



## ДИНАМИКА ОДНОМОДОВЫХ ЛАЗЕРОВ И ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС

*А. Н. Ораевский*

Дан обзор работ по динамике одномодового лазера. Особое внимание уделено свойствам странного аттрактора, соответствующего режиму динамического хаоса в одномодовом лазере. Приведен перечень основных направлений исследований по динамике лазеров. Список литературы: 160 наименований.

### 1. Мазерный (лазерный) аттрактор

С точки зрения теории колебаний квантовый генератор (мазер или лазер) является автоколебательной системой, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями. Это диссипативная система, потери в которой обусловлены поглощением излучения различными конструктивными элементами (зеркалами резонатора и др.), релаксационными процессами, происходящими в активной среде, и, наконец, выводом генерируемого луча из резонатора для его использования потребителем. Потери компенсируются энергией накачки, вводимой в активную среду квантового генератора. Различным режимам генерации соответствуют различные решения описывающих их уравнений. Эти решения наглядно могут быть представлены в виде траекторий в фазовом пространстве [1]. Установившимся режимам генерации в фазовом пространстве уравнений соответствуют состояния равновесия или предельные циклы-траектории, относящиеся к классу «особых».

До начала 60-х годов считалось, что разнообразие особых траекторий сводится к следующему перечню: узел-фокус, седло, сепаратриса и предельный цикл. Остальные траектории - неособые, асимптотически приближающиеся к особым или удаляющиеся от них. Неособые траектории описывают переходные процессы в реальном приборе.

Те особые траектории, которые «притягивают» к себе неособые траектории, получили название аттракторов. Все эти хорошо известные обстоятельства подробно изложены в монографиях и учебниках (см., например, [1,2]).

До 60-х годов топологический образ фазового пространства нелинейных дифференциальных уравнений формировался главным образом на основе уравнений второго порядка, фазовое пространство для которых двумерно. Для описания режимов работы многих приборов зачастую такой системы оказывалось достаточно. Но в середине 50-х - начале 60-х годов появились приборы и возрос интерес к процессам, описание которых принципиально не укладывалось в рамки уравнений второго порядка. При исследовании этих процессов и анализе работы

этих приборов был выявлен особый класс решений нелинейных дифференциальных уравнений. Впоследствии эти решения получили название «странных аттракторов» [3].

Открытие странного аттрактора справедливо связывается с работой Э. Лоренца [4]. Однако «странные» нерегулярные решения нелинейных уравнений примерно в это же время были также обнаружены в работах [5-8], посвященных исследованию процессов генерации в квантовых генераторах<sup>1</sup>.

Следует отметить, что работа [4] была связана с анализом процессов конвекции в атмосфере, так что в работах [4] и [5] речь шла о явлениях совершенно различной природы. Но удивительно, что в этих работах анализировались совершенно одинаковые уравнения [8].

В данной статье особенности возникновения и свойства фазовых траекторий типа странного аттрактора рассмотрены в рамках исследования динамических режимов в квантовых генераторах.

Процесс генерации в квантовом генераторе описывается уравнениями Максвелла, которые в одномодовом приближении (возбуждается один тип колебаний в резонаторе генератора) сводятся к уравнению осциллятора с затуханием, возбуждаемого поляризацией активной среды [7,9,10],

$$\frac{d^2E}{dt^2} + \frac{\omega_c}{Q} \frac{dE}{dt} + \omega_c^2 E = -4\pi \frac{d^2P}{dt^2}. \quad (1)$$

Здесь  $E$  - электрическая компонента электромагнитного поля в резонаторе;  $Q$  - добротность;  $\omega_c$  - собственная частота резонатора;  $P$  - поляризация активной среды, подчиняющаяся уравнениям

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \frac{2}{\tau_2} \frac{dP}{dt} + \omega_0^2 P = -2\omega_0 \frac{|\mu|^2}{\hbar} NE, \quad (2a)$$

$$\frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau_1} N = I + \frac{2}{\hbar\omega_0} E \frac{dP}{dt}, \quad (2б)$$

где  $N$  - разность населенностей верхнего и нижнего рабочих уровней в активной среде;  $I$  - интенсивность накачки;  $\tau_2$  - время релаксации поляризации, определяющее ширину спектральной линии;  $\tau_1$  - время релаксации населенности уровней;  $\mu$ -матричный элемент дипольного момента частиц среды, взаимодействующих с излучением;  $\omega_0$  - резонансная частота спектральной линии.

Система уравнений (1) и (2) широко применяется для исследования динамики квантовых генераторов, начиная с работ [9,10]. Их анализ может быть проведен методом медленных комплексных амплитуд, когда входящие в уравнения (1) и (2) величины представляются в виде

$$E = Ee^{-i\omega_c t}, \quad P = Pe^{-i\omega_c t}, \quad (3)$$

где  $E$ ,  $P$  и далее  $N$  - медленные функции времени по сравнению с высокочастотной экспонентой. Они удовлетворяют уравнениям [7]

$$\frac{dE}{dt} + \frac{\omega_c}{2Q} E = i2\pi\omega_c P, \quad (4a)$$

$$\frac{dP}{dt} + \left[ \frac{1}{\tau_2} + i(\omega_0 - \omega_c) \right] P = -i \frac{|\mu|^2}{\hbar} NE, \quad (4б)$$

<sup>1</sup> Работа [5] поступила в редакцию журнала 28 июня 1962 года и была доложена в сентябре того же года на 4-м Международном конгрессе по приборам СВЧ. Работа [4] поступила в редакцию журнала 18 ноября 1962 года.

$$\frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau_1} N = I + \frac{i}{2\hbar} (EP^* - E^*P), \quad (4в)$$

которые получаются из (1), (2) с помощью стандартной процедуры [1]. Система уравнений (4) имеет следующие стационарные решения:

$$E = P = 0, \quad N = I\tau_1 \quad (5)$$

и

$$|E|^2 = 4\pi\hbar Q \left\{ I - \frac{\hbar[1 + (\Omega - \omega_0)^2\tau_2^2]}{4Q|\mu|^2\tau_1\tau_2} \right\}, \quad (6а)$$

$$(\Omega - \omega_0)\left(1 + \frac{\omega_c\tau_2}{2Q}\right) = \frac{\omega_c\tau_2}{2Q} (\omega_c - \omega_0), \quad (6б)$$

где  $\Omega = \omega_c - d\phi/dt$  - частота генерируемого излучения. Стационарное состояние (5) неустойчиво, если

$$4\pi \frac{|\mu|^2}{\hbar} I\tau_1\tau_2 Q > 1 + (\Omega - \omega_0)^2\tau_2^2. \quad (7)$$

В этом случае условие возбуждения колебаний в лазере выполнены, и он генерирует излучение, амплитуда и частота которого определяется соотношениями (6). Выяснение устойчивости состояния (6) мы проведем в два этапа.

