



## ЭНТРОПИЯ ФИЛЬТРОВАННЫХ ХАОТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ\*

*Е.Л. Козленко*

При прохождении через линейные инерционные системы (фильтры) хаотические сигналы искажаются, что отражается на оценках их характеристик. Одной из таких характеристик, используемой обычно в качестве меры сложности различных процессов, является энтропия. Настоящая работа посвящена проблемам оценки энтропии хаотических реализаций, прошедших через линейные фильтры. Посредством численного моделирования исследованы системы, содержащие генераторы хаотических колебаний и линейные фильтры первого порядка и высокого порядка.

### Введение

Развитие методов количественной оценки сложности колебаний динамической природы — одна из центральных проблем в области диагностики динамических систем по экспериментальным данным. Особую актуальность эта задача приобретает в случае, когда динамическая система неизвестна, а для анализа доступна временная реализация одной переменной состояния. В такой ситуации стало традиционным восстановление аттрактора системы методом временных задержек [1] и определение характеристик по восстановленному множеству. Среди различных количественных характеристик наиболее распространены фрактальная размерность, спектр ляпуновских характеристических показателей и энтропия. При определении этих характеристик по восстановленному множеству исследователь может столкнуться с рядом трудностей. В частности, данные могут быть предварительно обработаны, что может привести к изменению восстановленного множества, а значит наложить отпечаток на определяемые характеристики. Например, экспериментально полученные данные часто фильтруют, чтобы избавиться от шума. Если фильтр линейный, он не приводит к появлению новых частотных компонент, а значит, в принципе не может усложнить сигнал. В то же время известен ряд работ, где показывается, что хаотические колебания, прошедшие через линейные фильтры, искажаются, их восстановленные аттракторы усложняются, а фрактальная размерность возрастает (см., например, [2–4]), что может привести к ошибочным суждениям относительно сложности исследуемого процесса.

Наряду с размерностью широко используется такая характеристика, как энтропия. В настоящей работе рассматривается проблема оценки энтропии по скалярной временной реализации в применении к хаотическим сигналам, прошедшим через линейные фильтры. Попутно используются известные результаты по преобразованию размерности при фильтрации вследствие тесной связи этих характеристик.

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 99–02–16016)

## 1. Теоретические замечания и экспериментальные факты

Интерес к фильтрации хаотических колебаний пробудился, когда было обнаружено, что даже простейший фильтр низких частот приводит к завышенным оценкам фрактальной размерности [2]. К тому времени размерность уже прижилась как инструмент, с помощью которого можно оценить сложность аттрактора, а значит, и сложность самих колебаний. В такой ситуации необходимо либо допустить, что линейное преобразование может усложнить колебания (что вызывает недоумение), либо усомниться в способности размерности адекватно оценивать сложность по крайней мере в отдельных исключительных случаях.

С другой стороны, в теории информации известна такая характеристика случайных процессов, как энтропия (впоследствии она была распространена на динамические системы). Существует множество статистических (вероятностных) подходов к определению энтропии, но качественно энтропия является мерой средней непредсказуемости (неопределенности) информационной последовательности. Для периодических и квазипериодических сигналов энтропия равна нулю – полная предсказуемость, для шума бесконечности – полная непредсказуемость, для хаотических колебаний – энтропия есть конечное положительное число. Чем больше энтропия, тем сложнее, то есть ближе к шуму, сигнал.

Отсюда ясно, что энтропия может быть использована для оценки сложности колебаний, порождаемых динамической системой.

Из теории информации известна следующая теорема [5]:

**Определение.** Пусть  $x$  – случайная величина. Тогда  $f(x)$  – невырожденное преобразование, если существует обратное преобразование  $f^{-1}(f(x))=x$  и может быть установлено взаимно однозначное соответствие между  $x$  и  $f(x)$ .

**Теорема.** Пусть  $x$  – случайная величина,  $H(x)$  – энтропия  $x$ ,  $f(x)$  – невырожденное преобразование. Тогда  $H(x)=H(f(x))$ .

