



НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ, КАТАСТРОФЫ И БИФУРКАЦИИ Задачи

А.П. Кузнецов

Представлены примеры задач по курсам «Нелинейные колебания», «Катастрофы и бифуркации». Обсуждается необходимость семинарских занятий. Демонстрируются связи с курсом общей физики.

Перед тем как решить крупную научную проблему, ученому нужно уметь решать ее в малых формах. Одно из эффективных средств воспитания этих качеств ... – это задачи.

П.Л. Капица

Введение

Опыт убеждает, что настоящее понимание любой точной науки достигается после решения достаточного большого числа задач. В высших учебных заведениях, в отличие от средней школы, решение задач и изложение теоретического материала происходит раздельно, соответственно, на семинарах и лекциях. Семинарские занятия – интересная, увлекательная, но и достаточно сложная форма учебного процесса. При серьезном отношении к семинарам их подготовка и проведение отнимает не меньше времени и сил, чем лекции. В высших учебных заведениях России создана и действует эффективная система семинарских занятий по общей физике, теоретической физике, математическим дисциплинам, так что накопленный в этом направлении опыт обеспечивает одно из приоритетных мест России в системе мирового образования.

Однако, если Вы захотите у себя в вузе организовать семинарские занятия по теории колебаний, теории катастроф, теории бифуркаций, динамическому хаосу и т.д., т.е. по дисциплинам, которые можно объединить совокупным названием нелинейная динамика или синергетика, то обнаружите, что существуют сотни задачиков по общей и теоретической физике и единицы по перечисленным дисциплинам. Конечно, для новой отрасли науки некоторое «методическое отставание» естественно, однако, новизна нелинейной динамики не единственная причина существующего положения.

Структура учебного процесса в наших университетах такова, что студенты–физики прежде всего получают *общее* образование на кафедрах общей физики или

аналогичных им. И лишь затем, на старших курсах, им дают *специальное* образование на соответствующих кафедрах. «Специальные» кафедры в качестве основной формы учебного процесса используют, как правило, лекции и очень редко – семинары по решению задач. Это традиция, к тому же закреплённая в структуре учебного плана. В результате такого положения и появляются очень хорошие учебники, которые обычно пишутся на базе курсов лекций, но отсутствуют задачки по нелинейной динамике.

Может показаться, что новые современные дисциплины и следует давать лишь в лекционной форме, поскольку к третьему – четвертому курсу студенты получают фундаментальное физико–математическое образование и все необходимые навыки работы. К сожалению, это справедливо лишь в идеале, а реальные студенты надо ещё учить и учить. Но есть и более существенные мотивы необходимости семинаров. Методические «сценарии» общих курсов уже вполне сформировались и общеизвестны. Для современных дисциплин учебный опыт существенно беднее. Восполнить существующие методические пробелы позволяют семинарские занятия, поскольку у преподавателя благодаря семинарам *возникает обратная связь со студентами*, и он может оперативно отреагировать на те или иные проблемы усвоения материала. Но ещё важнее то, *что «непонимание» студентов представляет ценный материал для размышлений*. Здесь уместно сослаться на авторитетное мнение П.Л.Капицы, который считал, что образование имеет две основные цели: обучение студентов и обучение преподавателей [1].

Специальные кафедры имеют обычно «радиофизическую», «электронную», «механическую» предысторию, что оказывает влияние на стиль изложения, выбор примеров и характер учебного материала. Вследствие этого рвется связь с тем багажом, который студент получил на младших курсах, исчезают (или сужаются) связи с общей физикой. В результате студенты старших курсов, в какой–то мере, учатся «заново». А отсутствие повторения в учебном процессе с абсолютной неизбежностью приводит к реализации закона обучения, аналогичного второму началу термодинамики, – студенты «забывают все, что знали раньше».

В Колледже прикладных наук Саратовского государственного университета цикл курсов по колебаниям, катастрофам и бифуркациям сопровождается семинарскими занятиями. С помощью семинаров решаются многочисленные проблемы учебного процесса:

- развивается математическая техника;
- совершенствуются навыки устного рассказа;
- демонстрируются возможности компьютерных методов решения задач;
- достигается интенсивная работа студента в течение всего семестра;
- обеспечивается регулярное обращение студента к лекциям;
- студент все время находится под контролем преподавателя; и т.д. и т.п.

Семинарские занятия по каждому курсу построены в виде полутора десятков «блоков» задач, соответствующих структуре учебной программы (см. статью в настоящем выпуске.) К сожалению, в журнальном сообщении невозможно привести полноценную подборку задач с необходимым разбиением «по блокам», а тем более дать решения. Надеемся, однако, что предлагаемые задачи будут все же полезны. Особое внимание уделено взаимосвязям с курсом общей физики. Используемая литература представлена в ссылках [2–15]. Это, в основном, учебники и монографии (за исключением задачника [2]). Однако, некоторые вопросы, излагаемые в них, могут быть переформулированы в виде задач.

Автор выражает благодарность член–корреспонденту РАН, профессору Д.И. Трубецкову за возможность реализации системы семинарских занятий в Колледже прикладных наук Саратовского госуниверситета и профессору Колледжа С.П. Кузнецову за полезное обсуждение.

1. Задачи по нелинейным колебаниям

1. Считая, что в перечисленных ниже системах нелинейность является слабой, представьте соответствующие уравнения движения в форме $\ddot{x} + \omega_0^2(x + \mu x^n) = 0$ и определите в каждом случае константы μ и n .

а) Массивное колесо с моментом инерции I может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр колеса. На ободе колеса укреплен груз массы m на расстоянии R от оси.

б) Сосуд объемом $2V_0$ разделен подвижным поршнем площади S на две равные части. Начальное давление газа p_0 . При колебаниях поршня процесс в газе считать адиабатическим. Масса поршня равна m .

