

Изв.вузов «ПНЦ», т.5, № 4, 1997

УДК 534.1(075.8)

**КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ ДЛЯ ГУМАНИТАРИЕВ**  
**Учебное пособие для вузов**

*Трубецков Д.И.*

© Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997.  
392 с. 6 с. илл.  
ISBN 5-900641-48-1

Современная наука о колебаниях и волнах представлена в книге своими эффектами и явлениями, встречающимися в медицине, химии, экологии, гидродинамике, электронике, экономике, социальных и других науках. Цель книги – показать, что такие понятия, как колебания и волны, неустойчивость и нелинейность, хаос и структуры позволяют понять единство современной картины мира. В книге также показано как колебательно-волновые идеи проникают в разные науки.

Отличительная черта пособия – большое количество качественных «картинок» эффектов и явлений. Использовано множество примеров из литературных прозаических и поэтических произведений, интересных историй о событиях и людях. Математический аппарат книги прост и предполагает знание школьного курса математики. Широко используется анализ размерности.

Учебное пособие предназначено для студентов-гуманитариев, изучающих курс «Современное естествознание» для направлений: 520000 – гуманитарные и социально-экономические науки, кроме направления 521900 – физическая культура; 540200 – гуманитарные знания; 540300 – социально-экономические знания; 540500 – педагогика; 540600 – искусство; а также для школьников старших классов и для всех, кого интересует современное естествознание и история науки.

Художник и автор (совместно с Козьмой Прутковым) «Плодов раздумий» кандидат физико-математических наук Д.В.Соколов.

Доктор Р.Фейнман в непревзойденных лекциях по физике воспел иерархическое древо познания, на корнях и ветвях которого разрослись разнообразные разновзглядовые, разноподходовые культуры. Спрашивается – возможно ли в принципе нам – людям – охватить («широкоугольно») все на свете, включая нас самих... Пусть нам выпала счастливая доля удачи, и мы решились увековечить достигнутое, записав его способами, наилучше подходящими для каждого дела, через разноязыкую словесность, матформульность, живописность, музыкальность... Ну, через все–все проникающее сквозь наши органы реагирования (включая загадочные рудиментарные). При этом я почему–то «вижу» не обычное ветвистое дерево, а огромную глубину в многокоординатном пространстве, где чего только ни отложено по осям: масштабы физических параметров (длин, времен, энергий и т.п.), химических, биологических, общественно–этических, исторических, политических параметров и показателей и прочее, прочее, прочее... У каждой искренности, у каждого научного или чувственного достижения есть в этом пространстве свои объемчики – пространственные «островки». А внутри каждого свои правила жизни, свое прошлое, свое настоящее, свои пути и методы. Сохраняя умеренную самостоятельность («суверенность»), они поддерживают как ближние (заметные), так и дальние (убывающие) связи с соседствующими областями. Восприятие каждого островка зависит от углубления (по одной из координат), от масштабов засекаемых подробностей, от наших разрешающих потребностей и способностей. «Вглядываясь» все пристальней и пристальней, мы начинаем различать все новые и новые миры...

*М.А.Миллер.* Раздумья про раздумья

Теория колебаний объединяет, обобщает различные области физики. Это положение можно пояснить следующим примером. Каждая из областей физики – оптика, механика, акустика – говорит на своем «национальном» языке. Но есть «интернациональный» язык, и это язык теории колебаний. Она вырабатывает свои специфические понятия, свои методы, свой универсальный язык.

*Л.И. Мандельштам.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике

## Предисловие

У замечательного поэта Александра Кушнера есть такие строки:

В пространстве левом опыт умственный,  
Прохладный, дышащий безликостью.

Это – математика, естествознание, техника.

В пространстве правом вещный, чувственный,  
С шероховатостью и выпуклостью.

Это – искусство и гуманитарные знания.

И дальше:

Пространство левое, абстрактное,  
Стремящееся в неизвестное;  
Пространство правое, обратное,  
Всегда заполненное, тесное.<sup>1</sup>

В 1957 году известный английский писатель Чарльз Сноу (физик по образованию) выдвинул «проблему двух культур» в своем, ставшем широко известным эссе «Две культуры». К середине XX века проблема разрослась настолько, что по мнению ряда авторов возникла угроза разделения единой культуры между гуманитариями и естественниками, которые воспринимают мир по–разному, у которых разные ценности в духовной сфере личности и общества. По А.Кушнеру это значит, что

<sup>1</sup> Цитируется по книге А. Кушнера «Стихотворения». Л.: Худ. лит., 1986. С. 29.

Твои друзья высоколобые  
Раззять материю пыгаются.  
Люблю потрогать ствол, попробовать  
Кору: легко ли отдирается?  
.....  
Вот и боярыню Морозову  
Не сдвинуть в левый, нижний угол.  
Художник чувствует, где розвальни,  
А где толпу раскинуть кругом.

У нас в стране эта проблема выплеснулась в шумную дискуссию в прессе о «физиках и лириках» в начале 60–х годов нашего столетия. Тогда–то и появились знаменитые строчки Б.Слущкого:

Что–то физики в почете,  
Что–то лирики в загоне...

В процессе дискуссии выяснилось, что физики и «толстые» журналы читают (сейчас это сделать не так просто), и поэзию знают, и сами рифмошлетствуют, и шутят... А вот гуманитарии далеко не все знают, почему меняются времена года, почему космический корабль может стать искусственным спутником Земли, с чем связаны фазы Луны, как объяснить воспелые ими белые ночи и т.п.

Гуманитариям это почему–то прощалось. Физики ходили в героях... Правда, уже в 1975 году Д.Сухарев в стихотворении «Рыжий остров» писал:

Физики запели Слущкого,  
Это достоверная история.  
Я свидетель: тихо слушала  
Слущкого аудитория  
.....  
Это что ж – разладились куранты?  
С физики побилась мишура?  
В лирику подались аспиранты,  
Кандидаты и профессора.  
Термоядерщики и акустики,  
Что они хватаются за кустики,  
Всемогущий разум им не мил?  
Или дело в том, что муза музыки  
Забегала в двери вуза физики,  
Чтоб найти защиту от громил?  
.....  
Физики пооблиняли перьями,  
Серые для них настали дни.  
Все же что–то делают они.  
Слущкого –  
они запели первыми.

