Изв.вузов «ПНД», т.5, № 4 УДК 53:372.8; 537.86

# НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ, КАТАСТРОФЫ, БИФУРКАЦИИ, ХАОС
## Учебные программы

*А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов*

Представлены учебные программы по курсам «Нелинейные колебания», «Катастрофы и бифуркации», «Динамический хаос». Учебные программы взаимосвязаны друг с другом, образуя единый комплекс, нацеленный на раннее формирование нелинейного мышления.

## Введение

Современное естествознание пронизано идеями нелинейности. Такие ключевые слова как «колебания», «катастрофы», «бифуркации», «аттракторы», «хаос» обнаруживаются в работах по математике, физике, химии, биологии. Для современного исследователя эти обобщающие понятия стали элементами *фундаментальных* представлений о природе. К сожалению, схемы образования более консервативны, нежели живая наука. Поэтому современные концепции обычно проникают лишь на вершину «пирамиды» образовательной системы. Например, на физическом факультете Саратовского госуниверситета лекции по нелинейной теории колебаний читаются студентам четвертого курса. В этом случае трудно говорить о раннем воспитании фундаментального «нелинейного» мышления. Опыт преподавания в Колледже прикладных наук Саратовского госуниверситета свидетельствует о том, что серьезное знакомство с нелинейными колебаниями можно начать уже на втором курсе.

В этой статье мы предлагаем программу комплекса из трех учебных курсов: «Нелинейные колебания», «Катастрофы и бифуркации», «Динамический хаос». Данному циклу должен предшествовать курс «Линейные колебания», в рамках которого вводятся понятия динамической системы, фазового пространства, дается классификация особых точек на фазовой плоскости и т.д.

Курс «Нелинейные колебания» (4–ый семестр) знакомит с основными ключевыми понятиями нелинейной динамики, в основном на эвристическом уровне. Последовательность рассмотрения диктуется внутренней логикой предмета и не всегда отражает историческую последовательность формирования рассматриваемых идей и представлений.

Серьезное внимание уделено теории катастроф (5–ый семестр), которая приобретает статус одного из краеугольных камней всей формируемой картины. Материал теории катастроф, представляющей собой далеко идущее обобщение исследования функций на экстремум, с одной стороны, хорошо усваивается студентами, а с другой – позволяет ввести такие важные понятия как типичность, коразмерность, универсальность и тем самым перекинуть «мостик» к более сложным вопросам теории бифуркаций и динамического хаоса.

Третьей, завершающей компонентой комплекса служит курс введения в теорию динамического хаоса (6–ой или 7–ой семестр). Поскольку эта область знания находится в состоянии бурного развития, отбор материала ориентирован на то, чтобы ознакомить аудиторию с уже установившимися идеями и представлениями и вывести на уровень, достаточный для самостоятельной работы с литературой по данному предмету.

Для адекватной организации учебного процесса по нелинейным колебаниям, катастрофам и бифуркациям необходимы семинарские занятия, а по курсу «Динамический хаос» желателен компьютерный практикум. Семинары не только дают навыки решения задач, но и, в конечном итоге, делают возможным усвоение предлагаемых программ (см. статью А.П. Кузнецова в настоящем выпуске). В качестве литературы можно рекомендовать монографии и учебники [1–17].

Конечно, раннее знакомство со многими тонкими вопросами нелинейной динамики в полном объеме не всегда оказывается возможным, хотя бы из–за отсутствия необходимого числа часов в учебном плане. Поэтому некоторые существенные вопросы опущены (например, взаимодействие нелинейных колебаний, нелинейная параметрическая неустойчивость и т. д.). Соответствующие пробелы можно восполнить в более поздних спецкурсах, используя сформированные основы нелинейного мышления. Желательно иметь и основательный математический курс теории бифуркаций, который дополнил бы предлагаемое введение, носящее скорее физический характер.

Авторы выражают глубокую благодарность член–корреспонденту РАН, профессору Д.И. Трубецкову за возможность реализации учебных курсов в Колледже прикладных наук и профессору В.С. Анищенко за возможность предварительного прочтения некоторых аналогичных курсов на кафедре радиофизики Саратовского госуниверситета.

