



ДИНАМИКА УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ СТУПЕНЧАТОГО ТИПА

Д.С. Кащенко, А. Могель, В. Шварц

В настоящей работе аналитическими и численно-аналитическими методами исследуется нелокальная динамика важных для приложений классов дифференциальных уравнений первого порядка с нелинейной запаздывающей обратной связью ступенчатого типа. Подход, основанный на асимптотическом анализе, позволил проанализировать аттракторы, состоящие из решений импульсного типа. Получены численные характеристики нерегулярных колебаний и прослежена их зависимость от величины запаздывания.

1. Введение

Дифференциальные уравнения с запаздыванием служат математическими моделями огромного числа прикладных задач. Обзор соответствующей литературы имеется, например, в работах [1–6] и в приведенных в них библиографиях. Большое число статей посвящено изучению динамических свойств решений таких уравнений. Здесь, прежде всего, следует выделить цикл работ, посвященных численному и экспоненциальному исследованию генераторов с запаздывающей обратной связью [2,3,7–11], где показано, что в таких генераторах могут возникать мощные хаотические колебания в широком диапазоне параметров.

Весь богатый арсенал аналитических методов изучения динамики систем обыкновенных дифференциальных уравнений переносится, конечно, и на системы с запаздыванием. Кроме этого, для систем с запаздыванием характерно наличие многих специфических эффектов и явлений, обусловленных бесконечномерностью фазового пространства. Так, например, в работах [12–15] предложен специальный асимптотический метод изучения нелокального поведения решений важных классов сингулярно возмущенных систем с запаздыванием. Этот метод позволил редуцировать задачу о динамике исходной системы к задаче о динамике аналитически конструируемых конечномерных отображений.

Особое внимание во многих работах было уделено изучению скалярных дифференциально-разностных уравнений первого порядка вида

$$\dot{x} + x = f(x(t-T)), \quad (1.1)$$

где $T > 0$ – время запаздывания. Уравнения такого типа возникают, например, в лазерной оптике [16–19], электротехнике [10,11,20,21], радиофизике [2,3],

медицине [22–23], математической экологии [24] и др. Наиболее распространенными нелинейными функциями являются функции вида

$$f(s) = as(1+s^\mu)^{-1}, \quad (1.2)$$

$$f(s) = Ms \exp(-(s-\gamma)^2), \quad (1.3)$$

$$f(s) = \begin{cases} 1, & a \leq s \leq b, \\ 0, & s < a \text{ и } s > b, \quad 0 \leq a < b \leq 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Для нелинейностей первых двух типов были проведены достаточно полные численные и экспериментальные исследования динамики при различных значениях фигурирующих в них параметров, и получены достаточно полные представления об изменении динамических свойств при варьировании тех или иных параметров задачи. Нелинейность последнего из приведенных типов (рис. 1) довольно просто реализуется в задачах электротехники [3,10,11].

Следует сразу оговорить, что одним из центральных вопросов является исследование динамики уравнения (1.1) при достаточно больших значениях запаздывания T . С одной стороны, большие (порядка 10^2 – 10^5) значения T относительно просто реализуются в эксперименте, но, с другой стороны, при этом резко возрастают трудности численного анализа уравнения. Отметим, что после нормирующей замены времени $t \rightarrow Tt$ уравнение (1.1) становится сингулярно возмущенным

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)), \quad (1.5)$$

где $\varepsilon = T^{-1}$. Для изучения асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ решений этого уравнения с заданными начальными условиями на конечном отрезке изменения времени применимы методы теории сингулярных возмущений [25]. Однако в задачах динамики, то есть при изучении решений для $t \rightarrow \infty$, редко удается получить «близкие» результаты для решений (1.5) и решений вырожденного уравнения

$$x = f(x(t-1)).$$

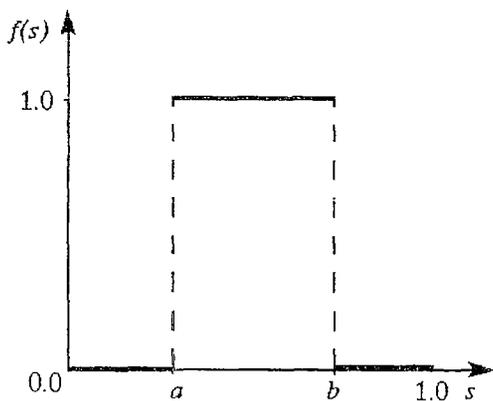


Рис. 1

Некоторые выводы о причинах этого несоответствия и об условиях, когда такое соответствие имеет место, приведены в [4,26].

Настоящая работа посвящена изучению уравнения (1.1) в случае «ступенчатой» нелинейности (1.4). При этом особое внимание будет уделено не только численному, но и аналитическому изучению динамических свойств решений при условии, когда параметр T достаточно велик. Сразу отметим, что в этом случае удалось получить ряд результатов, не имеющих аналогов для уравнения с нелинейностями (1.2) и (1.3).

Третий раздел посвящен асимптотическому анализу уравнения с нелинейностью ступенчатого типа и

изучению устойчивых и долгоживущих структур. В четвертом разделе уделено внимание изучению численных характеристик аттракторов уравнения со ступенчатой нелинейностью.

2. Динамика уравнения (1.1) с релейной запаздывающей обратной связью

Сделаем вначале замечание о динамике уравнения (1.1) с нелинейной функцией $f(s)$ релейного типа (то есть при $a=0$)

$$f(s) = \begin{cases} 1, & s < b, \\ 0, & s \geq b, \end{cases} \quad 0 < b < 1. \quad (2.1)$$

В [27,28] было показано, что данное уравнение имеет единственный экспоненциально орбитально устойчивый медленно осциллирующий цикл $x_0(t)$ такой, что расстояние между соседними корнями уравнения $x_0(t)=b$ больше, чем T , тогда как неустойчивых периодических режимов имеется бесконечно много. При некоторых условиях (типа невырожденности) каждое решение стремится к циклу $x_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Однако в зависимости от степени сложности начального условия, соответствующее решение демонстрирует сложное поведение в течение отрезка времени, которое экспоненциально возрастает с увеличением запаздывания.

3. Динамика уравнения (1.1) со ступенчатой нелинейной обратной связью. Асимптотический анализ

В этом разделе асимптотическими методами исследуются динамические свойства решений уравнения (1.1) в случае, когда нелинейность $f(x)$ имеет ступенчатый вид (1.4). В первых двух пунктах приведены базирующиеся на результатах работ [29–32] утверждения о существовании устойчивого цикла при условии, когда либо параметры a и b достаточно малы, либо параметр b близок к 1. Основное содержание настоящего раздела заключено в третьем пункте, где рассмотрен вопрос о динамике уравнения (1.1) при условии, когда запаздывание T достаточно велико. В четвертом пункте говорится о возможности обобщения этих результатов на более сложные случаи, а в последнем – пятом – пункте этого раздела, имеющем важное прикладное значение, сформулированы выводы о существовании широкого множества «долгоживущих» структурных образований из решений рассматриваемого уравнения. Соответствующие результаты опираются на предложенные в [12–15] специальные методы большого параметра для сингулярно возмущенных уравнений с запаздыванием.