Да, «физики пооблиняли перьями»: молодые люди выбирают гуманитарные науки, велика роль последних в прогнозировании и принятии решений; гуманитарий нередко выступает в роли властителя дум, эксперта, пророка. Масштаб этих процессов, их временное развитие особенно заметны в России, где вместе со старым строем рухнула и старая социальная картина мира. Новая создается под сильным влиянием современной естественно–научной картины мира, в которой главным являются новые понятия – сложность, нелинейность, непредсказуемость. Поэтому не случайно, что новое поколение гуманитариев хочет понимать окружающий мир и объяснять его. Они хотят не только воспевать те же белые ночи, но и понимать, почему они бывают, почему их нет в Москве, но они так чудесны в Санкт–Петербурге...

У томского физика и библиографа Бориса Николаевича Пойзнера есть небольшая книжечка с длинным и необгчным названием «Vademecum студента, идущего в точную науку. или о книгах, понятиях и проблемах, которые ему стоило бы знать». Такая книга для Б.Н. Пойзнера не случайна, поскольку, наряду с физическими публикациями, у него есть статьи и по ряду

гуманитарных проблем, он инициатор издания и редактор библиографических указателей, посвященных научному творчеству, литературе и философии русской эмиграции, университетскому образованию, синергетике, он член комиссии по творческому наследию Густава Шпета, председатель Вольного Гуманитарного Семинара Томска. (Это штришок к дискуссии о «физиках и лириках»). В названии книги латинское слово. Что оно означает? Ответим цитатой из упомянутой книги. «Приглашение, звучащее по-латыни *vademecum* – иди со мной – выбрано для заглавия как наиболее точное по смыслу. В сочинениях Гоголя или, скажем, Тургенева не так уж редко встречаем упоминание о вадемекуме, когда речь заходит о карманном справочнике, путеводителе, проводнике, спутнике. Уверен, что того, кто вспомнил это слово, оно не будет раздражать. А прочитавшего его впервые оно должно привлечь широтой значений и, следовательно, возможностью освежить им обыденную речь».

Предлагаемая книга тоже вадемекуму читателя по науке о колебаниях и волнах.

Настоящее учебное пособие соответствует учебной дисциплине «современное естествознание» для студентов гуманитарных направлений и специальностей и в определенной степени соответствует разделу «III. Эволюционно-синергетическая парадигма: от целостного естествознания к целостной культуре» примерной программы дисциплины «Концепции современного естествознания», разработанной в 1995 году Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию.

Цель пособия – показать единство современного естествознания с позиций науки о колебаниях и волнах в ее сегодняшней интерпретации. Ключевые слова для всей книги: колебания и волны, неустойчивость и нелинейность, хаос и структуры, т.е. понятия, лежащие в основе синергетической парадигмы. Студент должен понять, что в предлагаемой концепции (в России ее возникновение связано со школой Л.И. Мандельштама и его учеников) в первую очередь интересуются общими свойствами колебательных и волновых процессов, а не деталями поведения системы, связанными с проявлениями ее конкретной природы (физической, биологической, социальной и т.п.). Основываясь на анализе моделей, наука о колебаниях и волнах (в широком понимании, включающем хаос и структуры) позволяет человеку построить картину современного мира и понять свое место в нем.

Книга, по существу, состоит из трех частей.

Главы 1–6 посвящены линейным колебаниям и волнам, понимание которых необходимо в естествознании. В главах 7–9 дано введение в современную нелинейную динамику. Наконец, глава 10 – попытка ответить на вопрос: «Как идеи нелинейной динамики проникают в разные науки?» Математический аппарат книги прост: достаточно знать курс школьной математики. Широко используется анализ размерности. Напомню, что современная наука о методике преподавания считает использование этого аппарата основным элементом гуманизации физического образования. Впрочем, один из крупнейших наших математиков – академик А.А. Марков как-то обронил фразу: «Математика, в сущности, наука гуманитарная, потому что она изучает то, что человек напридумывал». Заметим, что Ричард Фейнман – один из замечательных физиков-теоретиков всех времен – еще «круче» высказывался о математике: «Математика, с нашей точки зрения, не наука в том смысле, что она не относится к естественным наукам. Ведь мерило ее справедливости отнюдь не опыт»<sup>2</sup>. Правда, он продолжал так: «Кстати, не все то, что не наука, уже обязательно плохо. Любовь, например, тоже не наука. Словом, когда какую-то вещь называют не наукой, это не значит, что с нею что-то неладно: просто не наука она, и все».

Книга написана разговорным языком: почти каждую главу можно рассматривать как определенную лекцию. Приводится большое количество

<sup>2</sup> Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Том 1. М.: Мир, 1965. С. 55.

примеров из литературных поэтических и прозаических произведений. Изложение ведется на историческом фоне, даются словесные портреты ученых. Большая часть пособия читалась в качестве лекций студентам философского отделения и преподавателям Саратовского университета, а также студентам и преподавателям Поволжской академии государственной службы. В третью часть книги вошли материалы соросовской лекции автора соросовским учителям, ряда лекций для учителей и школьников области, для студентов младших курсов и книги лекций, написанной совместно с А.А. Короновским «Нелинейная динамика в действии. Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995. 130 с.). «Линейная» часть предлагаемого учебного пособия в известной степени соответствует книге автора «Колебания, волны, электроны. Часть I. Линейные системы» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1993. 226 с.) Курс, основанный на этой книге, читался в течение ряда лет школьникам в лицее Колледжа прикладных наук Саратовского университета и студентам-физикам первого курса как часть «Введения в специальность».

Автор надеется, что, кроме студентов-гуманитариев, для которых книга предназначена, она будет полезна для всех, кто интересуется современной наукой о колебаниях и волнах, историей науки, характером работы исследователя. Книга доступна старшеклассникам и студентам разных специальностей, для которых важно понимание колебательных и волновых процессов, например, биологам, химикам, экологам. Учитель, по-видимому, тоже извлечет пользу из книги, поскольку идея о колебательно-волновой общности явлений самой различной природы слабо отражена в школьных учебниках. Наконец, хочется верить, что в книгу заглянут и гуманитарии-профессионалы.