## 1. Нелинейные колебания

***Нелинейность.*** Колебания малой и большой амплитуды, линейные и нелинейные. Нелинейность как естественное свойство физических систем. Нелинейность математического маятника. Нелинейность при упругих деформациях, нелинейность пружин. Нелинейная емкость, нелинейная индуктивность и их характеристики. Нелинейные колебательные системы. Нелинейный маятник. Различные варианты колебательного контура (с нелинейной емкостью, нелинейной индуктивностью, нелинейным сопротивлением).

***Нелинейность на микроскопическом уровне.*** Нелинейные среды. Ферромагнетик как пример нелинейной среды. Оптические нелинейные среды.

***Слабая и сильная нелинейность.*** Слабая нелинейность как малое возмущение линейной системы. Типы нелинейных характеристик (квадратичная, кубичная). Сильная нелинейность. Физические примеры систем со слабой и с сильной нелинейностью.

***Особенности спектров нелинейных систем.*** Преобразование гармонических сигналов нелинейным элементом со степенной характеристикой. Гармоники и комбинационные частоты. Физические примеры нелинейного преобразования спектра: нелинейность уха, генерация второй гармоники в оптике и др.

***Мультистабильность и гистерезис.*** Объяснение мультистабильности с помощью модели «шарик в потенциальной яме». Примеры систем, демонстрирующих мультистабильность (маятник из железа, колеблющийся вблизи магнита, туннельный диод в схеме с регулируемыми ЭДС и резистором, резонатор

Фабри – Перо с нелинейной средой). Гистерезис и его объяснение с помощью модели «шарик в потенциальной яме». Понятие о катастрофах и бифуркациях.

***Нелинейные динамические системы.*** Представление уравнений нелинейных колебательных систем в «стандартной» форме теории динамических систем (№ дифференциальных уравнений первого порядка). Геометрическая интерпретация нелинейной динамики в фазовом пространстве. Диссипативные и консервативные системы – классификация, основанная на свойствах эволюции облака изображающих точек в фазовом пространстве. Как определить, является ли данная система консервативной или диссипативной? Критерий, основанный на вычислении дивергенции векторного поля и примеры его использования.

***Консервативные нелинейные системы и их фазовые портреты.*** Примеры консервативных систем второго порядка, описываемых уравнением $\ddot{x}+f(x)=0$. Потенциальная функция и интеграл энергии. Стратегия построения и исследования фазового портрета нелинейной системы: график потенциальной энергии и его связь с элементами фазового портрета, особые точки и области линейных движений в фазовом пространстве, сепаратрисы, типичные траектории в фазовом пространстве.

***Диссипативные нелинейные системы и их фазовые портреты.*** Введение диссипации. Системы второго порядка, описываемые уравнением $\ddot{x}+\alpha\dot{x}+f(x)=0$. Энергия системы как функция Ляпунова, ее эволюция во времени и использование для обоснования устойчивости состояний равновесия. Понятие аттрактора. Бассейны притяжения аттракторов. Модификация сепаратрис при введении диссипации. Роль сепаратрис в диссипативной системе как границ раздела бассейнов притяжения.

***Уравнение математического маятника (осциллятор с нелинейностью синуса).*** Математический маятник, контакт Джозефсона, аналогия Кирхгофа (задача об изгибе упругого стержня). Потенциальная функция и фазовый портрет. Определение периода колебаний математического маятника через эллиптический интеграл. Зависимость периода колебаний от амплитуды. Решение уравнения математического маятника, отвечающее движению по сепаратрисе. Исследование закона движения вблизи сепаратрисы. Оценка периода колебаний для движения вблизи сепаратрисы. Спектр колебаний при движении вблизи сепаратрисы: случаи ротационных и колебательных движений.

***Консервативный осциллятор с кубической нелинейностью.*** Осциллятор с кубической нелинейностью как универсальная модель теории колебаний. Физические примеры. Потенциальная функция и фазовый портрет. Асимптотические методы в случае колебаний с умеренными амплитудами. Неизохронность и ангармоничность колебаний осциллятора с кубической нелинейностью: вычисление поправки к частоте и амплитуды третьей гармоники. Сравнение приближенного и точного решений.

