_2)=-F(t_1-t_2)+F(t_1-t_{20})+F(t_{10}-t_2)-F(t_{10}-t_{20}), \qquad (\text{П1. }1)$$

где $F(t)$ определяется формулой $d^2F(\tau)/d\tau^2=f(\tau)$. Применяя эту формулу к ε–приближению $f(\tau)=\varphi_\varepsilon(\tau)=(\varepsilon^2-\tau^2)/(\tau^2+\varepsilon^2)^2=-{}^1/_2[(\tau+i\varepsilon)^2+(\tau-i\varepsilon)^{-2}]$ функции $\varphi(\tau)$, получаем

$$dF(\tau)/d\tau = {}^1\!/_2\,[(\tau + i\varepsilon)^{-1} + (\tau - i\varepsilon)^{-1}], \qquad F(\tau) = {}^1\!/_2 \ln(\tau^2 + \varepsilon^2).$$

Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{t_{10}}^{t_1} ds_1 \int_{t_{20}}^{t_2} ds_2 \varphi_\varepsilon(s_1 - s_2) = -\ln|t_{12}| + \ln(t_1 - t_{20}) + \ln(t_2 - t_{10}) - \ln|t_{10} - t_{20}| \quad (\text{П}1.2)$$

и, в силу (4.2), (3.9),

$${}^1\!/_2 \langle [\tilde{\upsilon}_\kappa(t_1, t_{10}), \tilde{\upsilon}_\nu(t_2, t_{20})]_+ \rangle = \pi^{-1}\delta_{\kappa\nu} \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{t_{10}}^{t_1} ds_1 \int_{t_{20}}^{t_2} ds_2 \varphi_\varepsilon(s_1 - s_2) =$$

$$= \pi^{-1}\,\delta_{\kappa\nu}[-\ln|t_{12}| + \ln(t_1 - t_{20}) - \ln(t_2 - t_{10}) - \ln|t_{10} - t_{20}|] \quad (\text{П}1.3)$$

при $t_1, t_2 \geq 0$; $t_{10}, t_{20} \leq 0$.

Для последующего интегрирования выражения (П1.3), соответствующего (4.3) и (4.4), используем функции $G'(\tau)$ и $G(\tau)$, определяемые формулами $dG'(\tau)/d\tau = F(\tau)$, $dG(\tau)/d\tau = G'(\tau)$. Получаем

$$J_2(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-1}^{0} dt_{10} \int_{-1}^{0} dt_{20} J_1(t_1, t_2, t_{10}, t_{20}) =$$

$$= -F(t_1 - t_2) + G'(t_1 + 1) - G'(t_1) - G'(-t_2 - 1) + G'(-t_2) - G(1) - G(-1) + 2G(0), \quad (\text{П}1.4)$$

$$J_3(t_1, t_2) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{t_1} ds_1 \int_0^{t_2} ds_2 J_2(s_1, s_2) = G(t_1 - t_2) - G(t_1) - G(-t_2) + G(0) +$$

$$+ t_2[G(t_1 + 1) - G(1) - G(t_1) + G(0)] + t_1[G(-t_2 - 1) - G(-1) - G(-t_2) + G(0)] -$$

$$- t_1 t_2 [G(1) + G(-1) - 2G(0)]. \quad (\text{П}1.5)$$

Здесь формула (П1.1) с F , взятым вместо f, была использована для нахождения интегралов от $F(t_1 - t_2)$ и $F(t_{10} - t_{20})$.

Для получения симметризованного момента для $\upsilon_\kappa(t)$ и $\sigma_\kappa(t)$ мы применяем формулы (П1.4), (П1.5), соответственно, к функции $G(\tau) = {}^1\!/_2\tau^2 \ln|\tau|$, так как $d^2G(\tau)/d\tau^2 = \ln|\tau| + {}^3\!/_2$. Таким образом, получаем формулы (4.9), (4.10). Для нахождения двухвременных коммутаторов для $\upsilon_\kappa(t)$ и $\sigma_\kappa(t)$ мы используем формулы (П1.4) и (П1.5) для случая $G(\tau) = {}^1\!/_4\tau|\tau|$, так что $d^4G(\tau)/d\tau^4 = \delta'(\tau)$. Таким образом мы получаем формулы (4.11), (4.12).