Введем новую динамическую переменную  $EP^* + E^*P$ . Из системы (4) следует, что [11]

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{\omega_c}{2Q} + \frac{1}{\tau_2}\right)(EP^* + E^*P) = i(\omega_0 - \omega_c)(EP^* - E^*P). \quad (8)$$

Для упрощения дальнейшего анализа предположим, что резонансные частоты резонатора и спектральной линии совпадают. Тогда правая часть уравнения (8) равна нулю, и видно, что с течением времени величина  $EP^* + E^*P$  экспоненциально затухает, стремясь к нулевому значению. В амплитудно-фазовом представлении ( $E = Ae^{i\phi}$ ,  $P = Be^{i\psi}$ ) это означает, что система стремится к состоянию, в котором либо  $A=B=0$ , либо

$$\cos(\phi - \psi) = 0, \quad \sin(\phi - \psi) = \pm 1. \quad (9)$$

При выполнении условия самовозбуждения (7) состояние  $A=B=0$  неустойчиво, так что траектории лазера в фазовом пространстве стремятся в такую его область, где имеют место соотношения (9). В этом случае система уравнений (4) распадается на две

$$\frac{dA}{dt} + \frac{\omega_c}{2Q} A = \pm 2\pi\omega_c B, \quad (10а)$$

$$\frac{dB}{dt} + \frac{1}{\tau_2} B = \pm \frac{|\mu|^2}{\hbar} NA, \quad (10б)$$

$$\frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau_1} N = I \mp \frac{1}{\hbar} AB, \quad (10в)$$

а область фазовых траекторий - на две подобласти, в одной из которых  $\sin(\phi - \psi) = 1$ , а в другой  $\sin(\phi - \psi) = -1$ . Эти подобласти соприкасаются в тех местах, где обращаются в нуль либо  $A$ , либо  $B$ . В местах соприкосновения система может перейти из одной области в другую без энергетического «катаклизма». При таком

переходе разность фаз меняется на  $\pi$ . Хотя по своему физическому смыслу амплитуды  $A$  и  $B$  - положительные величины, изменение знака  $\sin(\varphi - \psi)$  при переходе между подобластями можно приписать изменению знака амплитуды, формально допустив существование как положительных, так и отрицательных значений  $A$  и  $B$ . При таком предположении две подсистемы уравнений сливаются в одну систему

$$\frac{dA}{dt} + \frac{\omega_c}{2Q} A = 2\pi\omega_c B, \quad (11a)$$

$$\frac{dB}{dt} + \frac{1}{\tau_2} B = \frac{|\mu|^2}{\hbar} NA, \quad (11б)$$

$$\frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau_1} N = I - \frac{1}{\hbar} AB. \quad (11в)$$

Уравнения (11), исследование которых впервые было проведено в [5], с точностью до обозначений совпадают с системой уравнений, использованной в работе [4].

Для анализа уравнений (11) их удобно записать в безразмерных переменных:  $x$  - амплитуда колебаний поля;  $y$  - поляризация;  $z$  - число частиц, нормированных так, что в стационарном состоянии  $x=y=\pm 1$ ,  $z=1$ . Введем также безразмерное время  $\tau=t/\tau_2$ . Тогда система уравнений (11) примет вид

$$dx/d\tau = -\sigma(x - y), \quad (12a)$$

$$dy/d\tau = -y + xz, \quad (12б)$$

$$dz/d\tau = -b(z - r) - b(r - 1)xy, \quad (12в)$$

где

$$\sigma = \omega_c \tau_2 / 2Q, \quad b = \tau_2 / \tau_1, \quad r = 4\pi I \tau_1 \tau_2 Q |\mu|^2 / \hbar. \quad (13)$$

По своему физическому смыслу коэффициент  $r$  есть отношение мощности накачки к ее пороговому значению. Стационарные решения этой системы суть: а)  $x=y=0$ ,  $z=r$ ; б)  $x=\pm 1$ ,  $y=\pm 1$ ,  $z=1$ . Это нормированный вид решений (5) и (6). Очевидно, что решение «а» соответствует отсутствию генерации. Оно устойчиво по Ляпунову, если  $r < 1$ , то есть пороговое условие генерации не выполнено, и теряет устойчивость при выполнении порогового условия  $r > 1$ . Решение «б» соответствует стационарной генерации с постоянной амплитудой. Из (6) видно, что оно существует, если  $r > 1$ . Анализ решений «б» на устойчивость по Ляпунову [5-7] приводит к следующему характеристическому уравнению

$$\lambda^3 + \lambda^2(1 + b + \sigma) + \lambda(r + \sigma)b + 2b\sigma(r - 1) = 0 \quad (14)$$

для показателей Ляпунова  $\lambda$ . Из этого уравнения следует, что при  $\sigma < 1 + b$  стационарные решения «б» устойчивы, если  $r > 1$ , то есть если выполнено условие самовозбуждения квантового генератора. При  $\sigma > 1 + b$  стационарные решения устойчивы лишь в интервале

$$1 < r < r^*, \quad r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}. \quad (15)$$

Чтобы ответить на вопрос, что же происходит при  $r > r^*$ , необходим численный анализ. Такой анализ показал [5-7], что при  $r > r^*$  стационарный режим генерации сменяется сложным автомодуляционным процессом, характер которого передает рис. 1, взятый из работы [5]. Видно, что в системе происходят постепенно

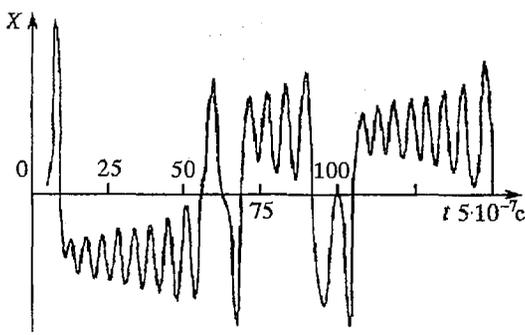


Рис. 1. Вид хаотического автомодуляционного процесса при  $r > r^*$ :  $r=20$ ,  $\sigma=4$ ,  $b=1$  [5]

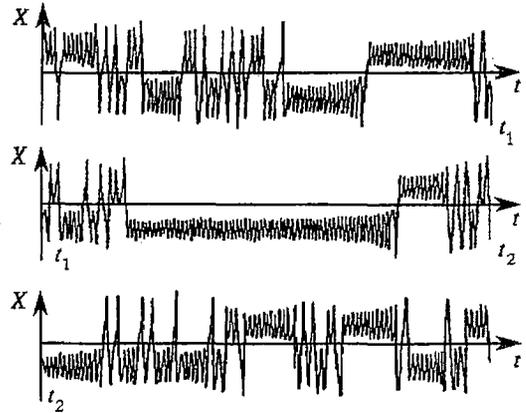


Рис. 2. Развитая во времени картина хаотического автомодуляционного процесса при  $r > r^*$  [4]