3.1. Асимптотика релаксационного цикла уравнения (1.1) при малых значениях параметров a и b . Пусть в формуле (1.4) параметры a и b являются достаточно малыми:

$$b = \varepsilon b_1, \quad a = \varepsilon a_1,$$

где $b_1 > a_1 \geq 0$ и $0 < \varepsilon \ll 0$.

При этих условиях рассмотрим вопрос о существовании, асимптотике при $\varepsilon \rightarrow 0$ и устойчивости периодических решений уравнения (1.1).

В уравнении (1.1) удобно произвести замену $x = \varepsilon y$, в результате которой приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \dot{y} + y &= \varepsilon^{-1} \Phi(y(t-T)), \\ \Phi(s) &= \begin{cases} 1, & \text{при } a_1 \leq s \leq b_1, \\ 0, & \text{при } 0 \leq s < a_1 \text{ и } b_1 < s \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Обозначим через C_0 множество начальных функций

$$C_0 = \{\varphi(s) \in C_{[-T,0]}, \varphi(0) = b_1, b_1 < \varphi(s) \leq 1 \text{ при } s \in [-T,0)\}.$$

Пусть $y(t)$ – решение (3.1) с начальной функцией из C_0 (это решение не зависит от выбора конкретного элемента из C_0). При $t \in [0, T]$ имеем равенство

$$y(t) = b_1 \exp(-t),$$

а при $t \in (T, 2T]$

$$y(t) = b_1 \exp(-t) + \varepsilon^{-1} \alpha(t),$$

где $\alpha(t) = \int_0^{t-T} \exp(-(t-s-T)) \Phi(b_1 \exp(-s)) ds$.

Легко видеть, что при $t \in (2T, t_0(\varepsilon))$ верна формула

$$y(t) = \varepsilon^{-1} [\alpha(T) \exp(-(t-s-T)) + O(\varepsilon)],$$

а $t_0(\varepsilon)$ определяется как первый при $t > 2T$ корень уравнения $y(t) = b_1$, а значит имеет место равенство

$$t_0(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) [1 + O(|\ln \varepsilon|^{-1})].$$

В силу того, что $y(t_0(\varepsilon) + s) \in C_0$ ($s \in [-T, 0]$), приходим к выводу, что оператор Пуанкаре $P(\varphi(s)) = y(t_0(\varepsilon) + s)$ имеет неподвижную точку $\varphi_0(s) = b_1 \exp(-s)$, которой отвечает периодическое решение $y(t)$.

Используя полученные для $y(t)$ формулы, можно исследовать устойчивость этого решения. Анализируя линеаризованное на $y(t)$ уравнение, удастся показать, что все мультипликаторы, кроме одного (единичного), по модулю меньше 1. Это означает, что $y(t)$ экспоненциально орбитально устойчиво. Отметим, что параметр a_1 влияет только на амплитуду $\alpha(T)$ периодического решения. Итак, установлено, что имеет место

Теорема 1. При всех достаточно малых значениях параметра ε уравнение (1.1) имеет устойчивое периодическое решение $x_0(t) = \varepsilon y(t)$.

По-видимому, других устойчивых (непостоянных) решений при малых ε уравнения (1.1) нет.

3.2. Периодические решения при условии близости параметра b к 1. Здесь предполагаем, что в формуле (1.4)

$$b = 1 - \varepsilon, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (3.2)$$

Обозначим через $x(t, \varepsilon)$ решение уравнения (1.1) с начальным условием из введенного выше множества C_0 , в котором лишь параметр b_1 следует заменить на b . Изучим поведение $x(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При $t \in [0, T]$ имеем равенство $x(t, \varepsilon) = (1 - \varepsilon) \exp(-t)$. Если выполнено условие

$$\exp(-T) > a, \quad (3.3)$$

то $x(t, \varepsilon)$ является устойчивым периодическим решением уравнений (1.1) и (2.1) ($x(t, \varepsilon) = x_b(t, T)$). Его период $P(T) = -\ln \varepsilon + 2T + \ln(1 - \exp(-T)) + O(\varepsilon)$.

При увеличении параметра a и при нарушении условия (3.3) структура периодического решения усложняется. Соответствующие численные исследования приведены в разделе 4.

3.3. Асимптотика простейших аттракторов уравнения (1.1) при больших значениях запаздывания T . Основное условие, при котором ниже будет исследоваться уравнение (1.1), заключается в том, что параметр T предполагается достаточно большим:

$$T \gg 1. \quad (3.4)$$

Поэтому в уравнении (1.1) удобно сделать нормировку времени $t \rightarrow Tt$, в результате которой приходим к уравнению

$$\varepsilon \dot{x} + x = f(x(t-1)), \quad (3.5)$$

где $\varepsilon = T^{-1} \ll 1$. Обратим внимание, что разностное уравнение

$$x(t) = f(x(t-1)), \quad (3.6)$$

в которое вырождается (3.5) при $\varepsilon=0$, имеет при

$$0 < a < b < 1 \quad (3.7)$$

глобально суперустойчивое нулевое состояние равновесия. Поставим задачу изучения динамики уравнения (3.5) при условиях (3.4) и (3.7). Будет показано, что это уравнение обладает богатой динамикой, а его решения имеют сложную структуру. Отметим еще, что каждое решение уравнения (3.5) при достаточно больших t лежит на отрезке $[0,1]$.

Условимся о терминологии. Соседние моменты времени, когда решение уравнения (3.5) принимает значение $x=a$ с положительной и отрицательной производной, назовем соответственно началом и концом всплеска.

В этом разделе изучим аттракторы уравнения (3.5), состоящие из решений с одним всплеском на некоторых отрезках времени длины 1.

Методика исследования такова: в фазовом пространстве $C_{[-1,0]}$ уравнения (3.5) выделяем некоторое множество $C(z)$, зависящее от параметра z . Затем строим асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ всех решений с начальными условиями из $C(z)$. Далее с помощью некоторого оператора Пуанкаре Π удается показать, что $\Pi C(z) \subset C(\bar{z})$, где \bar{z} зависит только от z : $\bar{z} = \Phi(z)$. Таким образом, динамика решений из $C(z)$ определяется итерациями одномерного отображения $z = \Phi(z)$.

Итак, введем в рассмотрение множество $C(z)$:

$$C(z) = \{ \varphi(s, z) \in C_{[-1,0]} \mid (s \in [-1,0], z > 0) :$$

$$1. a \leq \varphi(s, z) \leq b \text{ при } s \in [-1, -1+\varepsilon z];$$

$$2. a > \varphi(s, z) > 0 \text{ при } s \in (-1+\varepsilon z, 0);$$

$$3. \varphi(-1+\varepsilon z, z) = \varphi(0, z) = a \}.$$

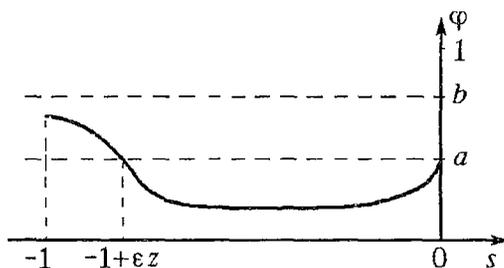
Примерный вид функции $\varphi(s, z)$ приведен на рис. 2.