***Консервативный осциллятор с квадратичной нелинейностью.*** Осциллятор с квадратичной нелинейностью как универсальная модель теории колебаний. Физические примеры. Потенциальная функция и фазовый портрет. Возникновение нулевой и второй гармоник в спектре. Неизохронность во втором порядке теории возмущений.

***Метод медленно меняющихся амплитуд.*** Применение метода медленно меняющихся амплитуд на примере диссипативного осциллятора с кубической нелинейностью. Определение комплексной амплитуды, процедура усреднения, переход к укороченным уравнениям и их решение. Условия применимости метода медленно меняющихся амлитуд.

***Быстрые и медленные движения.*** Исследование динамики осциллятора с кубической нелинейностью и с нелинейностью синуса в случае сильной диссипации под действием начального импульсного толчка. Сведение к уравнению с малым параметром перед высшей производной и парадокс недостаточного количества начальных условий, возникающий при пренебрежении этим членом. Более аккуратный анализ: фаза быстрого и медленного движений, оценка их характерной длительности. Уравнения для описания быстрого и медленного движений и их решение. Сшивание решений, отвечающих быстрой и медленной стадиям. Быстрые и медленные движения на фазовой плоскости. Общие замечания об уравнениях с малым параметром перед высшей производной.

***Автоколебания.*** Примеры автоколебательных систем различной физической природы. Основные черты автоколебательных явлений. Предельный цикл как образ автоколебаний в фазовом пространстве. Предельные циклы как аттракторы диссипативных систем.

***Уравнения Ван–дер–Поля и Релея.*** Радиотехнический генератор и его описание с помощью уравнения Ван–дер–Поля. Механическая система с нелинейной зависимостью силы трения от скорости и ее описание с помощью уравнения Релея. Связь уравнений Релея и Ван–дер–Поля. Результаты численного решения уравнения Ван–дер–Поля: зависимости динамической переменной от времени и фазовые портреты. Затухающие, квазигармонические и релаксационные колебания.

***Квазигармонические колебания и бифуркация Хопфа.*** Исследование квазигармонических автоколебаний в уравнении Ван–дер–Поля. Анализ методом энергетического баланса. Анализ методом медленно меняющихся амплитуд. Укороченное уравнение Ван–дер–Поля и его решение. Бифуркация Хопфа в уравнении Ван–дер–Поля и ее описание с помощью укороченного уравнения. Универсальная зависимость амплитуды автоколебаний от управляющего параметра при малой надкритичности (закон квадратного корня).

***Релаксационные автоколебания.*** Сведение уравнения Релея при больших значениях параметра к дифференциальному уравнению с малым параметром перед старшей производной. Выделение быстрых и медленных движений. Представление релаксационных колебаний, описываемых уравнением Релея, на фазовой плоскости.

***Автоколебания с жестким возбуждением.*** Построение модельного уравнения, описывающего автогенератор с жестким возбуждением. Анализ этой системы методом энергетического баланса. Решение модельного уравнения методом медленно меняющихся амплитуд. Фазовый портрет и его эволюция при изменении параметров. Бифуркации в системе.

***Метод сечений Пуанкаре.*** Идея метода сечений Пуанкаре. Нахождение точечного отображения численными методами и с помощью метода медленно меняющихся амплитуд на примере уравнения Ван–дер–Поля и автогенератора с жестким возбуждением. Простейшие свойства одномерных отображений: неподвижные точки и их устойчивость. Диаграммы Ламерея.

***Нелинейный резонанс.*** Вынужденные колебания нелинейного осциллятора как пример динамической системы с трехмерным фазовым пространством. Фазовое пространство на цилиндре. Нелинейный осциллятор под периодическим внешним воздействием и его исследование методом медленно меняющихся амплитуд. Бистабильность и гистерезис при нелинейном резонансе. Точка сборки и линия складки на плоскости амплитуда – частота воздействия. Нелинейный резонанс на гармониках и субгармониках. Возможность сложных колебательных режимов – хаоса.