Очевидно, линейный фильтр является невырожденным преобразованием (всегда существует обратное преобразование) и, следовательно, энтропия сигнала при фильтрации должна оставаться неизменной. Кроме того интуитивно понятно, что линейная система не добавляет и не уничтожает информацию, содержащуюся в сигнале, а значит не должна усложнить сигнал. В то же время, как уже упоминалось ранее, данные по линейной фильтрации хаотических колебаний свидетельствуют об усложнении аттрактора и об увеличении его фрактальной размерности [7–9], которая часто используется как мера сложности колебаний [6]. Возможно ли разрешить это противоречие?

## 2. Восстановление аттрактора динамической системы по временной реализации. Методика определения корреляционной размерности и энтропии

При исследовании динамических систем, особенно экспериментальном, зачастую складывается ситуация, когда для анализа доступна единственная переменная состояния. В таких случаях обычно осуществляется восстановление аттрактора динамической системы методом временных задержек [1].

Допустим имеется временная реализация исследуемого процесса, представленная в виде дискретизованной последовательности  $\{x(t_k)\}_{k=1}^{N_0}$ . Здесь  $t_k$  – дискретное время:  $t_k=kt_s$ , где  $k=1, \dots, N_0$ ,  $t_s$  – шаг дискретизации, то есть расстояние во времени между соседними отсчетами,  $N_0$  – число элементов последовательности. Реконструированный аттрактор в  $n$ -мерном псевдофазовом пространстве задается последовательностью векторов состояний

$$x_k = \mathbf{x}(t_k) = \{x(t_k), x(t_k + \tau), \dots, x(t_k + \tau(n-1))\}, \quad (1)$$

где  $\tau$  – время восстановления в шагах дискретизации (целое число),  $k=1, \dots, N$ ,  $N$  – число точек аттрактора. Нетрудно видеть, что  $N=N_0-\tau(n-1)$ .

Теорема, доказанная Такенсом, утверждает, что восстановленный таким образом аттрактор топологически эквивалентен истинному аттрактору динамической системы. Отсюда следует, что характеристики, определяемые по восстановленному множеству, должны совпадать с характеристиками, определяемыми по полному потоку (аттрактору в истинном фазовом пространстве).

Из всех количественных характеристик следует выделить размерность и энтропию как наиболее распространенные. В настоящее время наибольшее развитие получил метод расчета корреляционной размерности и энтропии, предложенный Грассбергером и Прокаччиа [10]. В его основе лежит понятие корреляционного интеграла, который математически строго определяется выражением

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=1}^N (1/N) \sum_{j=1}^N \Theta(\epsilon - \|x_i - x_j\|), \quad (2)$$

где  $N$  – число точек аттрактора,  $\epsilon$  – пространственный масштаб или масштаб наблюдения [11],  $\Theta$  – функция Хэвисайда ( $\Theta(x)=0$ , если  $x < 0$ ;  $\Theta(x)=1$ , если  $x \geq 0$ ),  $\|x_i - x_j\|$  – расстояние между точками аттрактора  $x_i$  и  $x_j$ , определяемое в соответствии с какой-либо нормой. В данной работе будет использоваться так называемая максимальная норма

$$\|x_i - x_j\| = \max_{k=0, \dots, n-1} |x(t_i + \tau k) - x(t_j + \tau k)|. \quad (3)$$

Запись (3) означает, что в качестве расстояния между точками в псевдофазовом пространстве размерности  $n$  выбирается максимальное из покоординатных расстояний.

Разумеется, классическая форма корреляционного интеграла (2) непригодна для практического использования. Во-первых, предел  $N \rightarrow \infty$  физически недостижим, а во-вторых, расчет всех расстояний между точками аттрактора требует значительного времени, если  $N$  достаточно велико. Поэтому обычно используется метод «редуцированного корреляционного интеграла». При этом  $M$  точек выбираются опорными и определяются расстояния от каждой из них до всех остальных  $N$  точек аттрактора, то есть можно записать

$$C(\epsilon) \approx (1/M) \sum_{i=1}^M (1/N) \sum_{j=1}^N \Theta(\epsilon - \|x_i - x_j\|). \quad (4)$$

Строго говоря, такой подход применим только для однородных аттракторов, но практика показывает, что для выбранных модельных систем он вполне оправдан.