нарастающие пульсации вокруг одной из стационарных точек:  $C_1(x=y=1, z=1)$  или  $C_2(x=y=-1, z=1)$ , а затем система совершает перескок в область другого положения равновесия и т.д. На рис. 2 представлена развитая во времени картина автомодуляционного процесса. Время пребывания системы в окрестности той или другой стационарной точки является случайной величиной. Поэтому весь процесс в целом носит случайный характер. Посмотрим на поведение системы в амплитудно-фазовом представлении. На рис. 3 показано изменение во времени синуса разности фаз и интенсивности излучения [11]. Обращают на себя внимание обсуждавшиеся ранее резкие скачки разности фаз. Из рисунка видно, что скачки фаз происходят при обращении интенсивности в нуль. В этой части фазовой траектории существенную роль могут играть даже небольшие шумы, которые всегда присутствуют в любой системе, но которые не учтены при выводе уравнений (12). Введение таких шумов в уравнения (4) в качестве ланжевеновских сил и численное исследование их при прежнем условии  $\omega_0 - \omega_c = 0$  показало, что небольшие по интенсивности шумы заметно сказываются на динамике разности фаз. Переходы разности фаз от значений  $\pi/2$  к значениям  $-\pi/2$  теряют характер перескоков, становясь более плавными (рис. 4). Отметим, что использование системы уравнений (4) в этом случае принципиально, так как в присутствии шумов тождественного обращения величины  $E_R^* + E^*P$  в нуль не происходит никогда. Можно ожидать, что в переходном режиме, когда  $E_R^* + E^*P$  еще не равно нулю, изменения фазы будут носить характер относительно плавного перехода, а не

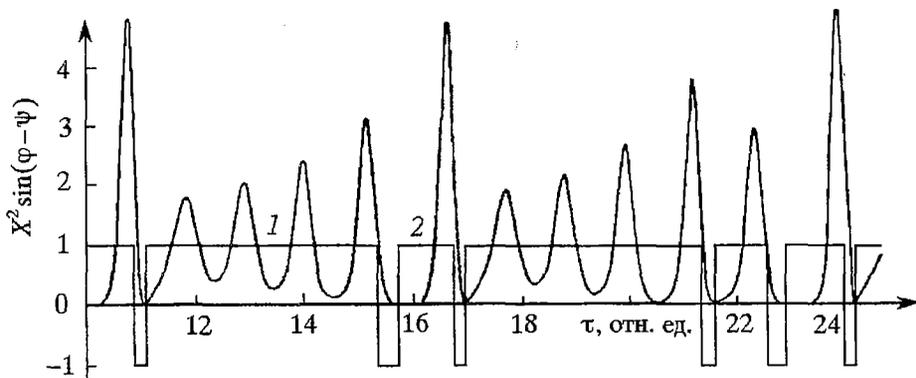


Рис. 3. Изменение во времени синуса разности фаз (1) и интенсивности излучения (2) в области хаотического движения [11]

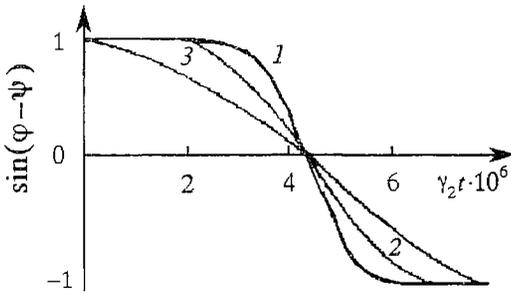


Рис. 4. Переход  $\pi/2 \leftrightarrow -\pi/2$  разности фаз поля и поляризации в присутствии внешних флуктуаций при начальном состоянии, соответствующем области странного аттрактора: 1 - дисперсия шума  $10^{-4}$ ; 2 -  $10^{-3}$ ; 3 -  $5 \cdot 10^{-3}$

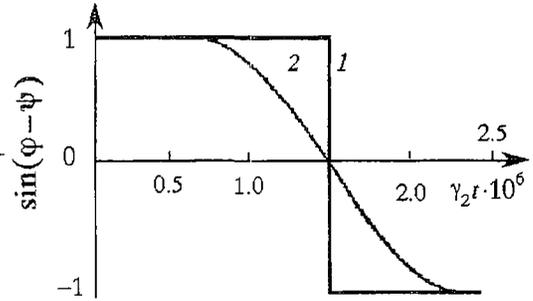


Рис. 5. Переход  $\pi/2 \leftrightarrow -\pi/2$  разности фаз поля и поляризации в случае начального состояния, отвечающего странному аттрактору (1), и произвольного начального состояния

характер скачка, даже в отсутствие шума. Численный расчет подтверждает это предположение. Если выбрать начальные условия, удовлетворяющими соотношению (9), то изменение разности фаз происходит скачком. При выборе начальных условий, не удовлетворяющих условию (9), фаза изменяется плавно (рис. 5). По мере того, как система приближается к области аттрактора, крутизна изменения фазы возрастает.

## 2. Фазовый портрет лазера

Первая попытка проанализировать фазовый портрет хаотических решений уравнений (12) была предпринята в работе [4] для  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ . Рис. 6 дает две плоские проекции трехмерного фазового портрета решения, полученные численным интегрированием уравнений (12). Числа на траекториях означают

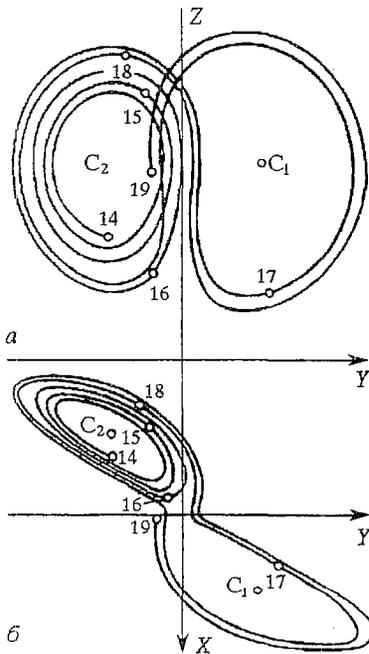


Рис. 6. Проекция фазового портрета хаотического процесса [4]

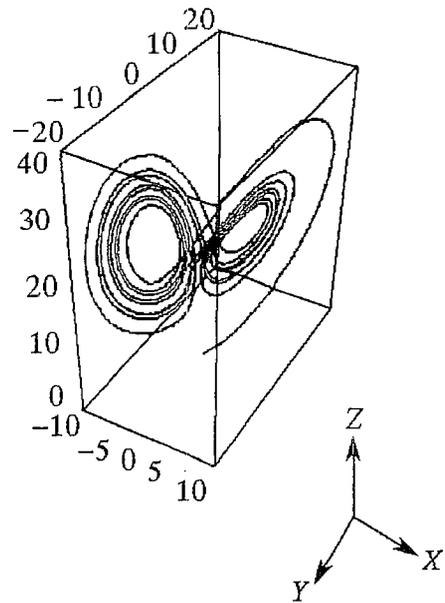


Рис. 7. Трехмерный портрет странного аттрактора уравнений (12)

последовательность движения системы по этим траекториям. В соответствии с рисунком фазовая траектория раскручивается по спирали вокруг состояния равновесия  $C_2$ , а затем перескакивает на спираль в окрестности состояния равновесия  $C_1$  (точка 17), после чего вновь возвращается в окрестность точки  $C_2$  и т.д. Казалось бы, как это возможно? Ведь оставаясь в плоскости  $Z=1$ , траектории должны пересечься при переходе из области  $C_1$  в область  $C_2$ . «Выручает» трехмерность фазового пространства. Раскручиваясь около состояния равновесия  $C_1$  или  $C_2$ , траектория смещается по оси  $Z$ , так что при переходе к другому центру притяжения пересечения траекторий не происходит. Таким образом, мы видим, что существование сложного ансамбля непересекающихся траекторий возможно лишь в фазовом пространстве, размерность которого больше двух.