***Синхронизация.*** Периодическое внешнее воздействие на автоколебательную систему. Понятие синхронизации. Нечестные часовщики и Гюйгенс. Осциллятор Ван–дер–Поля под периодическим внешним воздействием. Режимы захвата и биений. Языки синхронизации (языки Арнольда) и их расположение на карте динамических режимов. Задача о синхронизации автогенератора периодическими импульсами и отображение окружности. Карта динамических режимов отображения окружности.

## 2. Катастрофы и бифуркации

***Аппроксимации в математике и физике и стратегия конструирования многопараметрических моделей.*** Идея аппроксимации в математике и физике. Ряд Тейлора и его использование для конструирования многопараметрических моделей. Полнота и универсальность моделей, получаемых при помощи тейлоровских аппроксимаций.

***Типичность по Пуанкаре и связанные с ней понятия.*** Интуитивное представление о типичности. Случаи общего положения и вырожденые случаи. Метод «малых шевелений» параметров. Классификация вырожденных ситуаций по коразмерности. Примеры ситуаций различной коразмерности. Стратегия Пуанкаре исследования динамических систем по возрастающей коразмерности. Понятие грубых (структурно устойчивых) систем.

***Катастрофы и бифуркации.*** Примеры систем с катастрофами: материальная точка в одномерном и двумерном потенциальном поле, нагруженная балка, остойчивость судов и др. Машина Зимана и качалки. Связь и отличия теории катастроф и теории бифуркаций.

***Критические точки функций одной переменной.*** Критические точки и их роль при исследовании катастроф и бифуркаций. Некоторые простейшие критические точки функций одной переменной. Исследовательская схема теории катастроф (выявление существенных параметров, роль замен переменных, классификация критических точек по коразмерности) на примере анализа простейших полиномов. Понятие конечной определенности функций.

***Критические точки функций двух переменных.*** Графическое представление функций двух переменных с помощью линий уровня. Примеры: горизонтали и карты, эквипотенциали, фазовые портреты. Критические точки функций двух переменных. Матрица Гессе и примеры ее использования для различения вырожденных критических точек. Квадратичные формы и их классификация. Кубики и их классификация. Возможна ли классификация квартик? Типичные критические точки на картах. Случай $n$–переменных и определение морсовской критической точки (морсовского седла).

***Математические основы теории катастроф.*** Лемма Морса. Лемма расщепления. Классификационная теорема Тома. Ростки и возмущения. Полнота и универсальность моделей теории катастроф.

***Катастрофа складки.*** Схема исследования катастроф на примере складки (многообразие катастрофы, бифуркационное множество, трансформации потенциальной функции). Примеры систем, демонстрирующих катастрофу складки.

***Катастрофа сборки.*** Исследование катастрофы сборки. Двойственные сборки. Примеры катастрофы сборки: критическая точка газа Ван–дер–Ваальса, туннельный диод в схеме с регулирумыми сопротивлением и ЭДС. Другие примеры катастрофы сборки. Катастрофа сборки и теория гладких отображений Уитни.

***Катастрофа «ласточкин хвост».*** Исследование катастрофы ласточкин хвост. Пример колебательной системы, демонстрирующей катастрофу ласточкин хвост.

***Каспоидные катастрофы в двумерных системах.*** Катастрофа складки в двумерной системе на примере задачи о «выкатывании» шарика из лунки. Эволюция потенциального рельефа, линий уровня и сепаратрис при катастрофе складки в двумерной системе. Физически различимые типы катастроф сборки в двумерных системах, примеры. Эволюция линий уровня и сепаратрис при катастрофе сборки. Поиск каспоидных катастроф в двумерных системах и особенности их приведения к канонической форме (возможность катастрофы сборки в случае кубического потенциала).

***Нелокальное бифуркационное множество.*** Трансформации потенциального рельефа и линий уровня в двумерных системах при простейшей нелокальной бифуркации коразмерности один. Почему нелокальные бифуркации не относятся к катастрофам? Понятие нелокального бифуркационного множества. Пример системы, характеризующейся нелокальным бифуркационным множеством.

***Омбилические катастрофы.*** Катастрофа «пирамида» (эллиптическая омбилика) и ее анализ. Нелокальное бифуркационное множество катастрофы пирамида. Пример колебательной системы, демонстрирующей катастрофу пирамида. Катастрофа «кошелек» (гиперболическая омбилика) и ее исследование.