Приложение 2

Интерпретация квантового стохастического интеграла с помощью предельной процедуры

В уравнения (5.5), (6.1), (6.2) входят стохастические интегралы типа $S = \int_{t_0}^{\tau} f(t) d\sigma_\kappa(t)$, $t_0 > 0$ с действительной функцией $f(t)$. В этом Приложении мы рассмотрим однокомпонентный случай $\sigma(t) = \sigma_1(t)$. Уточним, в каком смысле следует понимать эти интегралы.

Удобно рассматривать равномерное разбиение отрезка $[t_0, \tau]$ точками

$$t_j = t_0 + j\varepsilon, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad (\text{П}2.1)$$

с $\varepsilon = (\tau - t_0)/N$. Будем понимать интеграл S как предел ($\varepsilon \to 0$) суммы

$$\Sigma = \Sigma_{j=0}^{N-1} f(t_j)[\sigma(t_{j+1}) - \sigma(t_j)], \qquad (П2.2)$$

где $f_j = f(t_j)$ (или $f_j = [f(t_j)+f(t_{j+1})]/2$, что в этом случае дает тот же самый предел).

Для доказательства того, что сумма (П2.2) сходится к некоторому пределу в среднем или в смысле нормы $\|A\|_\rho = [\mathrm{Tr} AA^\dagger\rho]^{1/2} = \langle AA^\dagger\rangle^{1/2}$ при $\varepsilon \to 0$, удобно рассмотреть последовательность разбиений, определяемых точками

$$t_j^{(n)} = t_0 + j\varepsilon_n, \quad j = 0,1,\dots,2^n, \quad \varepsilon_n = (\tau - t_0)/2^n, \qquad (П2.3)$$

то есть $N = N_n = 2^n$.

Сравним сумму

$$\Sigma_n = \Sigma_{j=0}^{N_n-1} f(t_j^{(n)})\,\Delta_j = \Sigma_{k=0}^{N_{n-1}-1}[f(t_{2k}^{(n)})\,\Delta_{2k} + f(t_{2k+1}^{(n)})\Delta_{2k+1}] \qquad (П2.4)$$

с суммой

$$\Sigma_{n-1} = \Sigma_{k=0}^{N_{n-1}-1} f(t_{2k}^{(n)})(\Delta_{2k}+\Delta_{2k+1}). \qquad (П2.5)$$

В формулах (П2.4) и (П2.5) Δ_i имеет один и тот же смысл: $\Delta_i = \sigma(t_{i+1}^{(n)}) - \sigma(t_i^{(n)})$. Вычитая из формулы (П2.4) формулу (П2.5), получаем

$$\Delta\Sigma_n = \Sigma_n - \Sigma_{n-1} = \Sigma_{k=0}^{N_{n-1}-1}(f_{2k+1} - f_{2k})\Delta_{2k+1} \qquad (П2.6)$$

с $f_j = f(t_j^{(n)})$. Используем (П2.6) для оценки среднего квадрата

$$D_n = \langle \Delta\Sigma_n\, \Delta\Sigma_n^\dagger\rangle = \langle \Delta\Sigma_n^2\rangle$$

от разности $\Delta\Sigma_n$ при больших n. После подстановки (П2.6) получаем

$$D_n = \Sigma_{k=0}^{N_{n-1}-1} \Sigma_{l=0}^{N_{n-1}-1}(f_{2k+1}-f_{2k})(f_{2l+1}-f_{2l})\,{}^1\!/_2\,\langle [\Delta_{2k+1}, \Delta_{2l+1}]_+\rangle \le$$

$$\le \Sigma_{k=0}^{N_{n-1}-1} \Sigma_{l=0}^{N_{n-1}-1} |(f_{2k+1}-f_{2k})(f_{2l+1}-f_{2l})|\,{}^1\!/_2\,|\langle [\Delta_{2k+1}, \Delta_{2l+1}]_+\rangle|. \qquad (П2.7)$$