Трехмерный вид фазового портрета уравнений (12) представлен на рис.7. Впервые для параметров  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$  он был вычислен в работе [12]. Это один из примеров странного аттрактора - притягивающей сложной траектории, существенно отличающейся от квазипериодических орбит или замкнутых орбит типа предельного цикла.

Странный аттрактор уравнений (12) в настоящее время достаточно глубоко изучен с помощью численных методов (см. [13-23] и цитируемую в них литературу). На рис. 8 построены особые траектории системы (12) в трехмерном фазовом пространстве  $XYZ$  для  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$  [20-22]. Плоскость  $\Sigma$  проведена через состояния равновесия  $C_1$  и  $C_2$  перпендикулярно оси  $Z$ . Уравнения (12) имеют плоскость - сепаратрису, проходящую через состояние равновесия  $C_0(0,0,r)$  и пересекающую плоскость  $\Sigma$  по линии  $AB$ . Движение по любой траектории, лежащей в этой плоскости, направлено в сторону состояния равновесия  $C_0$  и оканчивается в этой точке. Из точки  $C_0$  выходят две сепаратрисы - «усы»  $S_1$  и  $S_2$ , идущие либо в «свои» собственные состояния равновесия  $C_0$  и  $C_2$ , либо в смежные, в зависимости от значения параметра  $r$ . На серии рис. 9 представлено поведение траекторий, соответствующих решениям уравнения (12), в проекции на плоскость, проходящую через точки  $C_0$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . Координата  $U$  на плоскости этой проекции откладывается в направлении прямой, соединяющей состояния равновесия  $C_1$  и  $C_2$ .

Как уже отмечалось, при  $r>1$  в квантовом генераторе возникают автоколебания. Из неустойчивого состояния равновесия  $(0,0,r)$  (см. рисунок) в зависимости от начальных условий система по «усам», сепаратрисам, стремится к одному из состояний равновесия  $C_1$  или  $C_2$  (напомним, что  $C_1$  и  $C_2$  представляют собой автоколебания с постоянной амплитудой). Оказывается, что кроме критических значений параметра  $r$ , равных 1 и  $r^*$ , существуют еще два значения, которые мы назовем  $r_1$  и  $r_2$ . При  $r>r_1$  происходит качественное изменение фазового портрета: появляются неустойчивые предельные циклы (штриховая линия), а сепаратрисы  $S_1$  и  $S_2$  «меняются» фокусами.

Увеличение  $r$  приводит к тому, что при  $r>r_2$  рождается странный аттрактор. Он заполняет всю область вне предельных циклов. Сепаратрисы  $S_1$  и  $S_2$  стремятся уже не к состояниям равновесия, а оканчиваются на неустойчивых предельных циклах. Поведение системы в этом случае качественно различно в зависимости от начальных условий. Если начальные условия таковы, что стартовая точка лежит в пределах фазовой поверхности, ограниченной циклами, то система, совершая осцилляции, приходит в

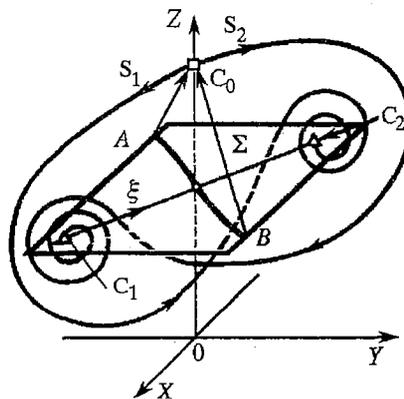


Рис. 8. Особые траектории уравнений (12) в трехмерном пространстве

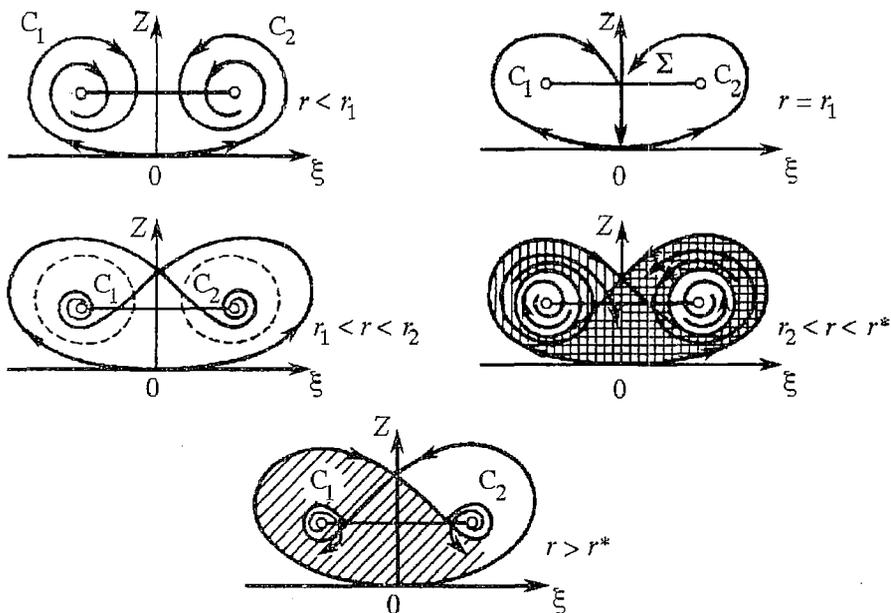


Рис. 9. Группа  $Z$ - $\xi$  проекций фазового пространства уравнений (12) при различных  $r$

состояние  $C_1$  или  $C_2$ . В этом случае установившимся режимом является генерация излучения с постоянной амплитудой. Другие начальные условия приводят к стохастическим колебаниям.

При дальнейшем увеличении  $r$  радиус циклов уменьшается, и при  $r > r^*$  они сливаются с состояниями равновесия  $C_1$  и  $C_2$ , передавая им свою неустойчивость; вся область, ограниченная сепаратрисами  $S_1$  и  $S_2$ , становится странным аттрактором. Система ведет себя непредсказуемо независимо от начальных условий.

Анализ устойчивости в малом позволяет отыскать лишь  $r^*$ ;  $r_1$  и  $r_2$  найдены методом численного анализа [22]. Зависимости  $r_1(\sigma)$ ,  $r_2(\sigma)$  и  $r^*(\sigma)$  представлены на рис. 10. При дальнейшем увеличении  $r$  вблизи  $r = 220$  странный аттрактор переходит в предельный цикл [22]. Численный анализ в [22] проведен для  $\sigma = 10$  и  $b = 8/3$ , так что бифуркационное значение  $r = 220$  относится к конкретным величинам  $\sigma$  и  $b$ . При уменьшении  $r$  от  $r^*$  система остается в фазовом пространстве странного аттрактора вплоть до  $r = r_2$ , когда странный аттрактор исчезает [11]. В области  $r < r_2$  точка в фазовом пространстве устремляется к устойчивым

состояниям равновесия  $C_1$  или  $C_2$ . Таким образом, имеет место гистерезисное поведение точки в фазовом пространстве при возрастании  $r$  от 1 до  $r > r^*$  и обратном уменьшении до 1.