## Введение

В нашей стране идет бурный, чреватый большими опасностями, процесс дестабилизации: старые общественные структуры рушатся, а новые находятся лишь в стадии становления...

Разобраться в состоянии человека и общества, найти выход из тупиков и трудностей настоящего и пути к созданию фундамента будущего нам помогает молодая наука – синергетика. Она обладает экспериментально проверенной научной методологией и мощным математическим аппаратом, пригодным для компьютерной обработки, и изучает сверхсложные, комплексные системы, в частности, такие как человек и общество.

*Ч.Т. Айтматов и В.Д. Поремский.* Из обращения к участникам Московского синергетического форума «Устойчивое развитие в изменяющемся мире» (27–31 января 1996 года).

Совсем не легко дать определение того, что составляет предмет теории колебаний... Было бы бесплодным педантизмом стараться «точно» определить, какими именно процессами занимается теория колебаний. Важно не это. Важно выделить руководящие идеи, основные общие закономерности. В теории колебаний эти закономерности очень специфичны, очень своеобразны, и их нужно не просто «знать», а они должны войти в плоть и кровь.

*Л.И. Мандельштам.* Лекции по теории колебаний.

Каждый человек, начиная с детства, хочет понять окружающий его мир, а позднее свое место в нем. Увы, не всегда это удастся. Причем, как показывают исследования, мешает этому иногда система образования, которая часто отбивает охоту познавать мир. Нередко это связано с тем, что изучение отдельных предметов никак не увязывается друг с другом. Откуда тогда взяться тому, что называют картиной мира? Да и одна ли она? Пожалуй, можно говорить, по крайней мере, о трех полотнах:

естественно-научной картине мира,  
социальной картине мира и  
религиозной картине мира.

Если использовать для современной картины мира образ громадной фрески, которую на протяжении веков рисуют ученые – художники, то три картины будут принадлежать художникам разных школ<sup>1</sup>. И если первая, как правило, не зависит от того, в какой стране вы живете, то две других зависят от этого. Впрочем, они зависят часто и друг от друга.

До последнего времени в нашей стране считалось, что существуют неизблемые исторические закономерности, которые определяют ход истории в заранее заданном направлении к светлому будущему: История уподоблялась эскалатору, движущемуся вверх к сияющим вершинам, а политике не оставалось ничего, как выполнять «предначертания исторического разума»<sup>2</sup>. Финал спектакля все равно известен, но истории хочется разыграть его как можно более интересно на фоне политической борьбы сил света и тьмы. Современное естествознание, а внутри его нелинейная динамика или синергетика, уже давно ушли от подобных лапласовских представлений, открыв сложность, нелинейность, непредсказуемость. Эти открытия находят применение и в социальной картине мира, так что два первых полотна могут превратиться в одно.

Вернемся к образу фрески, процесс обновления которой идет непрерывно. Отдельные места переписываются, какие-то стираются, какие-то остаются незакрашенными... Манера выполнения фрески во многом определяется временем, из которого мы на нее смотрим. Механическую картину мира сменила электромагнитная, наш век – век квантовой теории и теории относительности, но уже настойчиво стучит в дверь нелинейная динамика. Иногда ее называют синергетикой<sup>3</sup>, иногда – наукой о сложности, иногда – неравновесной термодинамикой. Пожалуй, речь идет не просто о новой науке, а о новом взгляде на мир, позволяющем объединить естественно-научную и социальную картины мира (некоторые считают, что синергетике по силам включить в себя и религиозную картину мира).

Что же делает с любой картиной мира средняя школа? Она вырезает отдельные небольшие картины в разных местах фрески, заключает их в рамки, а потом развешивает согласно школьному расписанию. Поэтому трудно понять, как отдельные науки связаны друг с другом.

А что делает высшая школа? В высшем учебном заведении из фрески вырезают практически в одном месте большую картину. И вот в течение пяти лет студенты со своими преподавателями ее разглядывают. Хорошо, если преподаватели могут заглянуть за пределы картины и научить этому студентов, но все равно увиденное пространство фрески остается ограниченным. Как же охватить картину целиком? Нужно по-иному смотреть на нее: нужно видеть общее в разных местах фрески. Такой новый взгляд, как уже упоминалось, нелинейная динамика или синергетика. Мы говорим о нелинейной динамике или синергетике, но правильнее и шире говорить о теории колебаний и волн – области науки, исследующей колебательные и волновые явления в системах самой различной природы. Для теории колебаний и волн в первую очередь важны общие свойства колебательных и волновых процессов, а не детали поведения системы, связанные с проявлением ее конкретной физической, химической, биологической и другой природы. Эти общие свойства в реальных системах устанавливаются на основе анализа немногочисленных эталонных моделей, таких, гармонический

<sup>1</sup> М.А. Миллер видит не фреску, а многомерную скульптуру-глыбу, включив в нее все, что составляет познание (см. эпиграф к книге).

<sup>2</sup> Правда, в одной из популярных песенок последних лет утверждалось: «Мы просто не на тот попали эскалатор...»

<sup>3</sup> Неологизм «синергетика» происходит от греческого «синергия» содействие, сотрудничество. Ввел его немецкий физик Герман Хакен, акцентируя внимание на согласованности взаимодействия частей при образовании структуры как единого целого.

осциллятор, линейный осциллятор, нелинейный осциллятор, на основе модельных уравнений для нелинейных волн и нелинейных структур и т.п.

Ключевые понятия здесь – колебания и волны, неустойчивость и нелинейность, хаос и структуры. Однако, можно обойтись только понятиями колебаний и волн, превратив остальные в прилагательные: неустойчивые колебания и волны, нелинейные колебания и волны, хаотические колебания и волны, автоволны (разновидность структур) и т.п. Именно поэтому в название книги вынесены только два понятия – колебания и волны.