Корреляционная размерность  $D_c$  определяется как угол наклона корреляционной функции  $C(\epsilon)$ , представленной в двойных логарифмических координатах ( $\log C(\epsilon)$ ,  $\log \epsilon$ ) при достаточно малых  $\epsilon$  (теоретически при  $\epsilon \rightarrow 0$ ). Такой подход справедлив только в случае, когда корреляционный интеграл ведет себя как показательная функция, то есть  $C(\epsilon) = \epsilon^D$ , где  $D$  и будет искомым размерностью.

В случае, когда упомянутое соотношение подобия не выполняется, стало принятым определять размерность по локальным наклонам корреляционного интеграла и представлять как функцию масштаба наблюдения [11]

$$D_c(\epsilon) = [\log(C(\epsilon)/C(\epsilon + \delta))]/\log(\epsilon/(\epsilon + \delta)). \quad (5)$$

Аргумент функции размерности – пространственный масштаб  $\epsilon$  – обычно безразмерная величина, нормированная на максимальный размер аттрактора  $\epsilon_{\max}$ , но более удобно перейти к масштабу наблюдения, выраженному в децибелах [11]

$$E = 20 \log_{10}(\epsilon/\epsilon_{\max}). \quad (6)$$

На практике достоверные значения размерности лежат в некотором эффективном диапазоне  $[E_{\min}, E_{\max}]$ , ограниченном со стороны больших  $E$  областью краевых эффектов, а со стороны малых  $E$  областью существенного недостатка точек для корректного определения размерности.

Для определения корреляционной энтропии  $K_c$  необходимо получить серию корреляционных интегралов для различных размерностей пространства вложения. Для заданного разрешения  $\epsilon^*$  и размерности вложения  $n$  энтропия находится из соотношения

$$K_c(\epsilon^*, n) = [1/(nt_s \tau)] \ln(C_n^2(\epsilon^*)/C_{n+1}^2(\epsilon^*)). \quad (7)$$

При выводе значений энтропии лучше вместо размерности вложения использовать величину, называемую окном восстановления  $w=tn$ , тогда значения энтропии, полученные для различных  $\tau$  и  $n$ , ложатся приблизительно на одну кривую. Для отображений эти величины совпадают, так как  $\tau=1$ .

Энтропия как число определяется на основе анализа асимптотического поведения функции  $K_c(\epsilon^*, n)$  при больших реально достижимых  $n$ . Для хаотических сигналов энтропия должна испытывать насыщение, то есть стремиться к некоторому положительному числу. Отсутствие такого поведения свидетельствует скорее всего о недостатке точек аттрактора для корректной оценки корреляционного интеграла. Для неоднородных аттракторов кривые, полученные для разных уровней разрешения, будут отличаться, и тогда результаты необходимо представлять в виде зависимости асимптотического значения энтропии от масштаба наблюдения. Отметим также, что уровень разрешения  $\epsilon^*$  (или  $E^*$ , дБ) необходимо задавать в эффективном диапазоне масштабов наблюдения.

### 3. Информационная (блочная) энтропия

Энтропия, о которой пойдет речь, более популярна в области структурного анализа информационных последовательностей, нежели, чем в нелинейной динамике. Понятие «информационная» энтропия связано с шенноновскими представлениями об информации и такая энтропия является характеристикой произвольной информационной последовательности. В тоже время этот метод, в отличие от корреляционного, значительно нагляднее отражает физический смысл энтропии как меры непредсказуемости состояния системы во времени. Поэтому одной из задач работы было установление соответствия между двумя методами и придание наглядного смысла корреляционной энтропии.