Значение  $b = 8/3$  используется в различных расчетах традиционно, начиная с работы [4], хотя в расчетах, проведенных в работах [5-8], параметр  $b = 1$ . Физика лазеров не допускает значений  $b > 1$ , но описанные выше особенности фазовых траекторий остаются в силе и при  $b \leq 1$ . Тем не менее, динамика лазера чувствительна к изменению параметра  $b$ . На рис. 11 представлен характер амплитудных

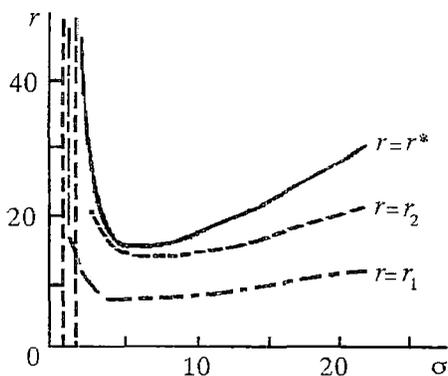


Рис. 10. Зависимость критических значений  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r^*$  от параметра  $\sigma$  при  $b = 1$

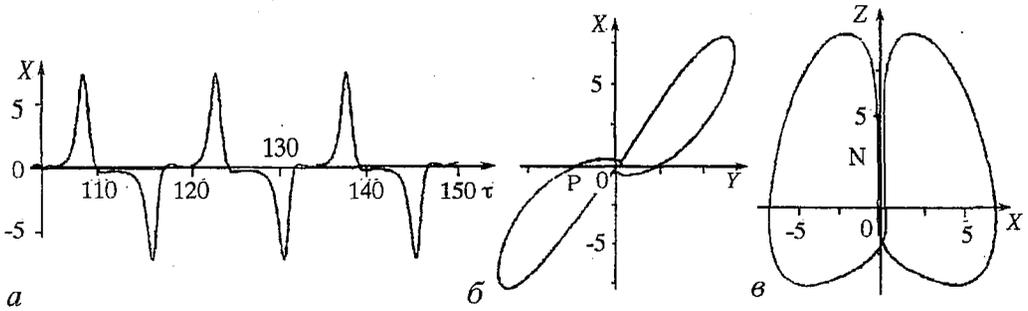


Рис. 11. Периодические пульсации амплитуды поля (а) и проекции предельного цикла (б, в) системы (12) при  $b=0.05$ ;  $\sigma=5$ ;  $r=28$

пульсаций и фазовый портрет лазера при малом значении  $b$  [23]. В этом случае  $r^* \approx 10$ , так что выбранное значение  $r > r^*$ . Однако, лазер не находится в режиме хаотических пульсаций: имеют место регулярные пульсации, соответствующие симметричному предельному циклу типа восьмерки. Рис. 12 демонстрирует сценарий перехода к хаосу при увеличении параметра  $b$  [23]. Сначала предельный цикл теряет симметрию (рис.12, а) и при дальнейшем увеличении  $b$  хаотизируется, проходя через стадии удвоения периода (рис.12, б, в). Затем колебания становятся

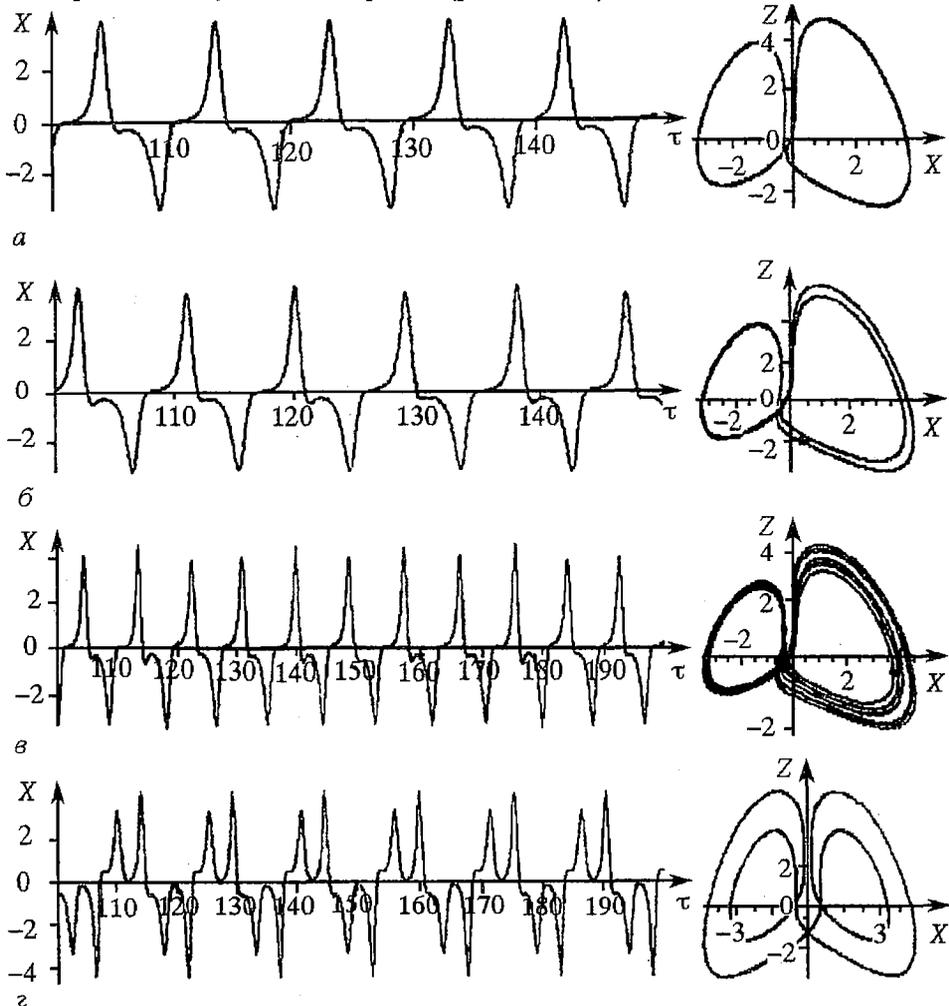


Рис. 12. Последовательность режимов системы (12), соответствующая увеличению параметра  $b$  от 0.05 до 0.1;  $\sigma=5$ ;  $r=28$

вновь регулярными, а предельный цикл опять приобретает симметрию, но уже в виде удвоенной восьмерки. Этот сценарий повторяется несколько раз со все уменьшающимися интервалами изменения  $b$ . Наконец, при  $b \approx 0.15$  очередная серия удвоения периода приводит к возникновению развитого странного аттрактора типа аттрактора Лоренца. Отметим, что удвоение периода - один из характерных сценариев перехода к странному аттрактору. По-видимому, он тесно связан с механизмом вырожденного параметрического возбуждения колебаний с частотой, равной половине частоты модуляции параметра (о параметрическом возбуждении см., например, [2]).