Через $x(t, z)$ обозначим решение с начальным условием $\varphi(s, z) \in C(z)$. Тем самым, при $t=0$ начинается всплеск функции $x(t, z)$. Отметим еще, что $x(t, z)$ не зависит от выбора конкретной функции из $C(z)$.

Будем последовательно интегрировать уравнение (3.5) для построения решения $x(t, z)$.

При $t \in [0, \varepsilon z]$ получаем, что $x(t, z) = (a-1)\exp(-\varepsilon^{-1}t) + 1$ и $x(\varepsilon z, z) = g(z)$, где $g(z) = (a-1)\exp(-z) + 1$. На отрезке $[\varepsilon z, 1]$ функция $x(t, z)$ монотонно убывает:

$$x(t, z) = g(z)\exp(-(t-\varepsilon z)\varepsilon^{-1}). \quad (3.8)$$



Возможны два случая:

Рис. 2

$$g(z) \leq b \quad (3.9)$$

и

$$g(z) > b. \quad (3.10)$$

Рассмотрим отдельно каждый из них.

1. Пусть сначала выполнено неравенство (3.9). Через εt_1 обозначим первый положительный корень уравнения (момент окончания первого при $t \geq 0$ всплеска)

$$x(t, z) = a. \quad (3.11)$$

Тогда $t_1 = z + \ln g(z) - \ln a$. На отрезке $[1, 1 + \varepsilon t_1]$ функция $x(t, z)$ монотонно растет:

$$x(t, z) = 1 - \exp(-(t-1)\varepsilon^{-1}) + O(\exp(-\varepsilon^{-1})). \quad (3.12)$$

Если $x(1 + \varepsilon t_1, z) < a$, то $x(t, z) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть z_0 – корень уравнения $x(1 + \varepsilon t_1, z) = a$. Тогда

$$z_0 = \ln[(1 - a + a^2)(1 - a)^{-1}].$$

Ниже предполагаем, что

$$z > z_0. \quad (3.13)$$

Тогда $x(1 + \varepsilon t_1, z) > a$, а следовательно, существует первый при $t > 1$ момент $1 + \varepsilon t_0$ начала всплеска функции $x(t, z)$: $x(1 + \varepsilon t_0, z) = a$. Отсюда $t_0 < t_1$ и $t_0 = -\ln(1 - a)$.

Примерный вид функции $x(t, z)$ изображен на рис. 3.

Введем оператор Пуанкаре П:

$$\Pi(\varphi(s, z)) = x(1 + \varepsilon t_0 + s, z) \quad (s \in [-1, 0]). \quad (3.14)$$

Тогда при условиях (3.9) и (3.13) – то есть, при

$$z_0 < z \leq \ln[(1 - a)/(1 - b)] \quad (3.15)$$

выполнено включение

$$\Pi C(z) \subset C(\bar{z}),$$

где с точностью до $O(\exp(-\varepsilon^{-1}))$

$$\bar{z} = t_1 - t_0 = z + \ln[(1 - a)/a] + \ln g(z). \quad (3.16)$$

2. Пусть теперь выполнено условие (3.10), то есть

$$z > \ln[(1 - a)/(1 - b)]. \quad (3.17)$$

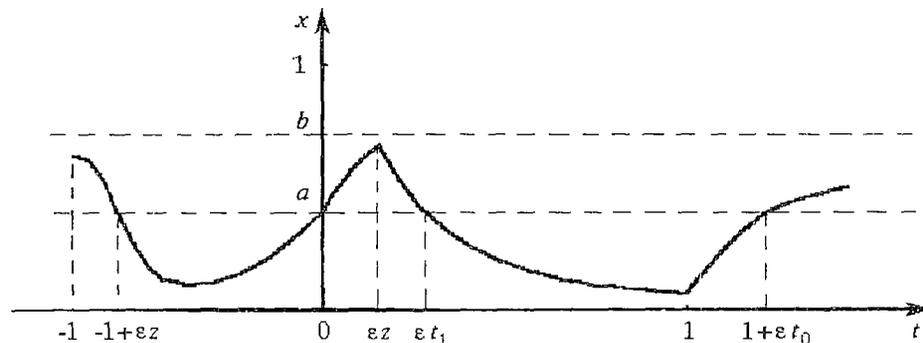


Рис. 3

Тогда $x(\varepsilon t, z) > b$, а значит, существуют два последовательных при $t > 0$ корня εt_1 и εt_2 ($t_1 < t_2$) уравнения $x(\varepsilon t, z) = b$. Из приведенных выше формул получаем равенства

$$t_1 = \ln[(1-a)/(1-b)], \quad t_2 = z + \ln[g(z)/b].$$

Пусть εt_3 – конец всплеска, то есть первый при $t > \varepsilon t_2$ корень уравнения (3.11). Для t_3 верно равенство

$$t_3 = z + \ln[g(z)/a].$$

Далее, при $t \in [\varepsilon t_3, 1]$ верна формула (3.8), а при $t \in [1, 1 + \varepsilon t_1]$ – формула (3.12).

В том случае, когда существует такое $t_0 > 0$, что $x(1 + \varepsilon t_0, z) = a$ и $t_0 < t_2$, оператор П, задаваемый равенством (3.14), выводит функцию $\varphi(s, z)$ из множества $C(z)$ (поскольку для некоторых s имеем $\varphi(s, z) > b$). Поэтому ниже считаем, что $x(1 + \varepsilon t_0, z) < a$ – всплеск при $t \in [1, 1 + \varepsilon t_1]$ не начинается. Это неравенство имеет вид $(1 - \exp(-t_1)) < a$, а значит

$$b < 2a - a^2. \quad (3.18)$$

Тогда $x(1 + \varepsilon t_1, z) = (b-a)(1-a)^{-1} + O(\exp(-\varepsilon^{-1})) < a$. Далее, при $t \in [1 + \varepsilon t_1, 1 + \varepsilon t_2]$ функция $x(t, z)$ убывает и

$$x(1 + \varepsilon t_2, z) = b(b-a)[(1-b)g(z)\exp z]^{-1} + O(\exp(-\varepsilon^{-1})).$$

При $t \in [1 + \varepsilon t_2, 1 + \varepsilon t_3]$ эта функция возрастает. Если $x(1 + \varepsilon t_3, z) < a$, то $x(t, z) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому считаем, что $x(1 + \varepsilon t_3, z) > a$, то есть

$$z < z_1, \quad (3.19)$$

где

$$z_1 = \ln\{1 - a + ab(b-a)[(1-b)(a-b+ab)]^{-1}\}.$$

Отметим, что $z_1 > z_0$. Примерный вид функции $x(t, z)$ изображен на рис. 4.