Поясним смысл понятия «блочная энтропия». Методика определения блочной энтропии (см., например, [12]) достаточно проста. Допустим имеется

последовательность данных  $\{x_k\}_{k=1}^N$ , где величина  $x_k$  принимает дискретные значения в диапазоне  $[0, q-1]$ , где  $q$  – целое число, определяющее количество уровней квантования. Каждый элемент из этого набора данных еще называют символом. Далее производится группировка символов в слова (блоки) длины  $n$  ( $n$ -words) и для всех различных слов подсчитывается вероятность, с которой они встречаются в данной последовательности. Формирование слов проводится со сдвигом на один символ, поэтому такие слова называют перекрывающимися (overlapping words). При этом два слова считаются одинаковыми, если они посимвольно совпадают. Если  $P_i^{(n)}$  – вероятность появления  $i$ -го слова длины  $n$ , то величина

$$H_n = - \sum_i P_i^{(n)} \ln P_i^{(n)} \quad (8)$$

будет определять среднее количество информации, содержащееся в словах длины  $n$ . Следует отметить, что логарифм может быть любой, но в данной работе везде будет рассматриваться натуральный логарифм. Суммирование проводится по так называемым эффективным словам (effective words), то есть словам, реально встретившимся в последовательности. Вероятность  $P_i^{(n)}$  на практике аппроксимируется относительной частотой появления  $f_i$

$$P_i^{(n)} \approx f_i = k_i / N_w, \quad (9)$$

где  $k_i$  – число появлений  $i$ -го слова,  $N_w$  – всего слов в последовательности.

Величина

$$h_n = H_{n+1} - H_n \quad (10)$$

называется *дифференциальной блочной энтропией* (differential  $n$ -word entropy) и характеризует среднюю неопределенность встречи символа  $n+1$ , если известны  $n$  предыдущих.

Предел

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \quad (11)$$

носит название *энтропия источника*.

Величина  $h_n$  ограничена значением  $\ln q$  сверху и нулем снизу. Это означает, что энтропия любого источника будет лежать в этом диапазоне, а именно: для периодических последовательностей  $h=0$ , для белого шума  $h=\ln q$ , для сложных динамических процессов  $0 < h < \ln q$ . Логично предположить, что чем больше значение энтропии, тем сложнее (ближе к шумовому) сигнал.

Отсюда видно, что динамическую систему можно рассматривать как источник информации и использовать блочную энтропию как количественную характеристику сложности колебаний.

Можно показать, что в случае определения блочной энтропии по скалярной временной реализации процесс формирования слов длины  $n$  аналогичен восстановлению траектории в псевдофазовом пространстве размерности  $n$ . Количество уровней квантования  $q$  определяет размер ячейки, на которые будет разбито псевдофазовое пространство, что также соответствует масштабу наблюдения (уровню разрешения аттрактора) в алгоритме корреляционной энтропии. Остается вопрос относительно постоянной времени восстановления. Нетрудно видеть, что случай, когда символы набираются в слово подряд, соответствует восстановлению с  $\tau=1$ . Такое время восстановления характерно в основном для каскадов (отображений). В случае непрерывных во времени сигналов (потоков) необходимо набирать символы в слова не подряд, а через интервалы в соответствии с величиной  $\tau$ , которая, как правило, определяется шагом дискретизации.

#### 4. Фильтр первого порядка

Исследование преобразования энтропии хаотических сигналов при фильтрации разумно начать с рассмотрения простейших фильтров, например, простейшего фильтра низких частот первого порядка и типичных генераторов хаотических колебаний.

В качестве дискретной во времени системы (каскада) возьмем отображение Хенона [14], дополненное цифровым фильтром низких частот,

$$\begin{aligned} x_n &= 1 - \lambda x_{n-1}^2 + y_{n-1}, \\ y_n &= b x_{n-1}, \\ z_n &= \alpha z_{n-1} + (1-\alpha)x_n, \end{aligned} \quad (12)$$

в качестве потока – систему Ресслера [14] с простейшим потоковым фильтром низких частот

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + z, \\ \dot{y} &= x + e y, \\ \dot{z} &= f - \mu z + x z, \\ \dot{v} &= -\eta v + \eta x. \end{aligned} \quad (13)$$