Попробуем предварительно (конечно, пока поверхностно) разобраться в понятиях, перечисленных выше (мы возвратимся к ним в тексте книги).<sup>4</sup> Итак, колебания. Начнем с малых, так называемых, линейных колебаний, рассмотрим простейший пример – маятник. Пока ограничимся словесным описанием разных маятников, вернувшись к их строгому описанию в главе 2. Если не учитывать трение маятника о воздух (диссипативные процессы), то его малое смещение от положения равновесия удовлетворяет так называемому уравнению гармонического осциллятора, а на фазовой плоскости (вертикальная ось – скорость маятника, горизонтальная – его смещение) получаются замкнутые траектории – вложенные друг в друга эллипсы. Замкнутость траекторий отражает основное свойство колебаний: туда–сюда, туда–сюда – возвращение, периодичность. Реально колебания затухают и маятник в конце концов остановится. Уравнение для смещения такого маятника – уравнение линейного осциллятора, а на фазовой плоскости будем иметь траектории в виде скручивающихся к состоянию равновесия спиралей.

Первым, кто понял, что упомянутые уравнения описывают не только механические колебания, был Релей. В свою книгу «Теория звука» он ввел раздел об электрических колебаниях применительно к колебательному контуру. Уравнения остаются теми же, только частота и затухание выражаются через разные параметры, характеризующие конкретную систему.

Рассмотрим теперь гипотетическую химическую реакцию – реакцию Лотки. Предположим, что в избыточном состоянии имеется некоторое вещество  $A$ , которое с определенной скоростью переходит в вещество  $X$ . В «избыточном состоянии» означает, что количество вещества  $A$  практически не изменяется. Вещество  $X$  превращается со скоростью  $k_1$  в вещество  $Y$ . Чем больше вещества  $Y$ , тем эффективнее превращается в него  $X$ . Наконец, вещество  $Y$  со скоростью  $k_2$  превращается в вещество  $B$ .

Если написать соответствующие уравнения, то в них войдут произведения концентраций, что отражает основной закон химической кинетики: чтобы взаимодействовать, надо, по крайней мере, встретиться. Кстати, такая же ситуация имеет место в экологии, где «взаимодействуют» хищник и жертва, и где ясно, чем обычно заканчивается эта встреча.

Если рассмотреть случай, в котором вещество  $B$  остается в неизменном количестве, то можно найти равновесные (не зависящие от времени) значения концентраций вещества  $X$  и  $Y$ . Предположим, что в систему внесено возмущение  $x(t)$  и  $y(t)$ , малое по сравнению с  $X$  и  $Y$ .

В результате простых математических преобразований мы приходим для возмущений к уравнению маятника с затуханием – уравнению линейного осциллятора. Это значит, что существует периодическая химическая реакция. Наиболее известный пример – знаменитая теперь реакция Белоусова – Жаботинского – реакция окисления малоновой кислоты  $KBrO_2$  и  $Ce(SO_4)_2$ . Раствор периодически меняет цвет. Правда, в этом случае процесс сложнее: имеют место незатухающие колебания, автоколебания, которые идут до тех пор, пока есть реагенты.

<sup>4</sup> Во вводной главе практически не будем использовать математические уравнения, иногда лишь называя их. Впрочем, неважно сейчас и как называется уравнение. Важно будет, что оно одно и то же для разных процессов (для разных процессов одна модель). Необходимый математический аппарат будет излагаться в последующих лекциях.

Обратимся теперь к экологии, рассмотрим модель хищник–жертва, которую предложил Вольтерра. Соответствующие уравнения для численностей популяции жертвы ( $N_1$ ) и хищника ( $N_2$ ) похожи на уравнения взаимодействующих химических веществ. Результат встречи – уменьшение числа жертв и увеличение числа хищников. Если провести такой же анализ, как для модели химической реакции, т.е. найти равновесные состояния популяций, дать малые возмущения численности, то приходим к уравнению гармонического осциллятора – маятника без затухания. Кстати сказать, подобная модель проверялась экспериментально по результатам охоты в Канаде на лис и зайцев (по числу шкур). Получилась периодическая зависимость  $N_1$  и  $N_2$  от времени, хорошо согласующаяся с результатами решения соответствующих уравнений. Таким образом, четыре модели малых колебаний в системах разной природы совпадают: по–существу, модель одна – линейный осциллятор. Так что в разных, даже далеких, местах нашей фрески мы нашли общее! Математическое подтверждение сказанному будет дано в главе 2. Там же мы приведем и соответствующие картинки.

Большинство процессов, происходящих в окружающем нас мире, неустойчиво. Неустойчивость – нарастание во времени какой–либо величины (не обязательно физической), характеризующей данный процесс. Неустойчивость бывает разная – колебательная и волновая, по отношению к малым и большим возмущениям состояния равновесия, к возмущениям движения по траектории, неустойчивость, возникающая при изменении начальных условий... Широко известный, но не ставший от этого хуже, пример последней представляет собой ситуация из фантастического рассказа Брэдли «И грянул гром». Вот сюжет этого рассказа. Некая фирма организует сафари в прошлом. Там проложена тропка, с которой нельзя сходить, чтобы не изменить условий в прошлом, которые являются начальными для настоящего. Однако, один из охотников по трусости сходит с тропы и нечаянно раздавливает маленькую желтую бабочку. Начальные условия изменились... Экспедиция возвращается в настоящее и ее члены видят, что изменился алфавит, избран другой президент, более того, у людей изменился цвет лица, разрез глаз, т.е. произошли изменения на генетическом уровне. Малое изменение начальных условий (раздавлена бабочка) привело к серьезным изменениям за конечное время.

Колебательный процесс возникает в системе, когда наряду с силой, выводящей ее из состояния равновесия, есть и восстанавливающая (возвращающая) сила. Что будет, если восстанавливающая сила действует на систему с некоторым постоянным запаздыванием? Возникает неустойчивость. На фазовой плоскости будем иметь спирали, раскручивающиеся от начала координат. Причем, если такая неустойчивость, связанная с эффектами запаздывания, вредна для корабельных стабилизирующих механизмов, то она полезна при разработке электронных генераторов.