При условии (3.19) существует первый при $t > 1$ корень $1 + \varepsilon t_0$ уравнения $x(1 + \varepsilon t, z) = a$ (момент начала всплеска) и

$$t_0 = t_2 + \ln[1 - x(1 + \varepsilon t_2, z)] - \ln(1-a).$$

Тем самым, при условиях (3.10), (3.18) и (3.19), то есть при

$$z_0 < z < z_1,$$

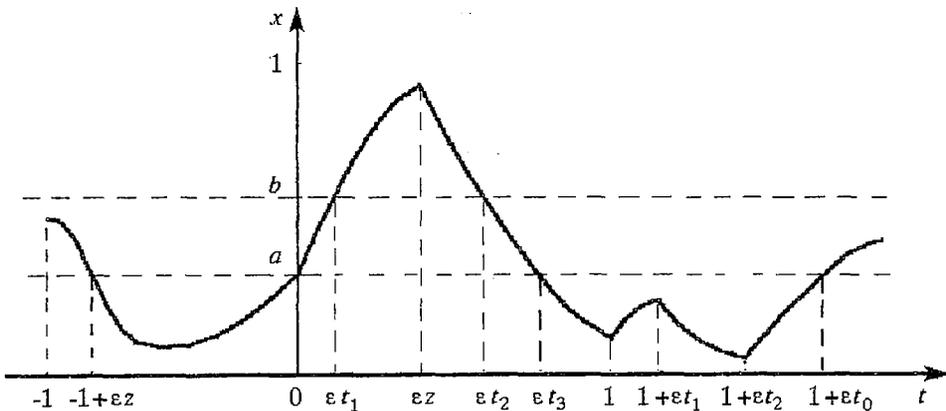


Рис. 4

оператор Π переводит $C(z)$ в $C(\bar{z})$: $\Pi C(z) \in C(\bar{z})$, причем $\bar{z} = t_3 - t_0$. Отсюда с точностью до $O(\exp(-\varepsilon^{-1}))$ получаем зависимость \bar{z} от z

$$\bar{z} = \ln[b(1-a)a^{-1}] - \ln[1-b(b-a)[(1-b)(a-1+\exp z)]^{-1}. \quad (3.20)$$

Объединяя формулы (3.16) и (3.20), получаем отображение

$$\bar{z} = \Phi(z), \quad (3.21)$$

где с точностью до $o(1)$

$$\Phi(z) = \begin{cases} z + \ln[(1-a)a^{-1}] + \ln g(z), & \text{при } z_0 < z \leq \ln[(1-a)/(1-b)], \\ \ln[b(1-a)a^{-1}] - \ln[1-b(b-a)[(1-b)(a-1+\exp z)]^{-1}, & \text{при } \ln[(1-a)/(1-b)] < z < z_1. \end{cases}$$

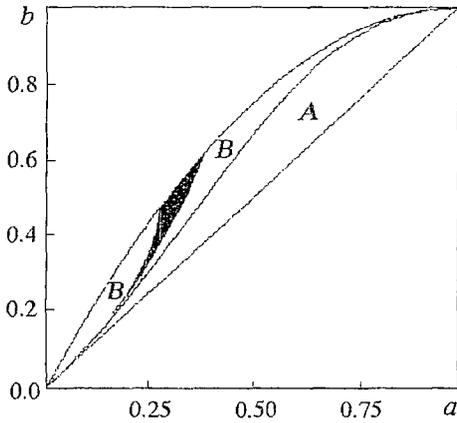


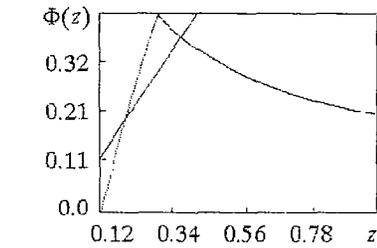
Рис. 5

Отметим, что в плоскости параметров a и b существует область (на рис. 5 она выделена черным цветом), в которой отображение (3.21) имеет аттрактор – устойчивое ненулевое состояние равновесия. Аналитически она описывается системой неравенств

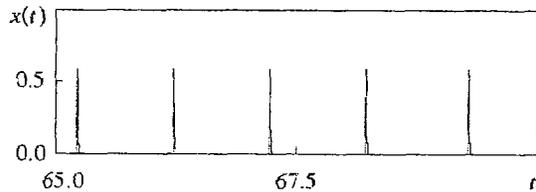
$$\begin{cases} 1-a+ab(b-a)[(1-b)(a-b+ab)]^{-1} < 0, \\ b < 2a - a^2. \end{cases}$$

В этой области уравнение (3.5) имеет аттрактор, динамика которого описывается одномерным отображением (3.21). На рис. 6, а приведен характерный график функции $\Phi(z)$ для $a=0.3$, $b=0.48$, а на рис. 6, б – график решения $x(t)$ при $T=1000$.

В областях A и B (см. рис. 5), границей которых является кривая $b=a(1-a+a^2)^{-1}$, отображение аттрактора не имеет, а отличаются области тем, что в A выполнено неравенство $z_0 > \ln[(1-a)/(1-b)]$, и, следовательно, функция $\Phi(z)$ состоит только из одной части, а в области B выполнено неравенство $z_0 < \ln[(1-a)/(1-b)]$, и $\Phi(z)$ состоит из двух частей.



а



б

Рис. 6

3.4. Решения с двумя всплесками на некотором отрезке длины 1.

Приведенная выше методика позволяет исследовать решения более сложной структуры. Здесь коротко остановимся на решениях с двумя всплесками. Центральным моментом является выделение соответствующего множества начальных условий. Для этого введем в рассмотрение множество начальных функций $C(z) \in C_{[-1,0]}$, зависящее от векторного параметра $z = (z_1, z_2, z_3)$, причем $0 < z_1 \leq z_2 \leq z_3$ и

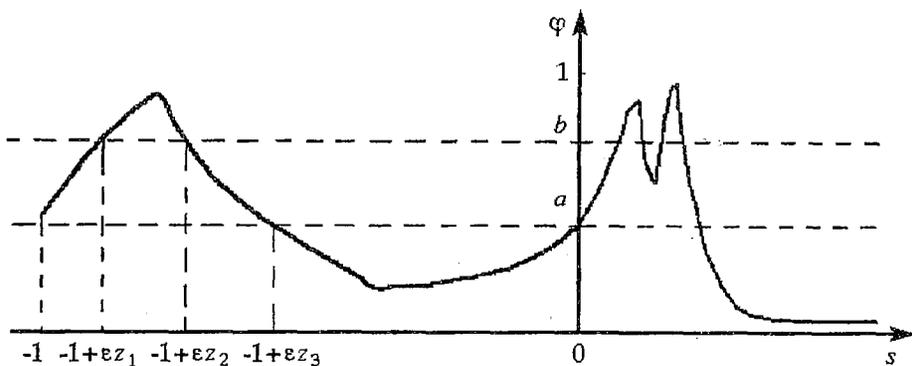


Рис. 7

$$C(z) = \{ \varphi(s, z) \in C_{[-1, 0]}, \text{ для которых} \\
\begin{aligned}
1^0. & a \leq \varphi(s, z) \leq b \text{ при } s \in [-1, -1 + \varepsilon z_1]; \\
2^0. & b \leq \varphi(s, z) \leq 1 \text{ при } s \in [-1 + \varepsilon z_1, -1 + \varepsilon z_2]; \\
3^0. & a \leq \varphi(s, z) \leq b \text{ при } s \in [-1 + \varepsilon z_2, -1 + \varepsilon z_3]; \\
4^0. & 0 \leq \varphi(s, z) \leq a \text{ при } s \in [-1 + \varepsilon z_3, 0]; \\
5^0. & \varphi(0, z) = a.
\end{aligned}$$

Примерный вид функции $\varphi(s, z)$ приведен на рис. 7.