в) Резиновый жгут натянут с силой F . Посередине жгута прикреплен шарик массы m . Шарик может совершать поперечные колебания. Жгут подчиняется закону Гука, его длина в ненатянутом состоянии l_0 , коэффициент жесткости k . Колебания происходят в невесомости.

2. Небольшой грузик массы m прикреплен к концу легкой пружины, вращающейся в невесомости вокруг другого ее конца с угловой скоростью ω , и совершает малые радиальные колебания около положения равновесия. Длина недеформированной пружины l_0 . Покажите, что такое поведение системы можно описывать с использованием модели линейной пружины с коэффициентом жесткости k лишь при не очень больших значениях частоты вращения ω . Найдите критическую частоту ω_c , при которой линейная модель полностью теряет смысл. Покажите, что учет нелинейности пружины позволяет дать описание поведения системы и при $\omega \geq \omega_c$. Считайте, что зависимость упругой силы от деформации имеет вид $F = kx + cx^3$, где k и c – положительные коэффициенты.

3. Для описания динамики биологической популяции в 1838 году Ферхюльст предложил следующую модель: $dN/dt = aN - bN^2$. Здесь N – численность популяции, a и b – коэффициенты. Найдите решение этого уравнения и постройте график зависимости $N(t)$. Начальное число особей равно N_0 . Покажите, что если число N_0 невелико, то можно выделить «линейную» стадию процесса, на которой исходное дифференциальное уравнение заменяется соответствующим линейным. По какому закону изменяется число особей N на линейной стадии? Через какое характерное время начнут сказываться нелинейные эффекты? К чему приведет воздействие нелинейности по истечении достаточно большого времени? Используя полученные результаты, дайте интерпретацию коэффициентам a и b .

4. Конденсатор с нелинейной характеристикой $q = CU + \alpha U^3$ замкнут на резистор с сопротивлением R . Получите зависимость напряжения на конденсаторе от времени, если его начальное значение равно U_0 . Оцените характерное время τ_n , в течение которого существенны нелинейные эффекты. Найдите закон изменения напряжения на линейной стадии процесса разряда конденсатора.

5. Проявляет ли парамагнетик нелинейные свойства во внешнем магнитном поле? Если да, то какова природа нелинейности?

6. В соленоид с поперечным сечением S и индуктивностью L вставляют ферромагнитный сердечник. Получите выражение для потока, пронизывающего соленоид, в приближении слабой нелинейности в виде ряда, содержащего линейный и кубичный по току члены. Считайте, что ферромагнетик описывается моделью Вейса, в рамках которой нормированная намагниченность $\eta = M/M_0$ связана с магнитным полем H соотношением

$$\text{th } \eta = (T/T_c)\eta - (\mu_B/kT)H.$$

Здесь T – температура, μ_B , k , M_0 , T_c – постоянные коэффициенты, причем T_c – температура, отвечающая точке Кюри. Ферромагнетик плотно входит в соленоид, температура среды выше точки Кюри.

7. Проволочка изогнута так, что ее профиль задан цепной линией $y = \alpha \operatorname{ch}(x/b)$, ось x горизонтальна. По проволочке без трения скользит маленькая бусинка. Получите «эффективный» потенциал $U(s)$, описывающий колебания бусинки. Здесь s – координата, отсчитываемая вдоль проволочки. Возрастает или убывает период нелинейных колебаний с ростом амплитуды?

8. Как должна быть изогнута проволочка, чтобы даже большие колебания бусинки были изохронными?

9. Определите зависимость периода колебаний от амплитуды при движении частицы массы m в потенциальной яме вида $U(x) = U_0 \lg^2 \alpha x$ и постройте соответствующий график. Найдите период линейных колебаний и укажите его значение на графике. С какими особенностями рассматриваемой потенциальной ямы связано то, что с ростом амплитуды период колебания уменьшается по сравнению со значением, предсказанным линейной теорией?

10. Для системы из задачи 1, в укажите значения параметров, при которых даже малые колебания будут неизохронны. Как ведет себя в этом случае период колебаний с уменьшением амплитуды?

11. На обложке журнала «Scientific American» за июль 1963 года изображена эффектная фотография, на которой можно видеть лазерный луч красного цвета с длиной волны 6940 \AA , падающий на кристалл. С противоположной стороны кристалла выходит пучок синего цвета с длиной волны 3470 \AA . Каков характер нелинейности, которая приводит к подобному преобразованию света?

12. В книге Ф. Крауфорда «Волны» [16] описан следующий опыт. Возьмем два камертона с частотами 440 Гц и 523 Гц. Возбудив их, можно услышать не только две эти ноты, но и колебание, близкое к частоте третьей ноты 349 Гц. Объяснение наблюдаемого эффекта состоит в нелинейности уха. Каков характер нелинейности, проявившейся в опыте?

13. Грузик массы m прикреплен к пружине жесткости k и может двигаться по горизонтальной плоскости без трения (рис. 1). Грузику ударом сообщают скорость v_0 . Расстояние от грузика до стенки l , удары о стенку абсолютно упругие. Исследуйте зависимость спектра колебаний системы от величины v_0 . По какому закону в нелинейном режиме колебаний спадают с ростом частоты ω далекие фурье-компоненты? С какими особенностями нелинейности системы связан этот закон?