***Физические приложения теории катастроф. Задача о выпучивании упругого стержня.*** Как описать задачу о выпучивании стержня с помощью конечномерной потенциальной функции? (Метод Релея – Ритца). Вырожденная катастрофа сборки в задаче о выпучивании стержня. Степенные законы изменения параметров в окрестности точки катастрофы. Влияние асимметрии. Бифуркационные диаграммы в случаях симметричного и несимметричного выпучивания. Выпучивание стержня в многомодовом приближении.

***Фазовые переходы и катастрофы.*** Теория Ландау фазовых переходов второго рода: термодинамический потенциал и параметр порядка, разложение термодинамического потенциала в ряд по параметру порядка. Вырожденная катастрофа сборки и фазовые переходы второго рода. Законы изменения термодинамических функций в окрестности точки катастрофы. Фазовые переходы во внешнем поле и полная катастрофа сборки. Сведения о более сложных вариантах зависимости термодинамического потенциала от параметра порядка.

***Каустики и особенности волновых фронтов.*** Понятие каустики. Каустики и точки сборки. Примеры каустик и сборок в оптике (опыты с чашкой кофе, прохождение лазерного луча через неоднородную каплю, сферическая аберрация, радуга и др.) Гигантские океанские волны и их каустики и сборки. Возникновение особенностей при распространении волновых фронтов. Какие «катастрофы» наиболее опасны? Понятие о современной теории катастроф. Работы Арнольда.

***Смягчение мод и уравнение продемпфированного осциллятора.*** Поведение частоты в зависимости от параметров системы. Феномен смягчения моды. Увеличение характерных масштабов времени при приближении к точке бифуркации (катастрофы). Уравнение продемпфированного осциллятора. Понятие об универсальности моделей теории бифуркаций.

***Бифуркации в одномерных системах.*** Простейшие бифуркации положений равновесия коразмерности один, два и три. Бифуркация седло–узел. Транскритическая бифуркация, ее связь с бифуркацией седло–узел. Бифуркация типа вилки. Снятие вырождения для бифуркации типа вилки.

***Системы с двумерным фазовым пространством и их простейшие бифуркации.*** Примеры зависящих от параметров динамических систем с двумерным фазовым пространством (модель хищник–жертва, брюсселятор и др.). В каком случае динамические системы приводятся к градиентным системам? Расширение классификации положений равновесия и бифуркаций по сравнению с градиентными системами. Бифуркация Хопфа. Обобщенное укороченное уравнение для бифуркации Хопфа, общеколебательное значение бифуркации Хопфа. Бифуркация рождения цикла из сгущения фазовых траекторий.

***Системы с трехмерным фазовым пространством и их простейшие бифуркации.*** Система Лоренца. Вывод системы Лоренца для задачи о термоконвекции в кольце. Система Лоренца и динамика лазера. Система Реслера. Бифуркация рождения тора, бифуркация удвоения периода и касательная бифуркация. Вид сечений Пуанкаре в случае этих типов бифуркаций. Исследование бифуркаций циклов с помощью метода сечений Пуанкаре. Примеры аналитического построения отображений Пуанкаре для неавтономных систем в случае импульсного воздействия. Понятие о численном построении отображений Пуанкаре.

***Бифуркации и катастрофы одномерных дискретных отображений.*** Универсальные модели одномерных отображений. Неподвижные точки и циклы дискретных отображений и их исследование на устойчивость с помощью мультипликаторов. Бифуркации коразмерности один: касательная бифуркация, бифуркация удвоения периода, жесткий переход через мультипликатор –1. Производная Шварца. Бифуркации коразмерности два: точки сборки, «флип-бифуркации» коразмерности два. Карты динамических режимов дискретных отображений.

***Бифуркации двумерных отображений.*** Матрица монодромии. Мультипликаторы двумерных отображений. Области устойчивости двумерного отображения. Устойчивое и неустойчивое многообразие. Касательная бифуркация и бифуркация удвоения периода для двумерных отображений. Бифуркации коразмерности два. Бифуркации циклов. Удвоения периода в двумерных отображениях. Карты динамических режимов.