Через $x(t, z)$ обозначим решение уравнения (3.5) с начальными условиями $\varphi(s, z) \in C(z)$. Действуя, как в пункте 3.3, удастся аналитическими методами получить трехмерное отображение в пространстве параметров z_1, z_2, z_3 . Динамика этого отображения описывает итерации соответствующего оператора Пуанкаре, а значит, определяет поведение решений уравнения (3.5) с начальными условиями $\varphi(s, z) \in C(z)$. Формулы этого трехмерного отображения довольно громоздки, поэтому их здесь приводить не будем. Отметим, что область существования аттрактора трехмерного отображения шире, чем соответствующая область для отображения (3.21).

3.5. Долгоживущие структуры. Обобщим конструкцию решений из пункта 3.3. Рассмотрим решения, имеющие произвольное число $k > 0$ всплесков на некоторых отрезках длины 1 и обладающие тем свойством, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ расстояние между всплесками имеет порядок $O(1)$.

Сначала фиксируем произвольно значение $\tau \in (-1, 0)$ и два положительных числа z_1 и z_2 . Рассмотрим множество $C(\tau, z)$ начальных функций $\varphi(s, \tau, z) \in C_{[-1, 0]}$, для которых

1. $\varphi(s, \tau, z) = \varphi(-1 + \varepsilon z_1, \tau, z) = \varphi(\tau + \varepsilon z_2, \tau, z) = \varphi(0) = a$,
2. $\varphi(s, \tau, z) < a$ при $s \in (-1 + \varepsilon z_1, \tau) \cup (\tau + \varepsilon z_2, 0)$,
3. $\varphi(s, \tau, z) > a$ при $s \in [-1, -1 + \varepsilon z_1) \cup (\tau, \tau + \varepsilon z_2)$.

Для $t > 0$ изучим асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $x(t, \tau, z)$ уравнения (3.5) с начальным условием $x(t, \tau, z) = \varphi(s, \tau, z)$ ($s \in [-1, 0]$). Через t_1, t_2, \dots обозначим последовательные положительные корни уравнения $x(t, \tau, z) = a$. При тех же ограничениях на числа z_1 и z_2 , что и на число z из пункта 3.3, удастся показать, что оператор Пуанкаре

$$\Pi(\varphi(s, \tau, z)) = x(t_4 + s, \tau, z)$$

действует из $C(\tau, z)$ в $C(\bar{\tau}, \bar{z})$. Значения $\bar{\tau}$ и \bar{z} с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$ задаются формулами

$$\bar{\tau} = \tau, \quad \bar{z}_1 = \Phi(z_1), \quad \bar{z}_2 = \Phi(z_2), \quad (3.22)$$

где функция $\Phi(z)$ та же, что и в формуле (3.21). Важно отметить, что отображение (3.22) не является грубым. Таким образом, нельзя сделать вывод о существовании у уравнения (3.5) аттрактора, структура решений из которого при всех достаточно больших t определяется этим отображением. Тем не менее, можно утверждать, что в течение асимптотически большого при $(\varepsilon \rightarrow 0)$ промежутка времени соответствующие характеристики решений из $C(\tau, z)$, где значения z_1 и z_2 принадлежат аттрактору отображения (3.21), изменяются согласно формулам (3.22). Ясно, что те же самые рассуждения можно повторить и в более общем случае. Для этого фиксируем произвольно два набора чисел τ_j : $-1 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k < \tau_{k+1} = 0$ и $z_j > 0$ ($j=0, 1, \dots, k$). Рассмотрим множество $C(\tau, z)$ начальных функций $\varphi(s, \tau, z) \in C_{[-1, 0]}$, для которых

1. $\varphi(\tau_j, \tau, z) = a$ ($j=0, 1, \dots, k+1$), $\varphi(\tau_j + \varepsilon z_j, \tau, z) = a$ ($j=0, 1, \dots, k$),
2. $\varphi(s, \tau, z) < a$ при $s \in (\tau_j + \varepsilon z_j, \tau_{j+1})$ ($j=0, 1, \dots, k$),
3. $\varphi(s, \tau, z) > a$ при $s \in (\tau_j, \tau_j + \varepsilon z_j)$ ($j=0, 1, \dots, k$).

И здесь при каждой итерации соответствующего оператора Пуанкаре с точностью до $O(\varepsilon)$ величины z_j при ограничениях пункта 3.3 меняются независимо друг от друга, а величины τ_j не меняются. Негрубость возникающего здесь отображения не дает возможности установить наличие аттрактора, поскольку погрешности из-за отбрасывания асимптотически малых величин могут накапливаться. Но можно, конечно, сделать вывод о существовании соответствующих «долгоживущих» структур,

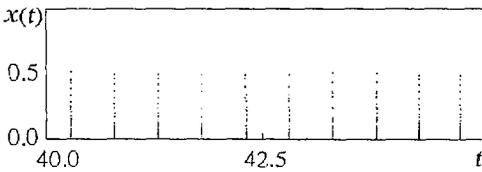


Рис. 8

время «жизни» которых тем дольше, чем меньше ε . Отметим, что такие же структуры возникают и в более сложных ситуациях. Например, при тиражировании на участки отрезка $[-1, 0]$ аттрактора, состоящего из решений с двумя и более всплесками на отрезке длины 1 (рис. 8).

4. Численные характеристики аттракторов уравнения со ступенчатой нелинейностью

Настоящий раздел посвящен численному исследованию уравнения (1.1) с нелинейностью (1.4). Это уравнение, как было показано выше, обладает богатой динамикой. При одних и тех же значениях параметров a и b может существовать, в зависимости от времени запаздывания, как устойчивый цикл, так и хаотический аттрактор (рис. 9).

Изучение последнего представляет особый интерес. В пунктах 4.2–4.4 приведены результаты расчета основных численных характеристик решений уравнения (1.1), а также прослежена их зависимость от времени запаздывания.

Численная характеристика, исследуемая в первом пункте этого раздела, весьма специфична и, как оказалось, информативна именно для рассматриваемой ступенчатой нелинейности. Возможно, она представляет наибольший интерес для анализа колебательных свойств решений уравнения (1.1).