14. На рис. 2 показана система, представляющая собой маятник в верхнем

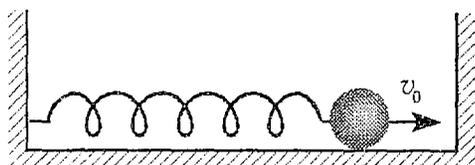


Рис. 1

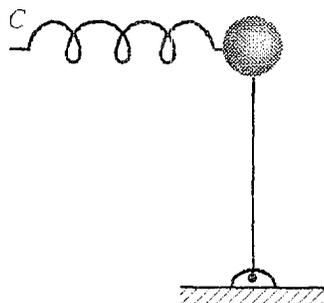


Рис. 2

ПОЛОЖЕНИИ равновесия, прикрепленный к пружине. Покажите, что если пружина нелинейна, то в системе возможна бистабильность – реализуются два положения устойчивого равновесия. Считайте, что нелинейность пружины описывается соотношением $F=kx+cx^3$, где k и c – положительные коэффициенты, а угол отклонения маятника от вертикали мал. Длина стержня l , масса шарика m .

15. В системе, описанной в предыдущей задаче, точка прикрепления пружины S может перемещаться вдоль горизонтали влево–вправо. Изобразите график зависимости отвечающей положениям равновесия деформации пружины x от величины смещения точки прикрепления пружины x_0 . Опишите трансформации графика потенциальной энергии $U(x)$ при вариации x_0 . Обсудите возможность гистерезиса в системе.

16. Представьте уравнение нелинейного осциллятора с затуханием $\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\omega_0^2x+f(x)=0$ в «стандартной» форме, отвечающей определению динамической системы. Покажите, что рассматриваемая система является диссипативной, для чего вычислите дивергенцию соответствующего векторного поля на фазовой плоскости.

17. Одной из первых систем, для которой обнаружен динамический хаос, была исследованная Лоренцем простая модель тепловой конвекции в атмосфере (1963 г.):

$$\dot{x} = \sigma(y-x), \quad \dot{y} = Px-y-xz, \quad \dot{z} = xy-bz.$$

Здесь σ, P, b – параметры. Установите значения параметров, при которых модель Лоренца является диссипативной.

18. Небольшое тело массы m может скользить без трения по горизонтальному стержню (рис. 3). Тело прикреплено пружиной жесткости k к точке O , находящейся на расстоянии l от стержня. Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0 , причем $l_0 > l$. Найдите положения равновесия и соответствующие им значения потенциальной энергии. Постройте график функции $U(x)$ и с его помощью определите, какие из положений равновесия устойчивы. Постройте фазовый портрет системы. Укажите характерные элементы фазового

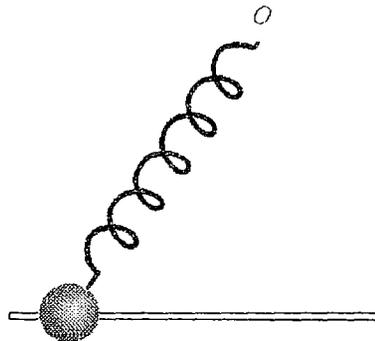


Рис. 3

портрета: особые точки, типичные траектории, сепаратрисы. Напишите уравнение сепаратрисы в явной форме. Используя график потенциальной энергии, опишите поведение тела, отвечающее перечисленным элементам фазового портрета.

19. Молекула может совершать колебательные движения в поле, заданном потенциалом Ленарда – Джонса: $U(r)=4a[(b/r)^{12}-(b/r)^6]$. Постройте фазовый портрет системы и проведите его исследование по схеме, описанной в предыдущей задаче. Масса молекулы m , параметры a и b считайте известными. Какую физическую интерпретацию можно дать для движения по сепаратрисе?

20. Шарик массы m , несущий заряд q , может без трения скользить по непроводящей спице. Спица проходит через центры двух неподвижных колец перпендикулярно их плоскости. Кольца несут заряды противоположных знаков $-Q$ и Q и расположены на расстоянии $2a$ друг от друга. Радиусы колец R . Постройте фазовый портрет системы.

21. Задачу о движении частицы массы m в потенциальной яме вида $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$ сведите приближенно к модели осциллятора с кубической нелинейностью. В рамках этой модели найдите зависимость периода колебаний от частоты. Сравните полученный результат с точным (задача 9), построив соответствующую таблицу.

22. С помощью модели осциллятора с кубической нелинейностью оцените угловую амплитуду колебаний математического маятника, для которой период отличается на 1% от значения, предсказанного линейной теорией.

23. С помощью модели осциллятора с кубической нелинейностью оцените отношение амплитуд первой и третьей гармоник в спектре математического маятника, совершающего колебания с угловыми амплитудами $\pi/6$ и $\pi/2$.

24. Найдите поправку к частоте линейных колебаний для осциллятора с нелинейностью синуса. Покажите, что в первом порядке по квадрату амплитуды полученная оценка согласуется с результатом, отвечающим его аппроксимации осциллятором с кубической нелинейностью. Оцените период колебаний с угловой амплитудой $\pi/2$. Сравните найденное значение с точным и оценкой для осциллятора с кубической нелинейностью.

25. Представьте колебательную систему из задачи 19 в виде модели осциллятора с квадратичной нелинейностью. Используя эту модель, оцените увеличение расстояния между молекулами, совершающими колебания амплитуды A . На основании полученной оценки объясните механизм теплового расширения твердых тел.

26. Какой из универсальных моделей нелинейного осциллятора следует пользоваться для описания системы из задачи 14 при $lk > mg$ и при $lk < mg$? Получите уравнения соответствующих моделей в явном виде, оцените поправку к частоте и величину смещения центра колебаний относительно положения равновесия. Амплитуда колебаний A .

27. Математический маятник длины $l=1$ м находится в верхнем положении равновесия. Маятнику сообщили начальную скорость $v_0=1$ мм/с. Оцените период колебаний.

28. Для математического маятника из предыдущей задачи оцените относительную разность амплитуд первой и третьей гармоник в спектре скорости.