Обозначая $\Delta f_{\max} = \max_k |f_{2k+1} - f_{2k}|$, получим

$$D_n \le (\Delta f_{\max})^2 \Sigma_{k=0}^{N_{n-1}-1} \Sigma_{l=0}^{N_{n-1}-1} {}^1\!/_2\,|\langle[\Delta_{2k+1}, \Delta_{2l+1}]_+\rangle| \le (\Delta f_{\max})^2 \Sigma_{i=0}^{N_n-1} \Sigma_{j=0}^{N_n-1} {}^1\!/_2 |\langle [\Delta_i, \Delta_j]_+\rangle|. \qquad (П2.8)$$

Но ${}^1\!/_2|\langle[\Delta_i,\Delta_j]_+\rangle| = {}^1\!/_2\langle[\Delta_i,\Delta_j]_+\rangle$ в силу положительности ${}^1\!/_2\langle[\Delta_i,\Delta_j]_+\rangle$. Действительно, эту величину можно получить интегрированием положительной функции (4.9) по квадрату, определяемому соотношениями $t_i^{(n)} \le t_1 \le t_{i+1}^{(n)}$, $t_j^{(n)} \le t_2 \le t_{j+1}^{(n)}$. Учитывая, что $\Sigma_{i=0}^{N_n-1}\Delta_i = \sigma(\tau) - \sigma(0)$, из (П2.8) получаем

$$D_n \le (\Delta f_{\max})^2 \Sigma_{i=0}^{N_n-1} \Sigma_{j=0}^{N_n-1} {}^1\!/_2\langle[\Delta_i, \Delta_j]_+\rangle \equiv A(\Delta f_{\max})^2, \qquad (П2.9)$$

при этом средний квадрат $A = \langle[\sigma(\tau) - \sigma(0)]^2\rangle$ является конечным в силу (4.10). Мы полагаем, что функция $f(t)$ обладает свойством

$$\max_t |f(t+\varepsilon) - f(t)| \le C\varepsilon^\alpha,$$

где $\alpha > 0$. Далее,

$$D_n \le AC^2(\tau - t_0)^{2\alpha} e^{-2\alpha n}. \qquad (П2.10)$$

Теперь рассмотрим разность

$$\Sigma_{n+m}-\Sigma_{n-1}=\Sigma_{p=n}^{n+m}(\Sigma_p-\Sigma_{p-1}). \qquad (\text{П}2.11)$$

Очевидно, мы имеем

$$\langle(\Sigma_{n+m}-\Sigma_{n-1})^2\rangle=\Sigma_{p=n}^{n+m}\Sigma_{q=n}^{n+m}\Delta\Sigma_p\Delta\Sigma_q=1/2\ \Sigma_{p=n}^{n+m}\Sigma_{q=n}^{n+m}[\Delta\Sigma_p\Delta\Sigma_q]_+\ . \qquad (\text{П}2.12)$$

Неравенство

$$1/2|\langle[\Delta\Sigma_p\Delta\Sigma_q]_+\rangle|\le D_p^{1/2}D_q^{1/2}, \qquad (\text{П}2.13)$$

справедливое для самосопряженных $\{\Delta\Sigma_p\}$, легко получить на том основании, что уравнение $\langle(\Delta\Sigma_p-x\Delta\Sigma_q)^2\rangle=0$ не может иметь действительных корней x_1, $x_2\neq x_1$, так как $\langle(\Delta\Sigma_p-x\Delta\Sigma_q)^2\rangle\ge0$ при любом действительном значении x. Применяя (П2.13) к (П2.12), получаем

$$\langle(\Sigma_{n+m}-\Sigma_{n-1})^2\rangle\le\{\Sigma_{p=n}^{n+m}D_n^{1/2}\}^2\le\{\Sigma_{p=n}^{\infty}D_n^{1/2}\}^2.$$

Отсюда с помощью (П2.10) получаем окончательно

$$\langle(\Sigma_{n+m}-\Sigma_{n-1})^2\rangle\le AC^2(\tau-t_0)^{2\alpha}[1-e^{-\alpha}]^{-2}e^{-2\alpha n}. \qquad (\text{П}2.14).$$

То, что правая часть (П2.14) не зависит от m ($m\ge n$) и стремится к нулю при $n\to\infty$, говорит о том, что Σ_n имеет предел в среднем (то есть с нормой $\|A\|_\rho=\langle AA^\dagger\rangle^{1/2}$). Согласно определению, этот предел представляет собой стохастический интеграл $\int_{t_0}^{\tau}f(t)d\sigma(t)$. Для случая интегралов в правых частях (6.1) и (6.2) константа α, входящая в (П2.10) и (П2.14), равна 1.