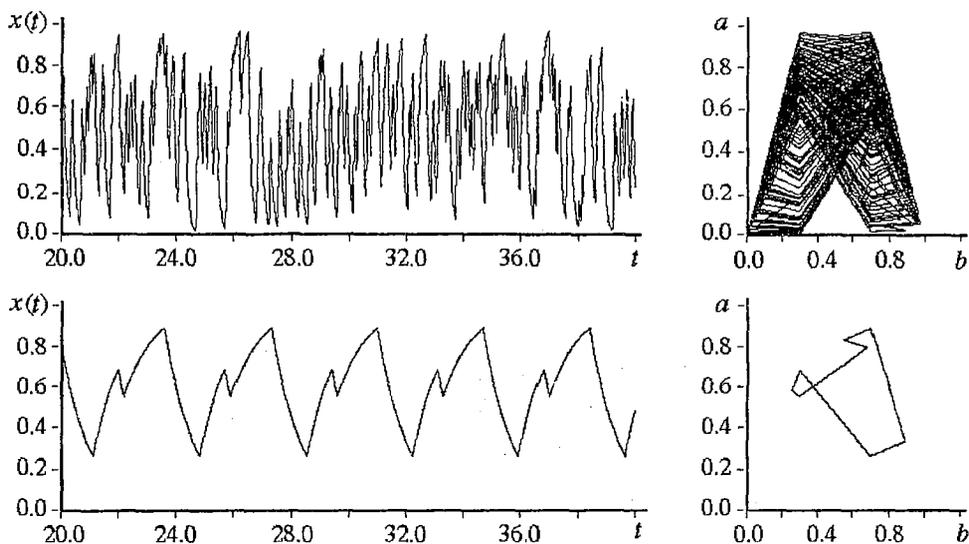


Рис. 9

4.1. Распределение точек пересечения решением прямых $x=a$ и $x=b$.

Фиксируем произвольно неотрицательную начальную функцию $\varphi(s) \in C_{[-1,0]}$, и рассмотрим при $t > 0$ такое решение $x(t)$ уравнения (3.5) с нелинейностью (1.4), что $x(s) = \varphi(s)$ при $s \in [-1, 0]$. В том случае, когда количество положительных корней уравнения

$$x(t) = a \quad (4.1)$$

при $t > 1$ конечно, функция $x(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Этот случай интереса не представляет. Поэтому будем изучать лишь те решения (3.5), у которых количество корней уравнения (4.1) при $t > 1$ неограниченно. В силу автономности уравнения (3.5) удобно считать, что для таких решений $\varphi(0) = x(0) = a$. Выше уже отмечалось, что относительно начальной функции $\varphi(s)$ нужно знать лишь то, на каких участках значения ее лежат в промежутке от a до b . Тем самым, вся необходимая для построения решения $x(t)$ информация о $\varphi(s)$ заключена в корнях уравнений $\varphi(s) = a$ и $\varphi(s) = b$ ($s \in [-1, 0]$). Это обстоятельство является базовым для определения важной численной характеристики решений $S = S(T, a, b)$ ($T = \varepsilon^{-1}$). Для ее определения рассмотрим пронумерованные в общем порядке возрастания корни уравнения (4.1) и уравнения

$$x(t) = b, \quad (4.2)$$

начиная от корня t_0 уравнения (4.1): $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$. Количество этих корней на каждом из отрезков $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$ ($k = k_0, k_0+1, k_0+2, \dots$; $t_{k_0-1} > 0$) длины 1 обозначим через S_k . Отметим, что совокупность таких корней на любом из отрезков Δ_k дает полную информацию о поведении решения $x(t)$ при $t > t_k$. В связи с этим естественно в качестве численной характеристики $x(t)$ принять значение

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{k \geq n} S_k. \quad (4.3)$$

Кроме этого, введем еще два числа S_{\min} и S_{med} , близкие по смыслу к S :

$$S_{\min} = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{k \geq n} S_k, \quad S_{\text{med}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n/t_n. \quad (4.4)$$

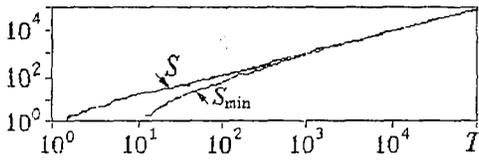


Рис. 10

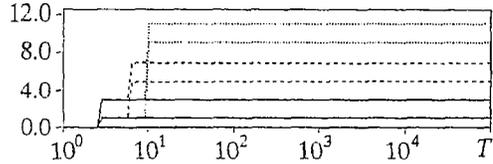


Рис. 11

Отметим, что

$$S_{\min} \leq S_{\text{med}} \leq S.$$

Покажем сначала, что S можно интерпретировать как размерность вложения. Для этого фиксируем отрезок Δ_k , и пусть t_{k-j} ($j=0,1,\dots,p_k$) – все корни уравнений (4.1) и (4.2), лежащие на промежутке Δ_k . Через $\delta_k=(\delta_{k1},\dots,\delta_{kp_k})$ обозначим p_k -мерный вектор, координаты которого определяются формулой $\delta_{kj}=t_{k-j+1}-t_{k-j}$. Тем самым задание p_k -мерного вектора δ_k ($\delta_{kj} \in [0,1]$, $\sum_{k=1}^p \delta_{kj} < 1$) однозначно определяет решение $x(t)$ при $t > t_k$, а значит, и саму последовательность t_n ($n=k+1, k+2, \dots$). Все числа p_k при достаточно больших номерах k мажорируются числом S . Тем самым, любой набор $\delta_k=(\delta_{k1}, \dots, \delta_{kp_k})$ из S чисел δ_{kj} определяет структуру решения $x(t)$. Можно показать, что для некоторой вектор-функции $\Phi(\delta)$

$$\delta_{k+1} = \Phi(\delta_k). \quad (4.5)$$

Выше было показано, что уравнение (3.5) может иметь аттракторы различной структуры. Характеристику S можно еще интерпретировать как меру структурной сложности решений. Чем больше S , тем более сложный вид имеет соответствующее решение.

Из результатов третьего раздела следует, что при малых ϵ уравнение (3.5) может иметь большое число аттракторов (явление мультистабильности). Важно, однако, отметить, что из результатов численного анализа вытекает, что область притяжения выше у того аттрактора, у которого больше значение S . Графики зависимости величин S_{\min} и S от времени запаздывания T при $a=0.3$, $b=0.48$ приведены на рис. 10 при начальных условиях, равных константе, и на рис. 11 – при специальным образом выбранных (см. пункты 3.3–3.5) начальных условиях:

сплошная линия – начальная функция равна 1 на отрезке длины $10^{-5}T$, а в остальных точках полуинтервала $[-T, 0)$ равна нулю;

штриховая линия – начальная функция равна 1 на двух отрезках длины $10^{-5}T$, а в остальных точках полуинтервала $[-T, 0)$ равна нулю;

пунктирная линия – начальная функция равна 1 на трех отрезках длины $10^{-5}T$, а в остальных точках полуинтервала $[-T, 0)$ равна нулю.