Механизм усложнения хаотического аттрактора в таких фильтрах подробно

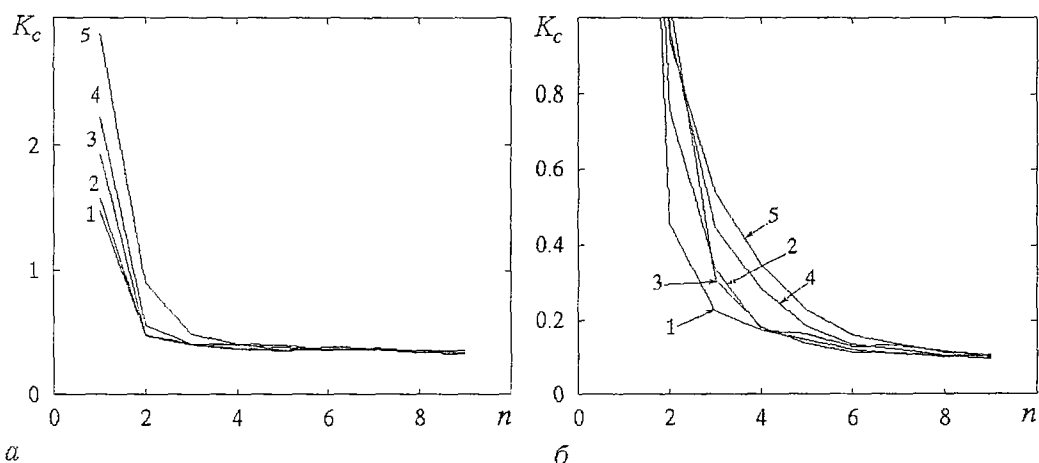


Рис. 1. Графики зависимости  $K_c(n)$ , построенные *а* – для каскада (отображение Хенона + ФНЧ первого порядка) при различных значениях частоты среза  $\alpha$ : 1 – 0, 2 – 0.1, 3 – 0.3, 4 – 0.5, 5 – 0.8; *б* – для потока (система Ресслера + ФНЧ первого порядка) при  $\eta$ , равном: 1 –  $\infty$ , 2 – 1.0, 3 – 0.5, 4 – 0.1, 5 – 0.05. Параметры для первой системы:  $N=10^5$ ,  $M=10^4$ ,  $\tau=1$ ,  $t_s=1$ ,  $E^*=-42$  дБ; для второй системы:  $N=10^5$ ,  $M=10^4$ ,  $\tau=25$ ,  $t_s=0.04$ ,  $E^*=-42$  дБ

изучен [7–9]. Он связан с тем, что фрактальная структура, заложенная в хаотическом сигнале, «раскрывается» фильтром в новом направлении (измерении) и в итоге образуется новая, более сложная фрактальная структура, в связи с чем и возрастает размерность. При этом чем меньше частота среза фильтра, определяемая коэффициентами  $\alpha$  и  $\eta$ , тем сильнее возрастает размерность. В случае фильтров первого порядка размерность увеличивается на единицу (в случае фильтров высокого порядка на величину, равную порядку фильтра) [8]. Любопытно, что аналогичные работы по энтропии просто отсутствуют и было бы неплохо восполнить этот пробел.

Рассмотрим, каким образом изменение частоты среза фильтра низких частот влияет на энтропию хаотического сигнала, используя вначале алгоритм корреляционной энтропии, рассмотренный в разделе 2.

Серия зависимостей  $K_c(n)$ , построенных при различных частотах среза фильтров, представлена для системы (12) на рис. 1, *а*. и для системы (13) на рис. 1, *б*.

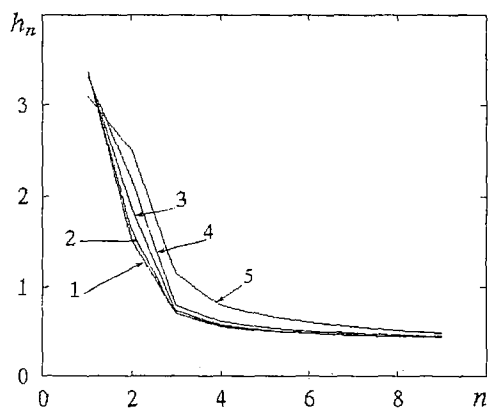


Рис. 2. Графики зависимости информационной энтропии  $h_n$  для каскада (отображение Хенона + ФНЧ первого порядка) при различных значениях частоты среза фильтра  $\alpha$ : 1 – 0, 2 – 0.1, 3 – 0.3, 4 – 0.5, 5 – 0.8. Параметры:  $N=10^6$ ,  $q=32$  (соответствует  $E^*=-30$  дБ)