29. Для осциллятора с кубической нелинейностью, описываемого уравнением $\ddot{x} + x - x^3 = 0$, найдите соответствующий движению по сепаратрисе закон изменения координаты и скорости.

30. Найдите приближенно спектр Фурье для функции $v(t)$, определяющей скорость для осциллятора с кубической нелинейностью $\ddot{x} + x - x^3 = 0$, совершающего колебательное движение вблизи сепаратрисы.

31. Колебательный контур состоит из последовательно соединенных индуктивности L , емкости C и нелинейного резистора, характеризующегося вольт-амперной характеристикой $U = IR + kI^3$. Найдите закон изменения заряда на обкладках конденсатора с помощью метода медленно меняющихся амплитуд.

32. Получите укороченное уравнение для комплексной амплитуды в случае диссипативного осциллятора с кубической нелинейностью. Используя его, найдите уравнения для модуля и фазы комплексной амплитуды. Покажите, что в отсутствие диссипации полученные уравнения позволяют найти правильное выражение для поправки к частоте линейных колебаний.

33. Математическому маятнику длины l и массы m , находящемуся в покое в положении устойчивого равновесия в среде с сильной вязкостью (сила сопротивления пропорциональна скорости), сообщили ударом достаточно большую скорость v_0 . Найдите зависимость угла отклонения маятника от времени. Оцените максимальный угол отклонения. (Выполните предварительно оценки, которые уточняют понятия «сильная вязкость» и «большая скорость» для данной задачи. Найдите решения, соответствующие фазам быстрого и медленного движений, постройте их суперпозицию и подчините ее начальным условиям.)

34. В сосуд с поперечным сечением S_1 из крана с сечением S_2 поступает со скоростью v вода (рис. 4). Вода может выливаться через узкую сифонную трубку с поперечным сечением S_3 . Высота левого колена трубки равна h , а правого — H . Постройте график зависимости уровня воды в сосуде от времени и обоснуйте автоколебательный характер поведения системы. Найдите период установившихся автоколебаний. Найдите спектр, отвечающий зависимости высоты уровня воды в сосуде от времени. Считайте, что скорость вытекания воды через трубку определяется формулой Торричелли.

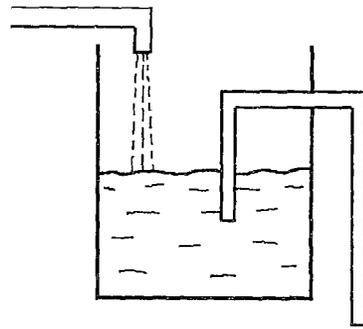


Рис. 4

35. Если провести по струне скрипки смычком, то она зазвучит. Почему? К какому типу колебаний следует отнести такой процесс (вынужденные колебания, параметрические колебания, автоколебания)?

36. Почему скрипит плохо смазанная дверь?

37. Прделайте следующий эксперимент. Пустите в ванну воду из-под крана. Внесите под струю воды шарик от пинг-понга. Пронаблюдайте поведение шарика. Проведите наблюдения для разных значений скорости струи, вытекающей из крана. Опишите поведение шарика на языке теории колебаний.

38. На рис. 5, а изображена полученная экспериментально вольт-амперная характеристика туннельного диода. В эксперименте измерены значения максимума и минимума тока I_1 , I_2 и соответствующие значения напряжения V_1 и V_2 . На этом диоде собран автогенератор по схеме, показанной на рис. 5, б. Параметры элементов схемы L , C и g считайте известными. Найдите величину амплитуды напряжения установившихся квазигармонических автоколебаний на туннельном диоде. При каком условии автоколебания будут квазигармоническими? Пусть

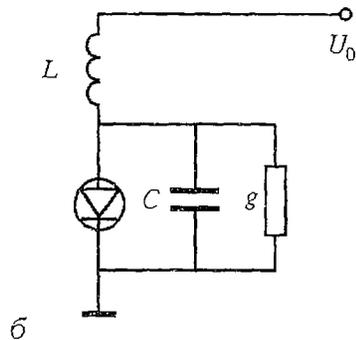
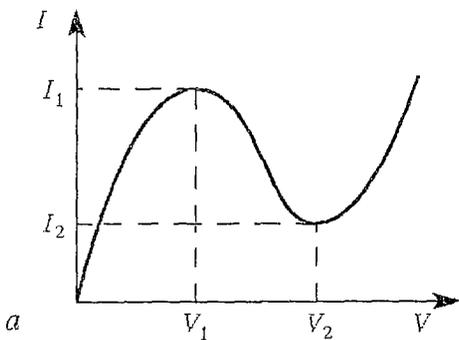


Рис. 5

величина проводимости g может регулироваться. При каком значении g возникнут автоколебания? Чему равна максимально возможная амплитуда автоколебаний? Считайте, что вольт–амперная характеристика диода хорошо аппроксимируется кубической параболой.

39. На ленте транспортера, движущегося с постоянной скоростью V , находится тело массы m , прикрепленное к пружине жесткости k . Зависимость силы трения от относительной скорости движения ленты и транспортера при $v > 0$ дается формулой $f(v) = f_1 + f_2/(1 + v^2/u^2)$, где f_1 , f_2 , u – постоянные коэффициенты. Сопротивление воздуха пропорционально скорости с коэффициентом α . Найдите скорость транспортера V , при которой уравнение движения груза может быть приближенно приведено к уравнению Релея $\ddot{x} - (\lambda - \alpha^2)x + \alpha = 0$. Оцените амплитуду квазигармонических автоколебаний груза.

40. В рамках метода медленно меняющихся амплитуд оцените время τ установления квазигармонических колебаний в системе, описываемой уравнением Ван–дер–Поля $\ddot{x} - (\lambda - \alpha^2)x + \alpha = 0$. Начальная амплитуда A_0 много меньше амплитуды установившихся колебаний. Как ведет себя время τ при приближении параметра λ к бифуркационному значению?