Приложение 3

Вклад флуктуаций коэффициентов трения в четверные корреляторы

В случае импеданса (2.10) уравнение [6, ф. (5.6.101*а*)] дает следующий результат:

$$\langle\xi_\alpha(t_1)\xi_\beta(t_2)\rangle=2i\hbar p_2\Gamma_2^-\delta(t_1-t_2)\lambda_{\alpha\beta}=i\hbar(\Gamma_1^+-\Gamma_2^-)\delta'_{12}\lambda_{\alpha\beta}, \qquad (\text{П}3.1)$$

где $\delta'_{12}=\delta'(t_1-t_2)$, $\delta'(\tau)=d\delta(\tau)/d\tau$, $\Gamma_j^\pm=1/2\text{cth}[i\hbar p_j/(2kT)]\pm1/2$, $p_j=\partial/\partial t_j$. Пусть $\lambda_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha\beta}^0+\delta\lambda_{\alpha\beta}$, где $\lambda_{\alpha\beta}^0=\langle\lambda_{\alpha\beta}\rangle$ и $\delta\lambda_{\alpha\beta}$ являются случайными. Вначале мы положим, что $\delta\lambda_{\alpha\beta}$ не зависят от времени.

Рассмотрим четверной момент $\langle\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\rangle$, где $\xi_1=\xi_{\alpha1}(t_1)$, $\xi_2=\xi_{\alpha2}(t_2)$ и т. д. Мы проведем здесь усреднение в два этапа. Сначала мы возьмем среднее $\langle\ldots\rangle_\lambda$, то есть среднее относительно ξ_j при фиксированном $\hat\lambda$. Затем найдем среднее относительно λ. Полное среднее можно записать в виде

$$\langle\langle\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\rangle_\lambda\rangle=\langle\langle\xi_1\xi_2\rangle_\lambda\langle\xi_3\xi_4\rangle_\lambda+\langle\xi_1\xi_3\rangle_\lambda\langle\xi_2\xi_4\rangle_\lambda+\langle\xi_1\xi_4\rangle_\lambda\langle\xi_2\xi_3\rangle_\lambda\rangle,$$

если предположить, что ξ_j являются гауссовыми при фиксированных $\lambda_{\alpha\beta}$. Подставляя (П3.1) в правую часть этого равенства, получим

$$\langle \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\rangle = -\hbar^2[(\Gamma_1{}^+\Gamma_3{}^+ + \Gamma_2{}^-\Gamma_4{}^- - \Gamma_1{}^+\Gamma_4{}^- - \Gamma_2{}^-\Gamma_3{}^-)\delta'_{12}\delta'_{34}\langle\lambda_{\alpha1\alpha2}\lambda_{\alpha3\alpha4}\rangle +$$
$$+ (\Gamma_1{}^+\Gamma_2{}^+ + \Gamma_3{}^-\Gamma_4{}^- - \Gamma_1{}^+\Gamma_4{}^- - \Gamma_2{}^+\Gamma_3{}^-)\delta'_{13}\delta'_{24}\langle\lambda_{\alpha1\alpha3}\lambda_{\alpha2\alpha4}\rangle +$$
$$+ (\Gamma_1{}^+\Gamma_2{}^+ + \Gamma_3{}^-\Gamma_4{}^- - \Gamma_1{}^+\Gamma_3{}^- - \Gamma_2{}^+\Gamma_4{}^-)\delta'_{14}\delta'_{23}\langle\lambda_{\alpha1\alpha4}\lambda_{\alpha2\alpha3}\rangle]. \qquad (\text{П}3.2)$$