4.2. О сценарии перехода к хаосу. В работе [3] исследовалась аналогичная (1.1) система с нелинейностью

$$F(s) = M \exp(-(s-\gamma)^2),$$

где M – коэффициент усиления, γ – параметр асимметрии. Авторы установили, что при малых T наблюдалось несколько режимов регулярных колебаний с периодом, несколько превышающим $2T$. Характеры изменения этих режимов с увеличением T были сходными и отличались лишь механизмами потери устойчивости регулярных колебаний. Наблюдались три последовательности бифуркаций, приводящие систему к хаотическому режиму: последовательность, включающая как минимум одну-две бифуркации удвоения периода колебаний; последовательность бифуркаций, приводящая к топологическим изменениям в структуре регулярных колебаний и заканчивающаяся переходом к хаосу через

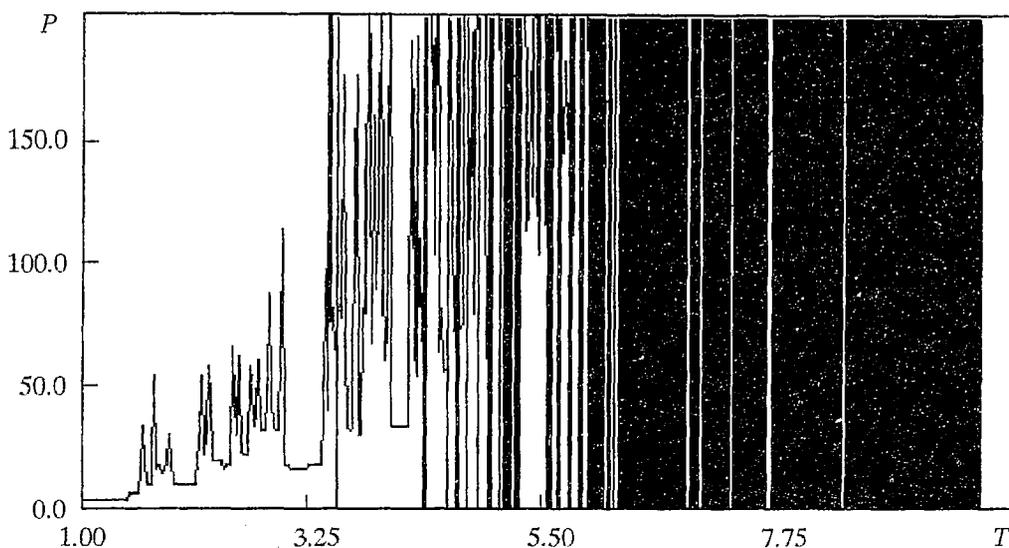


Рис. 12

переменяемость «регулярный режим – хаос»; жесткий переход к хаосу в результате единственной бифуркации.

Рассмотрим здесь вопрос о том, как изменяется структура решения уравнения при увеличении времени запаздывания T (при фиксированных значениях a и b). На рис. 12 приведен график зависимости периода решения P от T при $a=0.3$, $b=0.7$. Данный рисунок дает весьма наглядное представление о том, что сценарий перехода от регулярного поведения к хаосу достаточно сложен. Действительно, в начале при малых T происходит ряд как прямых, так и обратных бифуркаций добавления периода. Далее же, учитывая, что сплошные вертикальные линии соответствуют неперiodическим решениям, можно сделать вывод о том, что при увеличении T имеет место явление перемежаемости типа «цикл–хаос». Все эти заключения находят подтверждение при исследовании корреляционной размерности и старшего ляпуновского показателя.

4.3. Корреляционная размерность. Оценка корреляционной размерности системы производилась по корреляционному показателю ν , который вычислялся стандартными методами [33]. На рис. 13 представлен график зависимости ν от времени запаздывания T с шагом 0.2 при выборке $N=20000$, $a=0.3$, $b=0.7$. При небольших значениях T уравнение (1.1) имеет устойчивый цикл, здесь корреляционный показатель ν близок к 1. С увеличением запаздывания в системе возникает хаотический аттрактор, и наблюдается почти линейный рост ν . При достижении величины ν значения, приблизительно равного 6, происходит «насыщение», и рост корреляционного показателя прекращается при дальнейшем увеличении T . Однако методика расчетов такова, что если получается оценка, превышающая 4–5, то к такому результату следует относиться осторожно и не считать его истиной в последней инстанции.

4.4. Старший ляпуновский показатель. Вычисления производились по следующей схеме. Решение возмущалось в одной точке на достаточно малую величину, после чего производилось вычисление исходного и

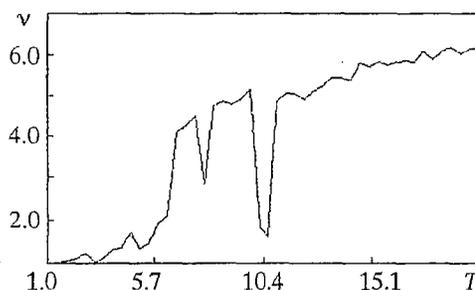


Рис. 13

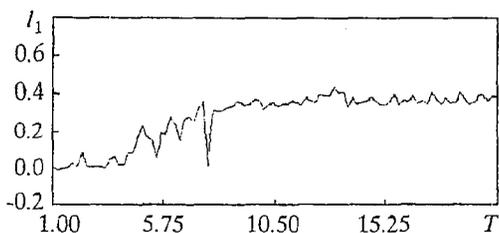


Рис. 14

возмущенного решений на некотором отрезке времени (определяемом стандартными критериями). Данная процедура повторялась несколько раз с целью достижения стабилизации результатов. График зависимости старшего ляпуновского показателя l_1 от T представлен на рис. 14 при $a=0.3$, $b=0.7$. При малых значениях T в системе (1.1) устойчив предельный цикл и, как следствие,

величина l_1 близка к нулю. При увеличении запаздывания до 10 величина l_1 растет приблизительно до 0.4 и при T , больших 10, прекращает рост.

Заключение

В этом разделе сделаем несколько замечаний о сопоставлении поведения решений уравнения (1.1) с нелинейностями (1.2)–(1.4), тем более, что чисто визуально эти нелинейности весьма похожи. Сначала остановимся на некоторых общих моментах, которые имеют место для каждой из рассматриваемых нелинейностей.

Во-первых, при относительно небольших значениях запаздывания T динамика довольно простая. Она допускает исследование аналитическими методами. Следует, конечно, обратить внимание на то, что в случае нелинейности (1.4) всегда асимптотически устойчивым является нулевое состояние равновесия.

Во-вторых, одни и те же асимптотические методы [30–32] дают одинаковые и эффективные результаты (о существовании и асимптотике устойчивого цикла) при условии, когда в случае (1.2)–(1.3) параметры M или γ достаточно велики, а в случае нелинейности (1.4) аналог соответствующей ситуации выделяется условием достаточной малости параметров a и b .

В-третьих, при определенных a и b для нелинейности (1.4) наблюдаются похожие структурные изменения решений. Кроме того получены довольно близкие к [3, 22] результаты по зависимости корреляционной размерности и старшего ляпуновского показателя от величины запаздывания T .