41. С помощью компьютера получите графики зависимости переменной x от времени и фазовые портреты для уравнения Ван–дер–Поля. Продемонстрируйте существование затухающих колебаний, квазигармонических и релаксационных колебаний.

42. Укажите значения параметров, при которых для модели автогенератора $\ddot{x} - (\lambda + kx^2 - \alpha^4)x + \alpha = 0$ возникающий жестким образом предельный цикл будет иметь заданный размер R_0 .

43. Для модели автогенератора из предыдущей задачи изобразите разбисие k , λ плоскости на области, отвечающие различным возможным типам динамики. Изобразите фазовые портреты для каждой из областей. Укажите устойчивые и неустойчивые предельные множества.

44. Исследуйте релаксационные колебания, описываемые уравнением Релея в форме $\epsilon \ddot{x} - (1 - \alpha^2)x + \alpha = 0$, соответствующей присутствию малого параметра перед старшей производной.

а) Постройте линию медленных движений на фазовой плоскости и фазовый портрет.

б) Найдите диапазон изменения координаты x и скорости \dot{x} на участке медленных движений.

в) Найдите связь между скоростью x и временем t на фазе медленных движений. Постройте график зависимости скорости от времени.

г) Оцените период колебаний.

45. Изобразите предельные циклы для автогенератора с жестким возбуждением, описываемого уравнением $\ddot{x} - (\epsilon + \mu x^2 - \alpha^4)x + \alpha = 0$, в случае релаксационных колебаний. Обсудите бифуркации циклов, возможные в этой системе.

46. Для уравнения Ван–дер–Поля получите в явном виде отображение $x_{n+1} = f(x_n)$, связывающее значения переменной x_{n+1} и x_n в момент пересечения оси x на фазовой плоскости, используя решение, полученное с помощью метода медленно

меняющихся амплитуд. Исследуйте на устойчивость неподвижные точки полученного отображения.

47. Получите отображение, соответствующее укороченному уравнению для колебательного контура с нелинейным резистором из задачи 31. Изобразите для него итерационную диаграмму.

48. Получите и исследуйте отображение, соответствующее укороченному уравнению для автогенератора с жестким возбуждением из задачи 42 в случае $k=0$.

49. Для диссипативного осциллятора с кубической нелинейностью под действием вынуждающей гармонической силы найдите линии жестких переходов на плоскости частота – амплитуда воздействия. Покажите, что эти линии имеют вид характерного «клюва».

2. Катастрофы

50. С помощью компьютера постройте график функции $y=\sin x$ на интервале от 0 до 3π и его аппроксимации семью полиномами последовательно возрастающей степени. Пронаблюдайте растущую эффективность Тейлоровской аппроксимации.

51. Свойства некоторой системы определяются функцией $f(x)=Ax+Bx^3+C\sin x+Dx\cos x+Ex\ln x$, зависящей от пяти параметров. Найдите число существенных параметров, которые необходимы при использовании аппроксимации с помощью двух первых членов ряда Тейлора. Что означает свойство полноты в применении к обсуждаемой задаче?

52. Обсудите понятие универсальности применительно к модели осциллятора с кубической нелинейностью. Приведите физические примеры, используя задачи из раздела «Нелинейные колебания».

53. Линза из материала с показателем преломления n образована плоской поверхностью и поверхностью, полученной вращением вокруг оси y некоторой четной функции $y(x)$ с единственным квадратичным экстремумом, расположенным в точке $x=0$. Обоснуйте универсальные свойства такой фокусирующей системы.

54. Консервативный осциллятор характеризуется некоторой потенциальной функцией $U(x)$. Сколько членов ряда Тейлора надо учесть в разложении функции $U(x)$, чтобы получить существенно двухпараметрическую модель консервативного нелинейного осциллятора? Постройте такую модель.

55. Отображение $x_{n+1}=f(x_n)$ задано некоторой гладкой функцией $f(x)$. Используя разложение функции $f(x)$ в ряд Тейлора, а также замены переменной и параметров, получите одно- и двухпараметрические универсальные модельные отображения.

56. Кубическое уравнение $x^3+px+q=0$ может иметь три, два или один действительный корень. Изобразите плоскость параметров p, q , разбитую на соответствующие области, и исследуйте вопрос о типичности и коразмерности каждой из названных ситуаций.

57. Как известно, космическая станция в поле массивной звезды может двигаться по эллипсу, параболе или гиперболе. Какие из этих траекторий относятся к случаям общего положения, а какие – к вырожденным?

58. Какие возможны ситуации взаимного расположения тора и плоскости? Какие из них соответствуют случаям общего положения, а какие являются

вырожденными? Какова их коразмерность? В рассуждениях используйте метод малых шевелений.

59. Какие возможны ситуации взаимного расположения плоской кривой и касающейся ее окружности? Какие из них соответствуют случаям общего положения, а какие представляют собой вырожденные ситуации? Какова коразмерность последних?

60. Укажите случаи общего положения, а также вырожденные ситуации коразмерности один и два на фазовых диаграммах состояния вещества.

61. Возьмите металлическую линейку и сожмите ее так, чтобы она прогнулась в одну сторону. Попробуйте «ликвидировать» этот прогиб, надавливая на выгнувшуюся линейку другой рукой. Пронаблюдайте происшедшую катастрофу.

62. Изготовьте машину Зимана (рис. 6) [8–12]. Проведите эксперименты с этой машиной и определите примерное расположение области мультистабильности на плоскости x, y , где x, y – координаты конца указки.