Налицо идентичное поведение кривых в случае дискретных и непрерывных во времени хаотических сигналов. Во-первых, наблюдается увеличение (скачок) энтропии в области малых размерностей вложения, причем величина скачка обратно пропорциональна частоте среза фильтра. Во-вторых, для всех кривых характерно асимптотическое стремление к значению энтропии нефильтрованного сигнала по мере увеличения размерности вложения. Такое поведение связано с «недовложением» аттрактора фильтрованного сигнала, например в случае, когда размерность вложения меньше, чем размерность аттрактора. Такое недовложение в свою очередь связано с тем, что размерность аттрактора фильтрованных хаотических колебаний возросла и аттрактору становится «тесно» в рамках пространства прежней размерности.

В случае больших частот среза (слабая фильтрация) отмечается резкое приближение к значению энтропии нефильтрованного сигнала начиная с  $n=3$  для отображения Хенона и  $n=4$  для системы Ресслера. В случае сильной фильтрации характерно плавное спадание, которое может быть связано с тем, что характер преобразования фрактальной структуры становится более сложным.

Аналогичные (качественно похожие) результаты получаются и для информационной энтропии. Результаты для системы (12) приведены на рис. 2.

## 5. Фильтры высокого порядка

К исследованию преобразования энтропии в фильтрах высокого порядка разумно подойти так, как это было сделано в работе [8]. А именно, представим фильтр порядка  $p$  в виде цепочки из  $p$  фильтров первого порядка и будем следить за изменением характеристик хаотических колебаний последовательно по мере их прохождения через цепочку. В работе [8] на примере логистического отображения качественно было показано, как изменяется аттрактор в такой системе.

На основании анализа внешнего вида аттрактора и сечений Пуанкаре было установлено, что предельное повышение размерности аттрактора ограничено порядком фильтра, а стремление к предельному значению размерности определяется коэффициентами фильтра. Другими словами, фильтр создает потенциальную возможность для «раскрытия» фрактальной структуры, заложенной в хаотическом сигнале, в новых направлениях, число которых определяется порядком фильтра.

Возрастание размерности означает увеличение угла наклона корреляционного интеграла, полученного в случае достаточной размерности вложения  $n^*$ . Если размерность вложения будет меньше, чем  $n^*$ , то реализуется так называемая ситуация «недовложения» аттрактора, которая приводит к пересечению траекторий и как следствие к неверной оценке размерности. Ясно, что оцениваемая размерность множества при недовложении будет стремиться снизу к значению размерности вложения, а значит, будет приблизительно одинакова для разных множеств.

Таким образом, если при недовложении корреляционный интеграл останется неизменным, а при достаточном вложении увеличит наклон, то расстояния между корреляционными интегралами в области  $n < n^*$  неизбежно увеличатся, что и отражается в завышенных оценках энтропии. Насколько будет завышена энтропия, определяется коэффициентами фильтра, так же как и в случае фильтра первого порядка. Начиная с  $n^*$  (при обеспечении достаточного вложения) энтропия стремится к «нефильтрованному» значению.

Проиллюстрируем вышеописанные эффекты на примере динамических систем, рассмотренных в разделе 4, с добавленными к ним цепочками фильтров первого порядка. Рассмотрим систему, состоящую из отображения Хенона и цепочки рекурсивных цифровых фильтров первого порядка вида (12). На рис. 3, а представлена серия графиков зависимостей  $K_c(n)$ , построенных для нефильтрованного сигнала и сигналов на выходе первого, второго и третьего фильтров (для всех фильтров цепочки  $\alpha=0.8$ , что соответствует достаточно сильной фильтрации). Заметно, что увеличение порядка фильтра приводит к сдвигу области сходимости в сторону больших значений размерности пространства вложения. С добавлением каждого фильтра график сдвигается приблизительно на единицу, что отражает предельное увеличение размерности аттрактора [8], а значит, и необходимой размерности вложения на единицу в случае фильтра первого порядка. Качественно похожее поведение кривых  $K_c(n)$  наблюдается и в случае потоковой системы, состоящей из системы Ресслера и цепочки фильтров первого порядка (рис. 3, б). Перепутывание кривых при малых значениях  $n$  (наблюдаемое, например, на рис. 2 и рис. 3, а) объясняется большим числом пересечений траекторий аттрактора при «недовложении». С увеличением  $n$  аттрактор как бы «распрямляется», число пересечений уменьшается и динамика