Рассмотрим теперь необычную модель – модель гонки вооружений в двух враждующих странах, которую предложил математик Ричардсон.

Первая страна («желтые») вооружается, опасаясь потенциальной угрозы войны с соседней враждебной страной («зеленые»). Разумеется, «зеленые», зная о росте затрат на вооружение у «желтых», также увеличивают расходы на вооружение.

Предположим, что  $x(t)$  расходы на вооружение у «желтых» в момент  $t \geq 0$ , а  $y(t)$  – «зеленых»; причем, каждая страна изменяет скорость роста (сокращения) вооружений пропорционально уровню затрат другой, и чем больше текущий уровень затрат на оборону, тем меньше скорость его роста. Тогда простейшая модель имеет вид:

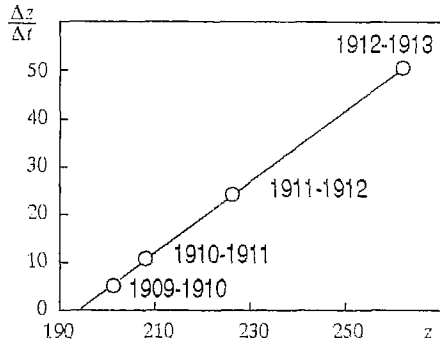
$$dx/dt = ay - mx + r, \quad dy/dt = bx - ny + s,$$

где  $a, m, b, n$  – положительные постоянные. В уравнения включены также постоянные величины  $r$  и  $s$ . Если  $r$  и  $s > 0$ , то это значит, что государство, руководствуясь своими державными притязаниями и враждебностью к другим государствам, наращивает вооружение, даже если другие страны не угрожают



Гонка вооружений по Ричардсону

Страна и другие данные для всех стран – участниц	1909	1910	1911	1912	1913
Франция	48.6	50.9	57.1	63.2	74.7
Россия	66.7	68.5	70.7	81.8	92.7
Германия	63.1	62.0	62.0	68.2	95.4
Австро–Венгрия	20.8	23.4	23.4	25.5	26.9
Сумма	<b>199.2</b>	<b>204.8</b>	<b>214.9</b>	<b>238.7</b>	<b>289.0</b>
Рост	5.6	10.1	23.8	50.3	
Среднее за два года	202.0	209.8	226.8	263.8	



существованию данного государства. Если  $r$  и  $s < 0$ , то их можно назвать слагаемыми доброй воли. Анализ показывает, что возможны состояния равновесия, возможно полное взаимное разоружение и возможна неустойчивость – неограниченная эскалация гонки вооружений.

Предположим для простоты, что  $a=b$ ,  $m=n$ , и сложим выписанные ранее уравнения. Получим одно уравнение  $dz/dt=kz+f$ , где  $x+y=z$ ,  $a-m=k$ ,  $r+s=f$ . Решение этого уравнения имеет вид:  $z(t)=(z_0+fk)e^{kt}-fk/k$ . В последней формуле  $z$  – суммарные затраты на вооружение двух блоков,  $z_0=x_0+y_0$  – начальное состояние. Легко видеть, что когда  $a < m$  ( $k < 0$ ), первое слагаемое в  $z(t)$  стремится к нулю, а  $z \rightarrow (-fk/k)$ . Если  $a > m$ , то  $k > 0$ , и  $z(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  неограниченно нарастает.

Для проверки своей весьма упрощенной модели Ричардсон использовал данные о гонке вооружений перед первой мировой войной в интервале от 1909 по 1913 год. Он изучал противоборство двух блоков:  $x$  – Франция и Россия;  $y$  – Германия и Австро–Венгрия (расходы Англии, Италии и Турции не учитывались). Военные бюджеты четырех стран приведены в таблице (все затраты даны в миллионах фунтов стерлингов). Там же приведена зависимость роста расходов на вооружение  $\Delta z/\Delta t$  от суммарного военного бюджета стран обоих блоков. Четыре выделенных точки соответствуют данным из таблицы. Все они лежат на одной прямой, что хорошо соответствует уравнению для  $dz/dt$ .

Другой американский математик Томас Саати, исследуя модель Ричардсона, показал, что в принципе всегда можно прийти к условию устойчивого равновесия, которое будет означать обнищание одной или обеих сторон. Интересно, что обобщение модели на  $n$  стран ( $n > 2$ ) неизбежно приводит к неустойчивости – к войне.

Волны... Конечно, сразу на память приходят волны на воде. Помните, у Б.Пастернака:

Передо мною волны моря.  
Их много. Им немыслим счет.  
Их тьма. Они шумят в мшире.  
Прибой, как вафли их печет.

Их действительно тьма. Это всем известные волны на воде, электромагнитные волны, волны жизни, введенные в науку Тимофеевым–Рессовским и Четвериковым, ритмы искусства, волны эпидемий, волны пожара, волны экологических нашествий, волны слухов... После такого перечня возникает вопрос: «Что называется волной?» В учебнике физики для 11 класса средней школы приводится такое определение: «Волной называют колебания, распространяющиеся в пространстве с течением времени... При распространении волны происходит перемещение состояния колеблющегося вещества, но не перенос вещества...» Определение хорошее, но как быть, например, с волнами слухов? Можно использовать более общее определение: перемещение в пространстве изменения состояния называется волной. С таким определением мы можем заглянуть в разные уголки нашей фрески.

Задолго до нас подобное сделал Ф.Тютчев, у которого есть замечательные строки:

Дума за думой, волна за волной –  
Два проявленья стихии одной:  
В сердце ли тесном, в безбрежном ли море,  
Здесь – в заключении, там на просторе, –  
Тот же все вечный прибой и отбой,  
Тот же все призрак тревожно–пустой.

Поэт с удивительной точностью объединил морские волны, ритмы мозга и сердца.

До сих пор мы говорили о линейных колебаниях, о неустойчивости к малым возмущениям. Лишь разговор о волнах был более общим. Один из классиков современной науки о колебаниях академик А.А. Андронов, говоря о линейном мире, мире, где господствует принцип суперпозиции, восклицал: «Это дико частный случай!» Но наш мир нелинеен, наш мир – мир нелинейных систем.