63. Имеется машина Зимана со следующими параметрами: диаметр диска 1, длина резинок в нерастянутом состоянии 1, расстояние от центра диска до точки прикрепления одной резинки 4. Найдите расположение двух «клювов» области мультистабильности – ближайшего и наиболее удаленного от центра диска.

64. Рассмотрите параболическую качалку [8–12], форма которой задана уравнением $y=x^2$ (рис. 7). В системе координат, привязанной к качалке, найдите геометрическое место точек, размещение грузика в которых обеспечивает существование такого состояния равновесия, что качалка касается горизонтальной поверхности в точке x_0 . Найдите условия устойчивости этого положения равновесия. Как располагается точка потери устойчивости относительно центра кривизны параболы?

65. Эволютой кривой называется кривая, представляющая собой геометрическое место центров кривизны для исходной кривой. Найдите эволюту для параболической качалки. Каковы координаты точки «клюва» на эволюте? Проинтерпретируйте эту кривую с точки зрения существования и сосуществования устойчивых состояний равновесия качалки.

66. Массивная платформа движется по прямой вдоль оси x со скоростью V . На платформе находится прикрепленный к пружине жесткости k груз массы m , совершающий колебания вдоль оси x с амплитудой a . Какие критические точки может иметь функция, определяющая зависимость от времени координаты груза относительно неподвижного наблюдателя? Какие из них «более типичны»?

67. Какие критические точки может иметь потенциальная функция $U(x)$ для системы из задачи 1, в? Какие из них «более типичны»?

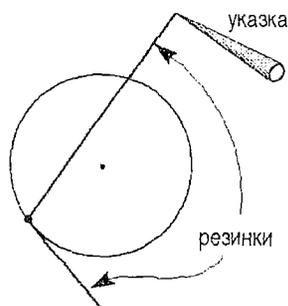


Рис. 6

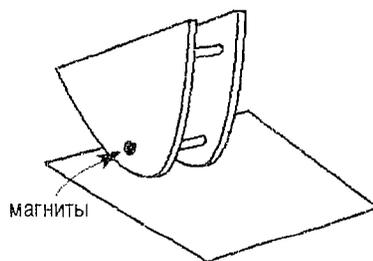


Рис. 7

68. Найдите матрицу Гессе в критических точках типа «максимум»: $z = -x^2 - y^2$; «минимум»: $z = x^2 + y^2$; «перевал»: $z = x^2 - y^2$; «обезьянье седло»: $z = x^3 - 3xy^2$; «желоб»: $z = x^2$ и «скрещенные желоба»: $z = x^2y^2$. Выясните, какие из них являются вырожденными, а какие нет. Изобразите системы линий уровня, соответствующие всем перечисленным критическим точкам.

69. Найдите выражение для потенциала $\phi(x, y)$ в системе двух параллельных нитей, несущих положительные заряды с одинаковой линейной плотностью λ . Нити расположены на расстоянии d друг от друга. Изобразите соответствующую систему линий уровня. Какие критические точки имеет функция $\phi(x, y)$? В их окрестности выделите у функции $\phi(x, y)$ морсовскую часть.

70. Имеется тор в трехмерном пространстве x, y, z . Какие критические точки располагаются на поверхности тора, если считать, что она локально задает некоторую функцию $z(x, y)$? Какие из этих точек являются морсовскими? Рассмотрите различные ориентации тора в пространстве.

71. Фазовые траектории консервативного осциллятора можно рассматривать как линии уровня энергии осциллятора, зависящей от координаты и скорости. Какие объекты на фазовой плоскости соответствуют морсовским седлам?

72. Шарик массы m , несущий заряд q , может скользить без трения по горке, профиль которой задан функцией $y = a \ln(x^2/a^2 + 1)$, в электрическом поле напряженности E , направленном по горизонтали. При изменении величины поля может произойти катастрофа: устойчивое положение равновесия станет невозможным. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии шарика от координаты x при изменении параметра mg/qE . Определите тип катастрофы, происходящей в системе. Изобразите многообразие катастрофы, т.е. зависимость положения равновесия от параметра.

73. В пробирке под невесомым поршнем находится идеальный газ, поверх поршня налита ртуть. Газ очень медленно нагревают. При этом поршень поднимается, и ртуть постепенно выливается из пробирки. При превышении некоторого значения температуры T_c происходит «катастрофа»: поршень поднимается вверх и выбрасывает оставшуюся ртуть из пробирки, даже если температура газа больше не увеличивается. Установите тип катастрофы и постройте многообразие катастрофы. Атмосферное давление p_0 , начальная температура газа T_0 , длина пробирки l , первоначально газом занята часть пробирки l_0 .

74. В системе, описанной в задаче 18, стержень может быть наклонен под углом α к горизонту. Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $\alpha, l/a$.

75. Маленькая бусинка массы m может без трения скользить по тонкому проволочному кольцу радиуса R (рис. 8). Кольцо вращают с частотой ω вокруг вертикальной оси, проходящей через плоскость кольца на расстоянии a от его центра. Проследите за трансформацией зависимости потенциальной энергии бусинки от ее координаты во вращающейся системе отсчета. Найдите линии складок и точку сборки на плоскости параметров $a, \omega^2 R/g$.

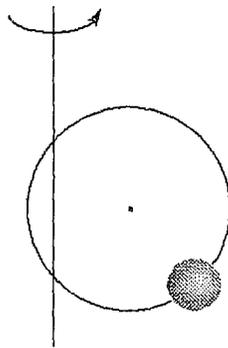


Рис. 8

76. Найдите линии складок и точку сборки в модели ферромагнетика Вейса (см. задачу 6) на плоскости H, T , где H – внешнее магнитное поле, T – температура, причем точка сборки соответствует температуре Кюри. Области с какими свойствами ферромагнетика разграничивают складки?