Отметим основные отличительные черты поведения решений в случаях нелинейности (1.2)–(1.3) и (1.4):

- если для (1.2)–(1.3) бифуркационные явления при изменении параметров основаны на бифуркациях удвоения, то в случае (1.4) более характерны бифуркации добавления периода, рассмотренные для непрерывных кусочно–линейных отображений в [34] и для разрывных кусочно–линейных отображений в [35];

- случай (1.4) отличает развитое явление мультистабильности, существование разноплановых аттракторов и долгоживущих структур. Интересно, что при определенных a и b оказалось возможным аналитическое исследование сложной динамики при $T \rightarrow \infty$;

- для нелинейности (1.4) могут быть весьма информативны специальные численные характеристики. Так, важную роль в задаче о динамике уравнения с кусочно–постоянной нелинейностью играет исследуемая в разделе 4 величина S .

Проект поддержан Российским фондом фундаментальных исследований № 97–01–00399.

Библиографический список

1. Хэйл Дж. Теория функционально–дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1984.
2. Ланда П.С. Автоколебания в распределенных системах. М.: Наука, 1983.

3. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
4. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1981.
5. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
6. *Горяченко В.Д., Капустин А.Д.* Прикладные задачи устойчивости систем с запаздыванием. Горький, 1988.
7. *Кузнецов С.П.* Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью: обзор // Изв. вузов. Радиофизика. 1982. Т. 25, № 12. С. 1410.
8. *Кац В.А.* Возникновение и эволюция хаоса в распределенном генераторе с запаздыванием // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 2. С. 161.
9. *Ланда П.С., Перминов С.М., Шаталова Г.Г., Дамгов В.Н.* Стохастические автоколебания в генераторе с дополнительной запаздывающей обратной связью // РЭ. 1986. Т. 31, № 4. С. 730.
10. *Kilias T., Kutzer K., Moegel A., Schwarz W.* Electronic chaos generators – design and applications // Int. J. of Electronics. 1995. November. Vol. 79, № 6. P. 737.
11. *Kilias T., Moegel A., Schwarz W.* Generation and application of broadband signals using chaotic electronic systems // Bifurcation and Chaos: Theory and Application. Akademie Verlag, 1995.
12. *Кащенко С.А.* Исследование методами большого параметра системы нелинейных дифференциально–разностных уравнений, моделирующих задачу хищник–жертва // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 4.
13. *Кащенко С.А.* Пространственно неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией // Матем. моделирование. 1990. Т. 2, № 9. С. 29.
14. *Grigorieva E.V., Kaschenko S.A.* Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback // Bifurcations and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6.
15. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А.* Установившиеся автоколебания в лазерах с запаздывающей обратной связью // ЖЭТФ. 1994. Т. 106, вып. 1 (7).
16. *Gibbs H.M., Hopf F.A., Kaplan D.L., Shoemaker R.L.* Observation of chaos in optical bistability // Phys. Rev. Lett. 1981. Vol. 46, № 7. P. 474.
17. *Ikeda K.* Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system // Opt. Comm. 1979. Vol. 30, № 2. P. 257.
18. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45, № 9. P. 709.
19. *Ikeda K., Kondo K., Akimoto O.* Successive higher-harmonic bifurcations in systems with delayed feedback // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49, № 20. P. 1467.
20. *Moegel A., Schwarz W., Kaschenko S.* Analysis and simulation principles for chaotic systems containing delay elements // NDES'96. Seville, Spain, 1996.
21. *Kaschenko S., Moegel A., Schwarz W.* Analysis of chaotic dynamics of first order equation with piecewise constant delaying feedback // Proc. of 6th Int. Specialist Work-shop Nonlinear Dynamics of Electronics Systems. Budapest, July 16–18, 1998. P. 165.
22. *Mackey M.C., Glass L.* Oscillation and chaos in physiological control systems // Science. 1977. Vol. 197, № 4300. P. 287.
23. *Марчук Г.И., Петров Р.В.* Математическая модель противовирусного иммунного ответа // Препринт № 10. Москва: Отдел вычислит. математики АН СССР, 1981.
24. *Горяченко В.Д.* Исследование динамики численности отдельной популяции с учетом последействия: краткий обзор // Нелинейные колебания и экология. Ярославль: ЯрГУ, 1984. С. 66.
25. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973
26. *Кащенко С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально–разностных уравнений с малым множителем при производной // Диф. уравнения. 1989. Т. 25, № 8.

27. *Кащенко Д.С.* Синхронизация в системе из двух связанных автогенераторов первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1997. Т. 5, № 2,3, С. 100.

28. *Кащенко Д.С.* Динамика автогенератора первого порядка с релейной запаздывающей обратной связью // Современные проблемы математики и информатики: Сб. науч. тр. Ярославль, 1997. С.105.

29. *Кащенко С.А.* Асимптотический анализ динамики системы из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 3. С. 307.

30. *Дмитриев А.С., Кащенко С.А.* Асимптотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью // Докл. РАН. 1993. Т. 328, № 2. С. 134.

31. *Кащенко С.А.* Асимптотика релаксационных колебаний в дифференциально-разностных системах с финитной нелинейностью. I // Диф.уравнения. 1995. № 8.

32. *Кащенко С.А.* Асимптотика релаксационных колебаний дифференциально-разностных системах с финитной нелинейностью. II // Диф.уравнения. 1995. № 10.

33. *Потапов А.Б.* Программы вычисления корреляционного показателя и оценки обобщенной энтропии по временному ряду. Препринт № 27. Москва: ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1991. 31 с.

34. *Maistrenko Yu.L., Maistrenko V.L., Chua L.O.* Cycles of chaotic intervals in a time-delayed chua's circuit//Int. J. of Bif. and Chaos. 1993. Vol. 3, № 6. P. 1557.

35. *Kaschenko D.S.* Dynamics of the simplest piecewise linear discontinuous mappings // Proc. of 5th Int. Specialist Workshop Nonlinear Dynamics of Electronics Systems. Moscow, Russia, June 26-27, 1997. P. 458.

Ярославский государственный
университет
Дрезденский технический
университет

Поступила в редакцию 16.12.98

DYNAMICS OF FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH NONLINEAR STEP-LIKE DELAYED FEEDBACK

D.S. Kaschenko, A. Moegel, W. Schwarz

We investigate important for applications classes of first order differential equations with nonlinear step-like delayed feedback. Analytical and numeric-analytical methods have been used to study the nonlocal dynamics of such equations. An approach based on asymptotical analysis made possible to study attractors consisting of solutions of impulse type. Numerical characteristics of nonregular oscillations have been obtained and their dependence on delay time have been described.



Кащенко Дмитрий Сергеевич – родился в 1974 году. Окончил Ярославский госуниверситет (1997), аспирант Ярославского госуниверситета. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ хаотических колебаний и их применение в области передачи информации.



Могель Андреас – доктор Дрезденского технического университета. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ хаотических колебаний и их применение в области передачи информации.



Шварц Вольфганг – профессор Дрезденского технического университета. Область научных интересов: нелинейная динамика, анализ хаотических колебаний и их применение в области передачи информации.