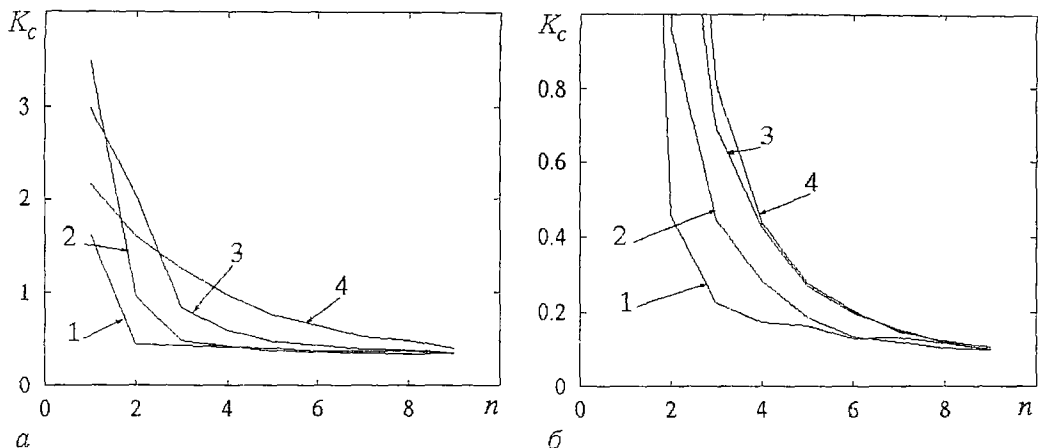


Рис. 3. Графики зависимости  $K_c(n)$ , построенные: а – для каскада (отображение Хенона + цепочка из  $p$  фильтров первого порядка) и б – для потока (система Ресслера + цепочка из  $p$  фильтров первого порядка) при  $p$ : 1 – 0, 2 – 1, – 2, 3 – 3. Параметры для первой системы:  $\alpha=0.8$  для всех фильтров цепочки,  $N=10^5$ ,  $M=10^4$ ,  $\tau=1$ ,  $t_s=1$ ,  $E^*=-48$  дБ; для второй системы:  $\eta=0.1$  для всех фильтров цепочки,  $N=10^5$ ,  $M=10^4$ ,  $\tau=25$ ,  $t_s=0.04$ ,  $E^*=-42$  дБ

траекторий на аттракторе становится все более различимой и в конечном итоге позволяет извлечь достоверную информацию о динамике исследуемой системы, что отражает насыщение энтропии в области больших  $n$ .

### Выводы

Проведенные исследования позволили выявить следующие закономерности оценок энтропии хаотических реализаций при их фильтрации.

1. Энтропия как асимптотическая величина ( $n \rightarrow \infty$ ) остается неизменной, что соответствует теории и в простейших случаях хорошо демонстрируется на численном эксперименте.

2. Характер сходимости энтропии хаотического сигнала к асимптотическому значению определяется параметрами фильтра следующим образом. Функция  $K_c(n)$ , определяющая энтропию, сдвигается в область больших  $n$ . Величина сдвига  $K_c(n)$  в пределе сильной фильтрации равна порядку фильтра (аналогично предельному увеличению размерности в фильтрах высокого порядка [8]).