### 3. Размерность странного аттрактора

Изучение странного аттрактора как топологического образования показывает, что это замкнутая совокупность взаимно *неустойчивых* траекторий, несмотря на то, что совокупность траекторий как целое является притягивающей, то есть *устойчивой*. Это оказывается возможным, поскольку в различных точках фазового пространства каждая из траекторий неустойчива не по всем направлениям. В некоторых направлениях малые отклонения от траектории нарастают, в других - убывают.

Предположим, что в начальный момент времени некоторый объем этого фазового пространства заполнен точками с плотностью  $\rho_0$ ; пусть эти точки соответствуют различным начальным значениям величин  $x, y, z$ . Рассматривая движение точек в фазовом пространстве как гидродинамическое [2], можно написать уравнение сохранения плотности

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (16)$$

где  $\mathbf{v}$  - вектор скорости точек с компонентами  $(x', y', z')$ . Если в начальный момент распределение точек в выбранном объеме фазового пространства равномерно ( $\rho_0$  не зависит от  $x, y, z$ ), то в этот момент

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\rho_0 \text{div} \mathbf{v}. \quad (17)$$

Из уравнений (12) следует, что

$$\text{div} \mathbf{v} = -(\sigma + b + 1) < 0 \quad (18)$$

не зависит от положения точки в фазовом пространстве. Поэтому изменение плотности со временем происходит равномерно во всем пространстве. Если в начальный момент  $\rho_0$  не зависит от координат, то такое положение сохранится и в дальнейшем, так что уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (19)$$

описывает изменение плотности точек в фазовом пространстве в течение всего времени. Из (18) и (19) следует, что

$$\rho = \rho_0 \exp(\sigma + b + 1)\tau, \quad (20)$$

то есть плотность точек в фазовом пространстве растет со временем, а обратная ей величина - объем, занимаемый траекториями движений, сжимается. Сжатие фазового объема типично для диссипативных автоколебательных систем, потери в которых восполняются за счет внешних источников. Сжатие не означает, что

фазовый объем непременно стягивается в точку. «Фазовая жидкость» может растекаться по поверхности. Как уже отмечалось в разделе 2, в случае уравнений (12) она растекается по многим плоскостям, не представляющим в сумме континуум (канторово множество). Таким образом, размерность странного аттрактора меньше размерности фазового пространства уравнений, решением которых он является. Но как ей дать разумное определение?

Для того, чтобы соотнести конфигурацию странного аттрактора со всем объемом фазового пространства, оказалось удобным ввести размерность странного аттрактора. Чтобы ввести ее наиболее естественным образом, рассмотрим, как связана обычная размерность фазового пространства с числом точек, заполняющих некоторый его объем  $V$ . Для этого заполним выбранный объем  $d$ -мерного фазового пространства  $d$ -мерными кубиками со стороной  $a$ . Если число этих кубиков  $N(a)$ , то очевидно соотношение  $V \approx a^d N(a)$ . При бесконечном уменьшении стороны кубика  $a$  число  $N(a)$  будет бесконечно расти, а равенство истинного объема и общего объема всех кубиков будет выполняться все точнее. Введем безразмерную сторону кубика  $\epsilon = aV^{-1/d}$  и запишем выражение для объема в форме

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^d N(\epsilon) = 1. \quad (21)$$

Из этого соотношения сразу следует выражение для размерности фазового пространства

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}. \quad (22)$$

Уберем теперь из объема все кубики, в которых не содержится точек, принадлежащих странному аттрактору. Оставшееся число точек странного аттрактора обозначим  $N_A(\epsilon)$ . Тогда по аналогии с (22) можно определить размерность странного аттрактора

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln(1/\epsilon)}, \quad (23)$$

которая может быть дробным числом. Поэтому размерность получила название дробной, или фрактальной. Удалось связать размерность  $D$  странного аттрактора с показателями Ляпунова [24,2], что упрощает ее вычисление. Определенная таким образом размерность странного аттрактора всегда меньше полной размерности фазового пространства. В частности, для уравнений (12) имеем  $2 < D < 3$ .

#### 4. Системы с широкой линией усиления. Неавтономные системы

Для лазера видимого и ближнего инфракрасного диапазонов типична широкая линия активного вещества ( $\sigma \ll 1$ ,  $b \ll 1$ ). В этом случае критического параметра  $r^*$  не существует. Однако, и такие системы обладают интересной динамикой.

При  $\sigma \ll 1$ ,  $b \ll 1$  ( $\tau_2 \ll \tau_c, \tau_1$ ) и умеренном значении параметра самовозбуждения  $r$  можно в уравнении (46) пренебречь производной и исключить из уравнений поляризацию. Тогда систему (4) нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{dW}{dt} + \frac{1}{\tau_c} W = \sigma N W, \quad (24a)$$

$$\frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau_1} N = I - 2\sigma N W, \quad (246)$$

где  $\tau_c = Q/\omega_c$ ;  $W = A^2/(8\pi\hbar\omega)$ ;  $\sigma = 4\pi\omega|\mu|^2c/(\hbar(1+(\omega_0 - \omega_c)^2\tau_2^2))$ . К системе (24) следует присоединить еще уравнение для фазы поля

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} \sigma(\omega_c - \omega_0)\tau_2 N. \quad (25)$$

Но оно в этом случае является сопутствующим, не оказывая прямого влияния на динамику лазера. Казалось бы, динамические возможности системы (24) примитивны: нетривиальное состояние равновесия

$$W = W_s(r-1), \quad N = 1/(\sigma\tau_c), \quad W_s = 1/(2\sigma\tau_1), \quad r = \sigma\tau_c\tau_1 I \quad (26)$$

всегда устойчиво, если  $r > 1$ . Однако, как показывает нижеследующий анализ, такой простой одноодовый лазер обладает «скрытыми» динамическими резервами.

Введем безразмерные величины  $X = W/(W_s(r-1))$ ,  $\tau = \Omega_0 t$ , где  $\Omega_0 = ((r-1)/\tau_1\tau_c)^{1/2}$ , и исключим из уравнений (24) динамическую переменную  $N$ . Получим

$$X'' - (X')^2/X + X(X-1) = \varepsilon f(X', X; \tau), \quad (27)$$

где

$$f(X', X; \tau) = -X'[1 + (r-1)X], \quad \varepsilon = 1/(\Omega_0\tau_1), \quad (') = d/d\tau. \quad (28)$$

Хотя в данном случае правая часть (27) явно не зависит от времени, мы ввели время в качестве одного из аргументов функции  $f$  для придания уравнению (27) более общего вида.