Свойства нелинейных систем зависят от их состояния. Математическое поведение нелинейных систем описывается нелинейными уравнениями, содержащими изучаемые величины в степенях больше единицы или коэффициенты, зависящие от этих величин. По И.В. Пригожину – одному из создателей науки о сложном – в дифференциальном уравнении, описывающем эволюцию системы, меняется некоторый управляющий параметр. При определенном значении параметра возникают, по крайней мере, два пути эволюции системы. Говорят, что имеет место бифуркация<sup>5</sup>.

Наука о сложном поведении нелинейных систем, эволюции их во времени и пространстве, о колебаниях и волнах в них, о развитии разного рода неустойчивостей и их стабилизации, о возникновении хаоса и рождении структур в них и называется нелинейной динамикой (иногда, как уже упоминалось, говорят о синергетике, о науке о сложности и т.п.). Более обще, это – нелинейная теория колебаний и волн.

Нелинейные эффекты описываются нелинейными функциями, позволяющими описывать колебания, резонансные выбросы, насыщение и т.п. Линейные же функции «умеют» либо расти, либо убывать: одинаковому приращению аргумента линейной функции соответствует одинаковое приращение самой функции. Нелинейная функция ведет себя иначе: одному же приращению аргумента может соответствовать разное поведение функции. Отсюда и различие двух миров – линейного и нелинейного. Что значит нелинейность для естествознания, очень образно описал известный специалист в области математической физики, автор и переводчик многих научных и научно-популярных книг Ю.А. Данилов. «В какой бы области естествознания не возникала нелинейность явлений, она глубоко «функциональна». В физике нелинейность –

<sup>5</sup> Бифуркация от латинского *bi* – двойной и *furca* – развилка, т.е. означает развилку или *раздвоение нидвоог*. Однако, в науке о сложных системах этот термин означает переход в новый динамический режим, в другой мир. Читателю полезно прочитать книгу Эрвина Ласло «Век бифуркации. Постигание изменяющегося мира», опубликованную в журнале «Путь», 1995, N7, с. 3–129.

это учет различного рода взаимодействий, обратных влияний и тонких эффектов, ускользающих от более грубых сетей линейной теории. В химии нелинейность отражает обратные связи в сокровеннейших механизмах реакций. В биологии нелинейность исполнена высокого эволюционного смысла: только сильная нелинейность позволяет биологическим системам «...услышать шорох подползающей змеи и не ослепнуть при вспышке близкой молнии. Те биологические системы, которые не смогли охватить диапазон жизненно значимых воздействий среды, попросту вымерли, не выдержав борьбы за существование. На их могилах можно было бы написать: «Они были слишком линейными для этого мира» (А.И.Молчанов)».

Понимание того, что мир нелинеен, привело к разрушению многих традиционных, казалось бы незыблемых, представлений<sup>6</sup>. Мы коснемся здесь лишь понятий о хаосе и структурах.

Говоря о бифуркациях, мы уже упоминали, что для сложных систем существует несколько альтернативных путей развития. Как писал А.Купшнер:

Не отодвинуть нам Линкольна или Гранта,  
Но будущее многовариантно.  
Предсказывать его, где взять талант.  
На что мой друг сказал мне очень круто,  
Что Клио выбирает почему-то  
Из многих – наихудший вариант.

И если раньше считалось (мы уже писали об этом), что существуют исторические закономерности, которые определяют ход истории только в одном наперед известном направлении, то стало ясно – исторический процесс включает альтернативы и варианты, представляющиеся в виде политических платформ.

И все же главным открытием нелинейной динамики было открытие детерминированного хаоса (не правда ли, существительное и определяющее его прилагательное, казалось бы, противоречат друг другу). За точкой бифуркации система может демонстрировать хаотическое поведение, подчиняющееся вполне определенным законам. Согласно Б.Слуцкому

В этом хаосе есть закон,  
Есть порядок в этом борделе.  
В самом деле, на самом деле  
Он действительно вам знаком.

Самое удивительное в том, что при определенных условиях движение очень простых систем становится не только похожим, но и неотличимым от случайного. Как объяснить это? Объяснений не одно, остановимся на так называемом алгоритмическом подходе в теории динамических систем. Перенесемся в фазовое пространство – обычное пространство координат и пространство скоростей (или импульсов) системы. Фазовое пространство непрерывно, поэтому начальные условия движения системы задаются несколькими иррациональными числами – бесконечной непериодической последовательностью цифр. Таким образом, почти любая точка фазового пространства уже содержит в себе случайность<sup>7</sup>. Если теперь мы поместим в фазовое пространство динамическую систему (даже очень простую), то ее роль состоит в превращении случайности начальных условий в макроскопическую случайность движения системы. При существовании в системе, так называемой, локальной неустойчивости, когда близкие траектории расходятся экспоненциально, на каком-то этапе движение определяется деталями начальных условий и сильно зависит от них. Предположим, что фазовое пространство ограничено. Тогда, рано или поздно, разбежавшиеся траектории вернуться друг к другу. И так будет много раз. Происходит как бы перемешивание фазового пространства, проявляющееся в хаотическом движении фазовых траекторий.

<sup>6</sup> Об этом много и интересно написано в статье Е.Н. Князевой и С.П. Курдюмова «Синергетика как новое мировидение: диалог с И. Пригожиным», Вопросы философии, 1992, № 12, с. 3–20.

<sup>7</sup> Слово «почти» отмечает существование рациональных чисел, но таких неслучайных точек в фазовом пространстве очень мало.

Исследования последних лет позволили американскому физика Форду шуточно утверждать: «Нехаотические системы столь же типичны, как курица с зубами».

Образование пространственного порядка из беспорядка, сложных пространственных структур в однородной среде и т.п. связывают с явлениями самоорганизации. Что же такое самоорганизация? Будем называть самоорганизацией установление в диссипативной неравновесной среде пространственных структур (они могут эволюционировать во времени), параметры которых определяются свойствами самой среды и слабо зависят от источника неравновесности (энергии, массы и т.д.), начального состояния среды и условий на границах.