3. Анализ информационной энтропии позволяет придать результатам «информационное» толкование. Известно, что для хаотического сигнала характерно насыщение энтропии как функции длины слова  $n$  на некотором положительном уровне. Это говорит о том, что состояние динамической системы глобально непредсказуемо (сигнал нигде не повторяет себя), но локально, начиная с некоторой длины слова мы можем с определенной точностью предсказать следующее состояние системы. Фильтрация приводит к такому перераспределению информации между словами различной длины, что короткие слова создают впечатление о большей непредсказуемости (случайности) системы, в то время как анализ более длинных слов позволяет извлечь информацию о динамике исходной системы. Другими словами, фильтр определенным образом маскирует динамическую систему, генерирующую хаотический сигнал, и неудивительно, что для того, чтобы добраться до ее «истинного лица» необходимо анализировать информацию, содержащуюся в более длинных словах, составленных из элементов последовательности.

Остается добавить, что в сложных ситуациях, например, в случае высокоразмерного хаоса и фильтров высокого порядка могут быть получены неверные оценки энтропии по причине недостаточной длины реализации для обеспечения необходимого разрешения ( $E^*$ ) и размерности вложения ( $n^*$ ).

Выражаю благодарность А.А.Кипчатову за неоценимую помощь и внимание к работе, А.Б. Нейману за ценные идеи и предоставленную литературу по информационной энтропии, а также коллегам за интересные дискуссии.



## Библиографический список

1. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics* / Ed. D.A.Rand, L.-S.Young. Berlin: Springer, 1981. P. 366.
2. *Badii R., Politi A.* Strange attractors: Estimating the complexity of chaotic signals // *Proc. of Workshop Instabilities and Chaos in Quantum Optics II* // New York: Plenum, 1988. P. 335.
3. *Badii R., Broggi G., Derighetti B., Ravani M., Ciliberto S.* Dimension Increase in Filtered Chaotic Signals // *Phys.Rev.Lett.* 1988. Vol. 11. P. 979.
4. *Mitschke F., Moller M., Lange W.* Measuring Filtered Chaotic Signals // *Phys.Rev.A.* 1988. Vol. 11. P. 4518.
5. *Стратонович Р.Л.* Теория информации. М:Сов.Радио, 1975, 424 с.
6. *Кипчатов А.А., Красичков Л.В.* Суперфрактализация хаотического аттрактора при линейной фильтрации // *Письма в ЖТФ.* 1995. Т.4. С. 1.
7. *Кипчатов А.А., Козленко Е.Л.* Неограниченное возрастание размерности хаотических аттракторов при линейной фильтрации // *Письма в ЖТФ.* 1997. Т. 23, № 7. С. 8.
8. *Kipchatov A.A., Kozlenko E.L.* The new fractal structure of chaotic attractors arising under linear filtering // *Proc. 5th Int. Specialist Workshop Nonlinear Dynamics of Electronic Systems.* 1997. P. 394.
9. *Кипчатов А.А.* Количественная оценка сложности колебаний и формирование тестовых хаотических сигналов // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Саратов: Сарат. гос. ун-т, 1996. 204 с.
10. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 50. P. 346.
11. *Кипчатов А.А.* Оценка корреляционной размерности аттракторов, восстановленных по данным конечной точности и длины // *Письма в ЖТФ.* 1995. Т. 21, вып. 15. С. 90.
12. *Ebeling W., Nicolis G.* Entropy of symbolic sequences: the role of correlations // *Europhys. Lett.* 1992. Vol. 17. P. 7.
13. *Rossler O.E.* An equation for continuous chaos // *Phys. Lett. A.* 1976. Vol. 57. P. 397.
14. *Henon M.* A two dimensional mapping with a strange attractor // *Comm. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 25.09.98

## ENTROPY OF FILTERED CHAOTIC SIGNALS

*E.L. Kozlenko*

Chaotic oscillations being passed through linear filters are distorted that reflects in the estimates of their characteristics. One of such characteristics is entropy – usually used as a quantitative complexity measure of different processes. The present paper is focused on the problems of entropy estimation of chaotic time series, passed through linear filters. The systems, consisting of generators of chaotic oscillations and linear first-order and high-order filters have been investigated by means of computer simulation.



*Козленко Егор Львович* – родился в 1973 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники, колебаний и волн СГУ. Область научных интересов – диагностика сложного поведения динамических систем по временным реализациям, фильтрация хаотических сигналов. Автор 3 статей по данной тематике.