***Универсальность моделей теории бифуркаций.*** Возможность редукции к системам меньшей размерности. Нормальные формы Пуанкаре. Теорема о центральном многообразиии. «Мир» бифуркаций. Понятие о нелокальных бифуркациях. Понятие о современной математической теории бифуркаций.

## 3. Динамический хаос

***Хаос на эвристистическом уровне.*** Открытие хаоса как режима динамики в нелинейных системах с размерностью фазового пространства три и выше. Признаки хаоса в эксперименте и при компьютерном моделировании. Реализации хаотических сигналов. Возвраты Пуанкаре и их нерегулярность. Спектры хаотических сигналов. Корреляционная функция и ее особенности в хаотическом режиме. Странные аттракторы диссипативных динамических систем. Примеры компьютерных портретов странных аттракторов: система Лоренца, система Реслера, нелинейный осциллятор под гармоническим воздействием.

***Хаос в системах с дискретным временем – отображениях.*** Сечение Пуанкаре и хаотические аттракторы систем с непрерывным временем. Хаотические аттракторы отображений (примеры: отображение Хенона, система Икеды и др.). Когда возможна редукция описания динамики к одномерному отображению? О возможности хаоса в одномерных необратимых отображениях. Логистическое отображение как простейшая модельная система, демонстрирующая хаос. Природа хаоса в логистическом отображении по Уламу – фон–Нейману: представление динамики в терминах бинарных символических последовательностей и сдвига Бернулли.

***Неустойчивость и хаос.*** Чувствительная зависимость от начальных условий как атрибут хаоса. Как можно наблюдать чувствительную зависимость от начальных условий в эксперименте? Ляпуновские характеристические показатели. Спектр ляпуновских показателей и его сигнатура. Классификация аттракторов по сигнатуре спектра ляпуновских показателей для автономных систем с непрерывным временем и для отображений.

***Возвращаемость.*** Возвращаемость фазовых тракторий как второе существенное условие динамического хаоса. Возвращаемость в логистическом отображении. Подкова Смейла. Возвращаемость в аттракторе Пиковского – Рабиновича.

***Критерии возникновения хаоса.*** Теорема Шильникова. Критерий Мельникова.

***Геометрия странных аттракторов.*** Возникновение сложных структур при складывании. Понятие о фракталах. Примеры фракталов: канторово множество, снежинка Коха. Компьютерные иллюстрации фрактальной структуры странных аттракторов систем с непрерывным временем и двумерных отображений. «Потеря» поперечной фрактальной структуры аттрактора при описании в терминах одномерных отображений. Хаусдорфова размерность фракталов. Размерность странных аттракторов.

***Сценарии перехода к хаосу.*** Постановка задачи о переходе от регулярного поведения к хаотической динамике. Сценарий возникновения турбулентности по Ландау и по Рюэлю – Такенсу. Три варианта потери устойчивости цикла и три сценария перехода к хаосу.

***Удвоения периода в логистическом отображении.*** Каскад бифуркаций удвоения периода в логистическом отображении. Бифуркационное дерево. Критическая точка. Фрактальная структура аттрактора в критической точке. График ляпуновского показателя. Хаотические режимы логистического отображения. Понятие о сложной структуре закритической области. Порядок Шарковского. Тонкое устройство окон периодичности – возможности каскадов удвоения на базе различных циклов. Бифуркации слияния полос.

***Теория Фейгенбаума.*** Закон сходимости бифуркаций удвоения периода и константа Фейгенбаума $\delta$. Универсальность Фейгенбаума для отображений с квадратичным экстремумом. Приближенный ренормгрупповой анализ удвоений периода и объяснение универсальности. Уравнение Фейгенбаума – Цвитановича и его решение. Вторая константа Фейгенбаума $\alpha$. Понятие о скейлинге. Иллюстрации скейлинга на бифуркационных деревьях и графиках ляпуновских показателей.