77. Чем отличаются свойства нелинейного осциллятора в случаях, когда зависимость потенциальной энергии от координаты $U(x)$ претерпевает катастрофу сборки и двойственной сборки?

78. Изобразите различные возможные проекции тора на плоскость. Укажите точки сборки, которые возникают при таком проецировании. Обсудите проблему устойчивости сборок при малом шевелении тора.

79. Покажите, что траектория точки на ободе колеса, катящегося без проскальзывания, имеет острия с характерной «полукубической» особенностью.

80. В системе из задач 14–15 шарик несет заряд q . На расстоянии a от него по горизонтали закреплен заряд противоположного знака $-Q$. Нелинейность пружины описывается соотношением $F=kx+cx^3$, где k и c – положительные коэффициенты, длина стержня l , масса шарика m , пружина не растянута, если шарик отклонен на расстояние x_0 от вертикали. Изобразите возможные конфигурации зависимости потенциальной энергии шарика от его координаты. Найдите значения параметров задачи, отвечающих катастрофе «ласточкин хвост».

81. Для катастрофы «ласточкин хвост», соответствующей потенциальной функции $U(x)=x^5/5+ax^3/3+bx^2/2+cx$, изобразите проекции линий сборок на плоскости параметров (a,b) , (a,c) и (c,b) . Для каждой из проекций укажите показатель степени, который отвечает полученным остриям.

82. Шарик массы m , несущий положительный заряд q , может катиться по поверхности, имеющей форму «лунки» и заданной функцией $z=a\ln(x^2/a^2+y^2/b^2+1)$. Ось z вертикальна. Вдоль оси x направлено электрическое поле E . При достаточно большой напряженности электрического поля устойчивое положение равновесия шарика внутри лунки исчезает. Найдите значения параметров, отвечающих такой катастрофе. Покажите, что вблизи точки катастрофы потенциальная энергия шарика $U(x,y)$ распадается на два слагаемых, первое из которых отвечает канонической форме некоторой каспидной катастрофы для координаты x , а второе соответствует морсовскому поведению по координате y .

83. Движение консервативного осциллятора задается потенциальной функцией $U(x)$. Пусть потенциал $U(x)$ зависит от параметров, при изменении которых он испытывает какие-либо катастрофы. Какие катастрофы – каспидные или омбилические – могут при этом происходить с линиями уровня энергии, т.е. с фазовыми траекториями осциллятора?

84. Объясните симметрию бифуркационного множества катастрофы «эллиптическая омбилика» («пирамида» по терминологии Арнольда [10–12]), заданной потенциалом $U(x,y)=xy^2-y^3/3+a(y^2+x^2)+bx+cy$. Для этого покажите, что повороты системы координат x,y на 120° и 240° соответствуют аналогичным поворотам на плоскости параметров b,c .

85. Покажите, что в центре системы из симметрично расположенных параллельных нитей, несущих одинаковую линейную плотность λ , потенциал $\phi(x,y)$ имеет критическую точку, соответствующую росту катастрофы «пирамида».

86. С помощью компьютера постройте картину линий уровня потенциальной функции $U(x,y)$ для катастрофы «пирамида» в нескольких характерных точках плоскости b,c при $a=1$.

87. С помощью компьютера постройте картину линий уровня потенциальной функции $U(x,y)=xy^2+y^3/3+a(y^2-x^2)+bx+cy$, соответствующей катастрофе «гиперболическая омбилика» («кошелек» по терминологии Арнольда [10–12]), в нескольких характерных точках плоскости b,c при $a=1$.

88. Получите выражение для энергии упругого стержня как функции амплитуды «выпучивания» a , считая что конфигурация стержня описывается выражением $y(s)=af(s)$, где $f(s)=s(s-L)/4$, L – длина стержня. Найдите с помощью этого приближения критическую нагрузку и соответствующий степенной закон зависимости амплитуды a от приложенной силы F .

89. Какой параметр в задаче о выпучивании стержня является аналогом параметра порядка в физике фазовых переходов?

90. Попробуйте угадать без вычислений структуру выражения для энергии стержня в двухмодовом приближении с точностью до членов четвертого порядка. Представляет ли оно собой элементарную катастрофу Тома?

91. Термодинамический потенциал Φ зависит от параметра порядка η следующим образом: $\Phi=\eta^6+A\eta^4+B\eta^2$ (потенциал Гинзбурга – Ландау). Изобразите разбиение плоскости A, B на области с различным характерным видом термодинамического потенциала. Обсудите аналогию с задачей об автогенераторе с жестким возбуждением (задача 43).

92. Обсудите закон соответственных состояний с позиций теории катастроф.

93. На борту корабля, стоящего у причала, можно наблюдать игру бликов, возникающую из-за отражений солнечного света от поверхности воды. Опишите свойства этой картины на языке теории катастроф.

94. В момент времени $t=0$ волновой фронт имеет форму параболы $y=x^2$. Скорость распространения волны c . Когда волновой фронт претерпит катастрофу «ласточкин хвост»?

95. Какие катастрофы волновых фронтов акустических волн наиболее опасны с точки зрения возможных разрушений?

3. Бифуркации

96. Найдите частоту линейных колебаний тела массы m в системе из задачи 18. Исследуйте зависимость этой частоты от параметров, в частности, постройте график зависимости нормированной частоты от угла наклона стержня α . Продемонстрируйте существование эффекта «смягчения моды», показав, что частота может обращаться в нуль.

97. Какие звуки – высокие или низкие – издает нагруженная стальная балка перед разрушением?

98. Долгопериодическая или короткопериодическая качка предшествует опрокидыванию корабля?

99. Какая бифуркация соответствует уравнению Ферхюльста (задача 3), если параметры a и b могут принимать как положительные, так и отрицательные значения?

100. Какая бифуркация имеет место в укороченном уравнении Ван-дер-Поля?