Если  $\tau_1 \gg \tau_c$ , что для многих лазеров имеет место, то  $\varepsilon \ll 1$ . Поэтому уравнение (27) можно решать методом разложения в ряд по параметру  $\varepsilon$

$$X(\tau) = X_0(\tau) + \varepsilon X_1(\tau) + \varepsilon^2 X_2(\tau) + \dots \quad (29)$$

Очевидно, что функция  $X_0$  удовлетворяет уравнению

$$X_0'' - (X_0')^2/X_0 + X_0(X_0 - 1) = 0. \quad (30)$$

Введением переменной  $Y = \ln X_0$  этому уравнению можно придать форму [25]

$$Y'' + e^Y - 1 = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) может быть истолковано, как движение материальной точки в поле потенциала  $U(Y) = e^Y - Y$ . В некоторых случаях такая запись является более удобной. Уравнение (30) имеет интегрирующий множитель  $2X_0'/X_0^2$  и может быть сведено к полному дифференциалу

$$d\left[\frac{1}{X_0^2}(X_0')^2 + 2X_0 - 2\ln X_0\right] = 0, \quad (32)$$

откуда

$$\frac{1}{X_0^2}(X_0')^2 + 2X_0 - 2\ln X_0 = C, \quad (33)$$

$C$  - произвольная постоянная интегрирования. Теперь задача сводится к интегрированию уравнения

$$X_0' = \pm X_0 (C - 2X_0 + 2\ln X_0). \quad (34)$$

Очевидно, что его интегрирование сводится к квадратуре, но получающийся интеграл не берется в элементарных функциях. Поскольку функции  $X_0(\tau; C)$  играют важную роль в динамике лазеров (и ряда других автоколебательных систем), они заслуживают специального внимания и могут быть названы

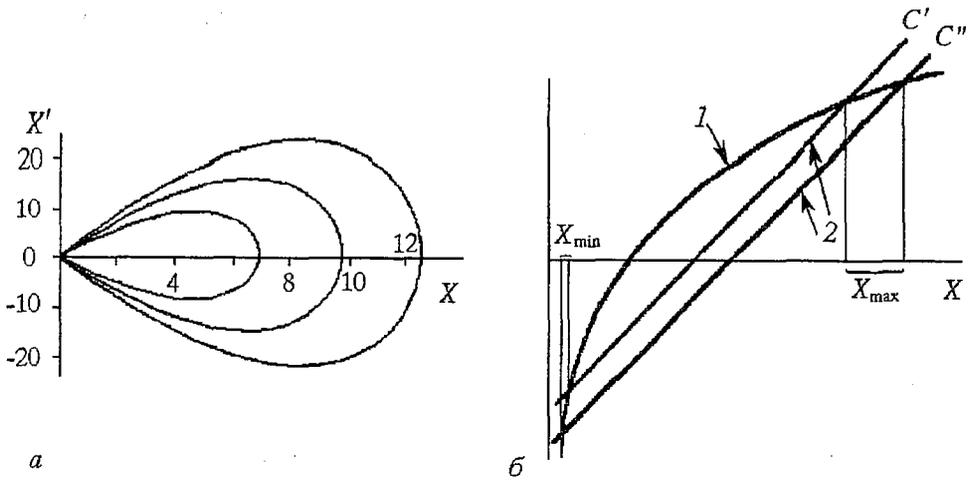


Рис. 13. *a* - траектории, соответствующие решениям уравнения (34), на фазовой плоскости  $(X', X)$  для значений  $C$ : 1 - 10, 2 - 15, 3 - 20; *б* - графическое представление решений уравнения  $C/2 - X - \ln X = 0$ : 1-график  $\ln X$ , 2- график  $C/2 - X$  для двух разных значений  $C$  ( $C'' > C'$ )

лазерными функциями. Для них можно ввести обозначение  $La(x; C)$  и на основе уравнения (33) составить алгоритм для расчета. Оказывается, однако, что для достаточно больших  $C$  можно найти приближенное решение уравнений (34), выраженное через элементарные функции [25].

Заметим прежде всего, что  $X_0(\tau; C)$  - периодические функции времени; это следует из уравнения (34), которое в фазовой плоскости имеет решением две траектории, соответствующие знаку (+) и знаку (-). Эти траектории являются взаимными зеркальными отражениями относительно оси абсцисс, замыкающимися друг на друга в точках  $X_0' = 0$  (рис.13, *a*). Очевидно, что эти точки определяются уравнением

$$C - 2X_0 + 2\ln X_0 = 0. \quad (35)$$

Для наглядности это уравнение представлено графически (рис. 13, *б*). Из рисунка видно, что  $X_{\max}$  растет с ростом  $C$ , асимптотически стремясь к  $C/2$  при больших  $C$ .  $X_{\min}$  убывает с ростом  $C$  и асимптотически стремится к значению  $\exp(-C/2)$ . Таким образом можно представить себе, что  $X_0(\tau; C)$  при больших  $C$  имеет вид периодически повторяющихся импульсов с достаточно большой амплитудой в максимуме и малым значением в минимуме (рис. 14). Этим можно воспользоваться для вычисления асимптотических значений этих функций в окрестностях максимума и минимума импульса.

Область  $X_0 \ll 1$ . В этом случае  $|\ln X_0| \gg X_0$  и (34) переходит в следующее уравнение:

$$X_0' = \pm X_0 (C + 2\ln X_0)^{1/2}. \quad (36)$$

Решение этого уравнения выражается в элементарных функциях

$$X_0 = \exp^{1/2}[(\tau \pm \theta_1)^2 - C], \quad (37)$$

$\theta_1$  - произвольная константа интегрирования.

Область  $X_0 \gg 1$ . В этом случае  $|\ln X_0| \ll X_0$ , так что

$$X_0' = \pm X_0 (C - 2X_0)^{1/2}. \quad (38)$$

Это уравнение тоже интегрируется в элементарных функциях

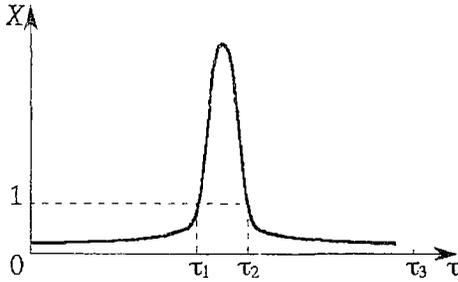


Рис. 14. К расчету параметров релаксационных пульсаций лазера

выбора функции в этой области мало скажется на описании динамики системы в целом. Тогда из этих функций можно построить решение уравнения (34), для чего их необходимо приравнять («сшить») в точках  $\tau_1$  и  $\tau_2$  (рис. 14). Такое сшивание определит как значения  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , так и значения неопределенных констант  $\theta_{1,2}$ . Отметим, что при больших  $C$  функции сшиваются не только по величине, но и по производной. Выполняя процедуру сшивания, находим приближенное значение  $X_0(\tau - \theta; C)$

$$X_0(\tau - \theta; C) = \begin{cases} \exp^{1/2}[(\tau - \theta)^2 - C], & 0 \leq \tau - \theta \leq \tau_1, \\ C/2[\text{ch}(C^{1/2}/2)(\tau - \theta - \theta_1)]^{-2}, & \tau_1 \leq \tau - \theta \leq \tau_2, \\ \exp^{1/2}[(\tau - \theta - \theta_2)^2 - C], & \tau_2 \leq \tau - \theta \leq \tau_3, \end{cases} \quad (40)$$

где

$$\theta_1 = C^{1/2} + 2/C^{1/2} \text{arcch}(C/2)^{1/2}, \quad \theta_2 = 2\theta_1, \quad (41)$$

а

$$\tau_1 = \theta + C^{1/2}, \quad \tau_2 = \theta + C^{1/2} + (4/C^{1/2}) \text{arcch}(C/2)^{1/2}, \quad \tau_3 = \theta + 2\theta_1. \quad (42)$$

Величина  $\theta$  произвольный параметр, который в автономной системе остается неопределенным.