Классический пример самоорганизации – появление в подогреваемом снизу слое жидкости ячеек Бенара. Это – структура из шестигранных призматических ячеек, которые возникают из-за «борьбы» неустойчивости и диссипации в среде. В результате конвекции возникает неустойчивость, приводящая к нарастанию возмущений поля скорости и температуры в некотором интервале пространственных масштабов. Затем возникает конкуренция масштабов, что возможно только при наличии диссипации. В результате конкуренции выживает решетка лишь определенного масштаба. Шестигранники образуются в результате синхронизации фаз решеток с разной пространственной ориентацией.

Примеров образования структур много, но все же чрезвычайно интерес к ним связан с проблемами биологии. Вот еще один удивительный пример самоорганизации в ансамбле амебоподобных клеток. Такие клетки примерно один раз в пять минут выделяют гормон цАМФ. Если пищи достаточно, то клетки живут независимо и на этот гормон не откликаются. При недостатке пищи одна из клеток начинает ускоренно выделять гормон цАМФ и синхронизует его выделение у соседей. После возбуждения гормоном клетка начинает двигаться в сторону возбудителя. Возникают два встречных движения – расходящиеся волны гормона и сходящееся движение клеток. Клетки агрегируются, появляются споры, которые выживают в жестких условиях. Явления самоорганизации даже в рамках данного выше определения весьма разнообразны: волны горения, волны популяций, импульсы в нервных волокнах, спиральные волны (ревербераторы) в сердечной ткани, волны депрессии в тканях мозга и сетчатке глаза и т.д. Но все это разнообразие, как и в случае простых колебаний и волн, может быть описано в рамках небольшого числа единых моделей.

Мы попытались предварительно определить ключевые понятия теории колебаний и волн и нелинейной динамики как части этой теории. Надеемся, что читатель заметил, как эти понятия входят в разные естественные науки, говорящие, по Мандельштаму, на своем национальном языке. Поэтому, следуя опять же Мандельштаму, можем утверждать, что теория колебаний и волн – интернациональный язык науки, более того, идея колебательно-волновой общности кажущихся непохожими явлений самой различной природы составляет сущность современного научного мировоззрения. Как в одной книге одновременно изложить и классические результаты (в частности, линейную теорию колебаний и волн) и познакомить читателя с современной теорией (основами нелинейной динамики)? Попытаемся следовать Л.И. Мандельштаму, который писал следующее. «Обычно, излагая тот или иной предмет, мы стараемся дать конкретный материал, дать соответствующий математический аппарат, научить пользоваться этим аппаратом. С другой стороны, в оптике нас интересуют специфические оптические вопросы, в акустике – акустические и т.д. В результате получается разрозненность, за деревьями не видно леса. Это, конечно, естественно. Художник-специалист изучает на картине, как надо класть краски, как работать кистью и т.п. Но, для того чтобы получить общее впечатление, надо отойти от картины. Детали при этом теряются, но зато приобретается нечто другое. Мы видим тогда, как входят понятия в мировоззрение физика»<sup>8</sup>.

<sup>8</sup> Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. С. 402.

По-видимому, для гуманитария не менее важно овладеть понятиями современной картины мира, чем для физика. Один из выдающихся людей нашего времени Ю.М. Лотман, наверное, первым из гуманитариев грамотно использовал термин «бифуркация» в своей работе «Клио на распутье»<sup>9</sup>, ссылаясь на определение И.Р. Пригожина<sup>10</sup>. Он пишет, что в истории «...противоборствуют механизмы возрастания энтропии и, следовательно, растущего ограничения выбора, сведения альтернативных ситуаций к информационному нулю, с одной стороны. – и постоянного увеличения «перекрестков», альтернатив, моментов выбора пути, моментов, когда нельзя предсказать дальнейшее развитие – с другой. Здесь вступают в действие интеллект и личность человека, осуществляющего выбор. Это «минуты роковые», по Тютчеву, или моменты бифуркации, по Пригожину... История – не однолинейный процесс, а многофакторный поток. Когда достигается точка бифуркации, движение как бы останавливается в раздумье над выбором пути... В этот момент в историческом процессе в действие вступают интеллектуальные способности человека, дающие ему возможность осуществлять выбор»<sup>11</sup>. Уже упоминавшаяся статья Эрвина Ласло «Век бифуркации» появится только в 1991 году (а на русском языке в 1995).

Что ж, воспользуемся советом Л.И. Мандельштама и отойдем от картины, чтобы получить общее впечатление, а иногда будем подходить к ней, чтобы изучить детали.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> . . . . .	5
<b>Введение</b> . . . . .	9
<b>Глава 1. Анализ размерности, оценки, два маятника</b> . . . . .	18

*Основные положения теории размерности и подобия. Знаменитые задачи П.Л. Катицы и его задача № 24 об определении периода колебаний математического маятника. Задача о колебаниях маятника для астрофизики – проблема пульсации звезд. Еще одна оценка периода колебаний математического маятника и другие задачи. Правило Уилера*

<b>Глава 2. Линейные колебания</b> . . . . .	36
--	----

*Галилео Галилей и понятие изохронности колебаний. Решение Гюйгенса задачи о колебаниях маятника. Джон Уильям Рэлей (Стретт) и его «Теория звука». Еще примеры маятников (осцилляторов): груз на пружине, акустический резонатор Гельмгольца, колебательный контур с затуханием, объемный резонатор для электронных приборов и микроволновой печи и ... четыре задачи. Периодическая химическая реакция – «химический маятник». Линейные колебания в популяционной модели «хищник – жертва» – «экологический маятник». «Экономический маятник» – линейные колебания в простой модели экономики. Линейный осциллятор – основная модель линейной теории колебаний. Свойства линейных систем. Квантовый осциллятор. Что такое динамическая система? Понятие о фазовом пространстве. Фазовый портрет линейного осциллятора. Атрактор и репеллер*

<sup>9</sup> Лотман Ю.М.. Избранные статьи. Том I. Таллинн: «Александра». 1992. С.469.

<sup>10</sup> Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. М.: «Прогресс», 1986. С.236–237.