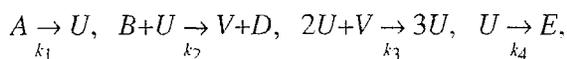
101. Исследуйте дифференциальное уравнение $\dot{x} = \lambda - x^2$, соответствующее нормальной форме для бифуркации «седло–узел». Найдите закон изменения координаты от времени $x(t)$, если $x(0) = x_0$, до бифуркации, в точке бифуркации и за ней. Постройте соответствующие графики. Укажите бассейн притяжения аттрактора системы.

102. Проведите аналогичное исследование для дифференциального уравнения $\dot{x} = \lambda x - x^3$, соответствующего бифуркации типа «вилка» («pitch–fork»).

103. Покажите, что в системе Лоренца (задача 17) при $r=1$ имеет место бифуркация типа «вилка».

104. Для системы, описываемой уравнением $\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x + \mu x^3 = 0$, получите укороченное уравнение. Покажите, что оно соответствует обобщенному уравнению для бифуркации Андронова – Хопфа.

105. Модель химической реакции, получившая название «брюсселятор», определяется схемой реакций



где A, B, D, E, U, V обозначают участвующие компоненты, а k_i – константы скорости реакций. Обозначим концентрации компонент соответствующими заглавными буквами и предположим, что компоненты A и B присутствуют в избытке, т.е. их концентрации постоянны и рассматриваются как параметры задачи. В этом предположении динамика системы описывается уравнениями

$$dU/dt = k_1 A - k_2 B U - k_4 U + k_3 U^2 V, \quad dV/dt + cV_x = k_2 B U - k_3 U^2 V.$$

Приведите уравнения к безразмерной форме. Покажите, что данная система демонстрирует бифуркацию Хопфа.

107. Рассмотрите продемпфированный осциллятор под периодическим импульсным внешним воздействием, амплитуда которого зависит от координаты осциллятора:

$$\dot{x} + \alpha x = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \varphi(x) \delta(t - nT).$$

Получите в явном виде отображение Пуанкаре $x_{n+1} = f(x_n)$, описывающее связь координат осциллятора после $(n+1)$ -го и n -го ударов. Укажите вид функции $\varphi(x)$, при котором получается логистическое отображение.

108. Найдите точку касательной бифуркации, бифуркации рождения 2–цикла и бифуркации рождения 4–цикла для логистического отображения $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2$.

109. Найдите точки касательной бифуркаций для отображения $x_{n+1} = \cos \lambda x_n$.

110. Найдите производную Шварца для двух вариантов кубического отображения $x_{n+1} = x_n^3 + \alpha x_n + b$ и $x_{n+1} = -x_n^3 + \alpha x_n + b$. Какие бифуркации коразмерности один и два возможны в этих отображениях? Попробуйте отыскать эти бифуркации.

111. Для отображения Хенона $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - y$, $y_{n+1} = b x_n$ найдите линию на плоскости λ, b , которой отвечает бифуркация рождения 2–цикла. Укажите области, внутри которых мультипликаторы устойчивой неподвижной точки являются а) действительными, б) мнимыми. Опишите эволюцию мультипликаторов при увеличении параметра λ при фиксированном $b > 0$.

112. В работе Икеды с соавторами [17] была рассмотрена оптическая система в виде кольцевого резонатора, частично заполненного средой с фазовой нелинейностью (рис. 9). Резонатор возбуждается лучом лазера через одно полупрозрачное зеркало, а выходной сигнал снимается через другое. Такая система может быть приближенно описана с помощью отображения $z_{n+1} = A + Bz_n \exp(ilz_n^2)$. Здесь z – комплексная амплитуда света, A – параметр, пропорциональный сигналу лазера, B – параметр диссипации поля в среде. Покажите, что линии касательных бифуркаций на плоскости A, B сходятся в точках сборки и определите координаты нескольких таких точек. Найдите линии удвоенного периода, идущие вдоль «берегов» соответствующих линий складок.

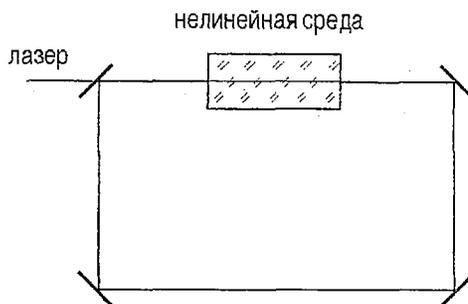


Рис. 9

При разработке курсов «Нелинейные колебания», «Катастрофы и бифуркации» использовались результаты научных исследований, поддержанных грантом РФФИ № 96–15–96921.

Литература

1. Капица П.Л. Эксперимент, теория, практика. М.: Наука, 1974. 288 с.
2. Постников Л.В. и др. Сборник задач по теории колебаний. М.: Наука, 1978. 272 с.
3. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
4. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
5. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
6. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
7. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
8. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 608 с.
9. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1. М.: Мир, 1984. 350 с.
10. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
11. Арнольд В.И. Теория катастроф // Наука и жизнь. 1989. № 10. С. 12–19.
12. Арнольд В.И. II. Теория катастроф // Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики, фундаментальные направления». М.: ВИНТИ. С. 219–275.
13. Томпсон Дж. М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
14. Crawford J.D. Introduction to bifurcation theory // Rev. Mod. Phys. 1991. Vol. 63, № 4. P. 991.
15. Thompson J.M.T., Stewart H.B. Nonlinear Dynamics and Chaos. John Wiley and Sons, 1986. 376 p.
16. Крауффорд Ф. Волны. М.: Наука, 1974. 528 с.
17. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 709.

Саратовский государственный университет, СФ ИРЭ РАН

Поступила в редакцию 13.05.97