Теперь мы учтем, что $\delta\lambda_{\alpha\beta}$ не постоянны, и довольно медленно меняются во времени. Затем мы можем просто заменить $\langle\lambda_{\alpha\beta}\lambda_{\gamma\delta}\rangle$ на $\lambda_{\alpha\beta}{}^0\lambda_{\gamma\delta}{}^0+R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t-t')$, где $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}(t-t')=\langle\delta\lambda_{\alpha\beta}(t)\delta\lambda_{\gamma\delta}(t')\rangle$. Таким образом, получим

$$\langle\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4\rangle = -\hbar^2[(\Gamma_1{}^+\Gamma_3{}^+ + \Gamma_2{}^-\Gamma_4{}^- - \Gamma_1{}^+\Gamma_4{}^- - \Gamma_2{}^-\Gamma_3{}^+)\delta'_{12}\delta'_{34}R_{\alpha1\alpha2,\alpha3\alpha4}({}^1\!/_2(t_1+t_2-t_3-t_4)) +$$
$$+ (\Gamma_1{}^+\Gamma_2{}^+ + \Gamma_3{}^-\Gamma_4{}^- - \Gamma_1{}^+\Gamma_4{}^- - \Gamma_2{}^+\Gamma_3{}^-)\delta'_{13}\delta'_{24}R_{\alpha1\alpha3,\alpha2\alpha4}({}^1\!/_2(t_1+t_3-t_2-t_4)) +$$
$$+ (\Gamma_1{}^+\Gamma_2{}^+ + \Gamma_3{}^-\Gamma_4{}^- - \Gamma_1{}^+\Gamma_3{}^- - \Gamma_2{}^+\Gamma_4{}^-)\delta'_{14}\delta'_{23}R_{\alpha1\alpha4,\alpha2\alpha3}({}^1\!/_2(t_1+t_4-t_2-t_3))]. \qquad (\text{П}3.3)$$

Сравнивая эту формулу с [6, ф. (5.7.51)], где $Q_{12,34}{}^{(2)}=Q_{12,34}{}^{-(2)}+Q_{21,34}{}^{+(2)}$, $Q_{12,34}{}^{-(2)}= = J^-{}_{1234}+K_{1234}$, $Q_{21,34}{}^{+(2)}= J^+{}_{2134}+K_{1243}$, нетрудно получить

$$J^\pm{}_{1234}=0, \qquad (\text{П}3.4)$$

$$K_{1234} = \delta'_{13}\delta'_{24}\, R_{\alpha1\alpha3,\alpha2\alpha4}({}^1\!/_2(t_1+t_3-t_2-t_4)). \qquad (\text{П}3.5)$$

В спектральном виде этот результат дается формулой (7.6).

Библиографический список

1. *Kossakowski A.* // Rep. Math. Phys. 1972. Vol. 3. P. 247.
2. *Lindblad G.* // Commun. Math. Phis. 1976. Vol. 48. P. 119.
3. *Gardiner C.W.* Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences. Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo, 1994. P.P. 404, 405.
4. *Hudson R.L., Parthasarathy K.R.* // Math. Phys. 1984. Vol.93. P. 301.
5. *Callen H.B., Welton T.A.* // Phys. Rev. 1951. Vol.83. P. 34.
6. *Stratonovich R.L.* Nonlinear Nonequilibrium thermodynamics I. Springer–Verlag, Berlin – Heidelberg – New York – Tokyo, 1992.
7. *Стратонович Р.Л., Чичигина О.А.* // ЖЭТФ. 1994. Т.105, вып.1. С. 106.

Перевод с английского В.Стратонович

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 4.07.97

NON–MARKOV THEORY OF QUANTUM FLUCTUATIONS IN THE NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS WITH LINEAR FRICTION

Rouslan L. Stratonovich

Properties of the operator Langevin forces in systems with linear friction are found with the help of fluctuation–dissipation theorems. The special attention is paid to greater singularity of these forces than in the quantum Markov theory. To avoid infinities, dynamic equations are represented in the integral form. Integral stochastic processes $\sigma_\kappa(t)$ with finite mean square related to the Langevin forces are introduced and applied.

Such non–Gaussian characteristics as threefold and fourfold many–time cumulants are considered in the non–linear case and in the case of fluctuating friction coefficients.