***Нефейгенбаумовские каскады удвоений.*** Сценарий Фейгенбаума как случай «общего положения». Возможность нефейгенбаумовских каскадов удвоения периода и их классификация по коразмерности. Множество решений уравнения Фейгенбаума – Цвитановича и его связь с нефейгенбаумовскими каскадами удвоения периода. Карты динамических режимов одномерных отображений. Фейгенбаумовские и нефейгенбаумовские каскады, критические линии и точки на картах.

***Трансформации торов.*** Проблема бифуркаций торов. От динамики на торе к отображению кольца и отображению окружности. Число вращения и классификация динамических режимов на его основе. Переход от квазипериодического режима к хаосу для числа вращения, задаваемого золотым сечением. Устройство языка синхронизации отображения окружности (удвоения периода, критические точки коразмерности два, хаос. Логистическое отображение под квазипериодическим воздействием. Бифуркации удвоения торов, потеря гладкости тора, странный нехаотический аттрактор.

***Перемежаемость.*** Эвристическое описание перемежаемости. Ламинарная и хаотические фазы. Перемежаемость вблизи точки касательной бифуркации отображения. Статистика ламинарных периодов. Перемежаемость в модели Лоренца. Три типа перемежаемости по Помо – Маневиллю.

***Хаос в гамильтоновой динамике.*** Проблема Ферми – Паста – Улама. Стохастическое ускорение Ферми. Нелинейный резонанс и стандартное отображение. Общее представление о структуре фазового пространства, теория Колмогорова – Арнольда – Мозера, эргодический слой, диффузия Арнольда. Критерий Чирикова.

***Квантовый хаос.*** Описание динамики в квантовой и классической механике. Принцип соответствия. Функция Вигнера и функция распределения. Проблема квантового хаоса. Простейшие модели: бильярды, отображения пекаря и кота Арнольда, ротатор. Характерные времена квантовой динамики. Ротатор: феномен локализации. Структура собственных функций. «Шрамы». Как проявляется хаос в структуре энергетических уровней?

*При разработке курсов «Нелинейные колебания», «Катастрофы и бифуркации», «Динамический хаос» использовались результаты научных исследований, поддержанных грантами РФФИ № 97–02–16414 и № 96–15–96921.*

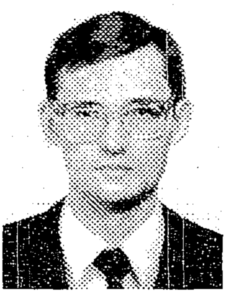
**Литература**

1. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
4. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
5. *Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
6. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
7. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.
8. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.
9. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
10. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн–Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982. 304 с.
11. *Томпсон Дж. М.Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
12. *Crawford J.D.* Intoduction to bifurcation theory // Rev. Mod. Phys. 1991. Vol. 63, № 4. P.991.
13. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
14. *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания, М.: Наука, 1987. 424 с.
15. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
16. *Ott E.* Chaos in dynamical systems. Cambridge: University press, 1993. 385 p.

17. *Thompson J.M.T., Stewart H.B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. John Wiley and Sons, 1986. 376 p.

*Саратовский государственный университет, СФ ИРЭ РАН*

*Поступила в редакцию 13.05.97*



*Кузнецов Александр Петрович* родился в 1957 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается использованием идей теории катастроф и теории бифуркаций, а также развитием концепции сценариев перехода к хаосу во многопараметрических модельных и физических нелинейных системах. Опубликовал более 50 научных работ в отечественных и зарубежных журналах. Диапазон педагогических интересов – от школьных задач до современных проблем нелинейной динамики. Один из инициаторов создания нового уникального курса физики для I ступени Колледжа прикладных наук СГУ. Разработал и прочитал несколько оригинальных учебных курсов для Колледжа. Автор нескольких сотен задач и двух популярных книг.

*Кузнецов Сергей Петрович* родился в 1951 году. Доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН, профессор Саратовского госуниверситета. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Занимается также исследованиями в области квантового хаоса. Опубликовал свыше 100 работ в отечественной и зарубежной научной печати. Соавтор двух монографий и одной популярной книги. Автор нескольких оригинальных учебных курсов, прочитанных им в разные годы на кафедрах электроники и радиофизики СГУ и в Колледже прикладных наук СГУ. В 1995 году читал лекции по нелинейной теории колебаний в Датском техническом университете.