<sup>11</sup> Обратите внимание на полную корреляцию сказанного с приведенным выше четверостишием А. Кушнера.

**Глава 3. Резонанс** . . . . . 66

*Резонанс в гармоническом осцилляторе. Аналитическое решение, демонстрирующее неограниченный рост амплитуды в гармоническом осцилляторе при резонансном внешнем воздействии, – «месть идеализации». Что дает введение затухания? Шагают солдаты по мостам и книжным страницам. Линейный осциллятор под действием периодической силы. Резонатор Гельмгольца и... домовая, колдун, глиняные или бронзовые сосуды в античном театре. Тяжелый колокол. «Поющий камень». Осциллятор атмосфера Земли и другие глобальные резонансы. 100 – долларовая идея братьев Варриан и Хансена – пример использования резонанса в микроволновой электронике и... просто интересная история*

**Глава 4. Связанные колебания** . . . . . 90

*Свободные колебания двух связанных осцилляторов. Две одинаковые массы, подвешенные на двух идентичных пружинах и соединенные третьей пружиной. Нормальные координаты и нормальные частоты. Биения. Парциальные частоты. Связанность. Возбуждение двух связанных осцилляторов внешней силой. Теорема взаимности и успокоители колебаний*

**Глава 5. Голубое небо и Нобелевская премия по физике за 1930 год** . . . 104

*Леонард Эйлер: «Я покажу Вашему высочеству, что причину синевы неба должно искать...» Формула Рэлея – опять анализ размерностей. И вновь линейный осциллятор. Л.И. Мандельштам, М. Смолуховский, А. Эйнштейн: «Объяснение Рэлея неправильно, но формула верна». Л.И. Мандельштам: «Оказалось, что существует тесная связь между теорией теплоемкости и теорией рассеяния света». Раман в гостях у Мандельштама: «Я счастлив, что нахожусь в лаборатории, где открыт раман-эффект»*

**Глава 6. Линейные волны** . . . . . 126

*Струна, нагруженная одинаковыми телами, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга. Волновое уравнение. Что же такое волна? Несколько определений. Об истории коронации одной русской царицы. Еще определения. Что можно сказать о свойствах волны? Волны на воде – опять анализ размерностей. Фазовая скорость. М.А.Миллер: «Все движения суть волны, но некоторые движения «волновее» других». Природа дисперсии. Групповая скорость. Пространственный резонанс. Два примера – два открытия архитектора в микроволновой электронике. Рудольф Компфнер: «...так и быть, – пусть поле движется вместе с электронами» (пример первый). Карсинотрон – «чужие следы на песке» (пример второй)*

**Глава 7. Нелинейные колебания** . . . . . 178

*«Нелинейность» – эссе Ю.А.Данилова, лучше которого не написать. Нелинейный осциллятор – основная модель нелинейной теории колебаний. Чуть-чуть о нелинейном резонансе и динамической стохастичности. Автоколебания. Христиан Гюйгенс и часы. Ван-дер-Поль, Андронов и ламповый генератор. Магнетрон спасает Великобританию от гитлеровской авиации (почти по Чарльзу Сноу). Мазеры и гиротрон. Солдаты опять идут по мосту – фазовая группировка нелинейных осцилляторов*

**Глава 8. Нелинейные волны** . . . . . 228

*Поток невзаимодействующих частиц и нелинейные волны. Что такое простая волна. Волны в автомобильном потоке. Ударные волны. Что*

такое ударная волна? Гром, землетрясения, извержение вулканов, падение метеоритов. Сильный точечный взрыв в атмосфере и ядерное оружие (опять анализ размерностей). Звуковой удар. Об ударных волнах в космосе. Стационарные ударные волны. Уединенные волны – солитоны

**Глава 9. Хаос и структуры . . . . . 256**

*Как возникает случайность в динамической системе. С чего все началось – модель Лоренца. Сценарии перехода к хаосу. Универсальность перехода к хаосу по Фейгенбауму. Развитая вихревая турбулентность: спектр Колмогорова – Обухова (опять теория размерности). Уравнение вязкой жидкости (уравнение Навье – Стокса) и одномерное отображение. Сценарий Фейгенбаума? Другие сценарии возникновения хаоса: перемежаемость, разрушение квазипериодических колебаний. Топологическая размерность и размерность Хаусдорфа – Безиковича. Фракталы. Образование структур и самоорганизация. Классификация, определения, примеры. Немного о распределенных автоколебательных системах. Структуры Гюринга. Брюсселятор. Реакция Белоусова – Жаботинского и резонатор. Ячейки Бенара. Вихри Тейлора в течениях Куэтта. Автоволновые процессы и системы. Уединенный фронт. Бегущий фронт и бегущий импульс. Аксиоматическая модель активной среды. Ревербератор – спиральная волна. Ведущий центр – источник концентрически расходящихся волн. Клеточные автоматы. Игра «Жизнь»*

**Глава 10. Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику, социальные науки и медицину . . . . . 326**

*Модели развития и взаимодействия в экологии (модель Мальтуса и ее обобщение Ферхюльстом). Феномен логистического уравнения (оно описывает эволюцию популяции в экологии, в эволюцию научной продукции, деятельность «Красных бригад» в Италии, развитие готического стиля в архитектуре и др.). Детерминированный хаос в экологических моделях. Модель «хищник – жертва – пища». Циклы Кондратьева в экономике. Модели Гудвина циклов капиталистической экономики. Математическая модель сосуществования производителей и управленцев. Нелинейные модели Вайдлиха и их применение к экономическим и социальным задачам. Взаимодействие народа и правительства, перестройка по Горбачеву. Взаимодействие старой и новой отраслей промышленности. Эволюция модного ресторана. Хаос и структуры в социально-экономических моделях. Развитие системы образования в условиях конкуренции. Формирование общественного мнения. Эволюционирующий рынок. Математическая модель роста народонаселения мира. Теория эпидемий. Простые эпидемии. Общий случай эпидемии. Повторяющиеся эпидемии. Динамические болезни. О пользе дыхания Чейна – Стокса*

**Иллюстрированное приложение . . . . . 381**