Теперь можно определить период пульсаций  $T$  и длительность импульса. Нетрудно видеть (см. рис.14), что

$$T = \tau_3 - \theta = 2C^{1/2} + (4/C^{1/2}) \text{arcch}(C/2)^{1/2}. \quad (43)$$

Период растет с ростом максимального значения импульса  $X_{\max} = C/2$ . Длительность импульса, определяемая по его полувысоте,

$$\tau_{1/2} = (4/C^{1/2}) \text{arcch} 2^{1/2} \approx 3.525/C^{1/2} \quad (44)$$

убывает с ростом  $C$ . Таким образом, с ростом интенсивности импульса его длительность уменьшается, а интервал между импульсами увеличивается. В итоге средняя интенсивность почти сохраняется. Более строгий численный расчет показывает, что она медленно растет с ростом  $X_{\max}$ .

Очевидно, что полное решение уравнения (33) определяется функцией (40), повторяемой с периодом (43). Описываемые таким образом периодические пульсации мощности излучения лазера обычно называют релаксационными, а соответствующий им предельный цикл - релаксационным.

Поскольку параметр  $C$  в функции  $X_0(\tau; C)$  может принимать любые положительные значения, эта функция определяет континуум периодических решений уравнения (30). Реальное нелинейное уравнение (27), в отличие от (30), имеет конечное число периодических решений, то есть константа  $C$  должна принимать конечное число значений. Оказывается, что эти значения  $C$  являются решением уравнения

$$X_0 = C/2[\text{ch}(C^{1/2}/2)(\tau \pm \theta_2)]^{-2}. \quad (39)$$

$\theta_2$  - произвольная константа интегрирования.

Теперь предположим, что (37) описывает решение не только для  $X_0 \ll 1$ , но и во всем интервале  $0 < X_0 \leq 1$ , а (39) представляет собой решение на всем интервале  $X_{\max} \leq X_0 \leq 1$ . Основанием для такого предположения служит тот факт, что область около  $X_0 = 1$  система

проходит быстро, и некорректность выбора функции в этой области мало скажется на описании динамики системы в целом. Тогда из этих функций можно построить решение уравнения (34), для чего их необходимо приравнять («сшить») в точках  $\tau_1$  и  $\tau_2$  (рис. 14). Такое сшивание определит как значения  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , так и значения неопределенных констант  $\theta_{1,2}$ .

Отметим, что при больших  $C$  функции сшиваются не только по величине, но и по производной. Выполняя процедуру сшивания, находим приближенное значение  $X_0(\tau - \theta; C)$

$$X_0(\tau - \theta; C) = \begin{cases} \exp^{1/2}[(\tau - \theta)^2 - C], & 0 \leq \tau - \theta \leq \tau_1, \\ C/2[\text{ch}(C^{1/2}/2)(\tau - \theta - \theta_1)]^{-2}, & \tau_1 \leq \tau - \theta \leq \tau_2, \\ \exp^{1/2}[(\tau - \theta - \theta_2)^2 - C], & \tau_2 \leq \tau - \theta \leq \tau_3, \end{cases} \quad (40)$$

где

$$\theta_1 = C^{1/2} + 2/C^{1/2} \text{arcch}(C/2)^{1/2}, \quad \theta_2 = 2\theta_1, \quad (41)$$

а

$$\tau_1 = \theta + C^{1/2}, \quad \tau_2 = \theta + C^{1/2} + (4/C^{1/2}) \text{arcch}(C/2)^{1/2}, \quad \tau_3 = \theta + 2\theta_1. \quad (42)$$

Величина  $\theta$  произвольный параметр, который в автономной системе остается неопределенным.

Теперь можно определить период пульсаций  $T$  и длительность импульса. Нетрудно видеть (см. рис.14), что

$$T = \tau_3 - \theta = 2C^{1/2} + (4/C^{1/2}) \text{arcch}(C/2)^{1/2}. \quad (43)$$

Период растет с ростом максимального значения импульса  $X_{\max} = C/2$ . Длительность импульса, определяемая по его полувысоте,

$$\tau_{1/2} = (4/C^{1/2}) \text{arcch} 2^{1/2} \approx 3.525/C^{1/2} \quad (44)$$

убывает с ростом  $C$ . Таким образом, с ростом интенсивности импульса его длительность уменьшается, а интервал между импульсами увеличивается. В итоге средняя интенсивность почти сохраняется. Более строгий численный расчет показывает, что она медленно растет с ростом  $X_{\max}$ .

Очевидно, что полное решение уравнения (33) определяется функцией (40), повторяемой с периодом (43). Описываемые таким образом периодические пульсации мощности излучения лазера обычно называют релаксационными, а соответствующий им предельный цикл - релаксационным.

Поскольку параметр  $C$  в функции  $X_0(\tau; C)$  может принимать любые положительные значения, эта функция определяет континуум периодических решений уравнения (30). Реальное нелинейное уравнение (27), в отличие от (30), имеет конечное число периодических решений, то есть константа  $C$  должна принимать конечное число значений. Оказывается, что эти значения  $C$  являются решением уравнения

$$F(C) = \int_0^T f(X_0', X_0; \tau)(X_0'/X_0^2) d\tau = 0. \quad (45)$$

Мы не будем здесь приводить достаточно длинного вывода этого соотношения, отсылая читателя к литературе [26]. Заметим лишь, что идея его вывода восходит к А. Пуанкаре и состоит в следующем. Ищется  $X_1$ , следующий член разложения решения в ряд по малому параметру  $\varepsilon$ . В этом приближении в правой части уравнений будет стоять известная уже функция времени с неопределенным значением константы  $C$ , а в левой части - линейризованное относительно  $X_1$  уравнение (30). Если мы ищем периодические решения исходной системы уравнений, то  $X_1$  тоже должно быть периодическим. Оказывается, однако, что решение линейризованного уравнения при произвольном  $C$  имеет неперриодические члены. Для того, чтобы решение стало периодическим, необходимо потребовать обращения неперриодических членов в нуль, что и приводит к уравнению (45).

Если в соотношение (45) подставить значение функции  $f(X_0', X_0; \tau)$  из (28), то в результате мы получим тривиальное решение  $C=0$ . Таким образом, сама по себе система уравнений (24) обладает скудной динамикой. Но ситуация резко меняется даже при небольшом изменении функции  $f(X_0', X_0; \tau)$ . Продемонстрируем это утверждение на примере задачи о малой модуляции добротности одномодового лазера. Исследуем решения уравнений

$$\frac{dW}{dt} + \frac{1}{\tau_c} [1 + m \cos \Omega(t - \vartheta)] W = \sigma N W, \quad (46a)$$

$$\frac{dN}{dt} + \frac{1}{\tau_1} N = I - 2\sigma N W. \quad (46b)$$

От системы (24) они отличаются введением периодического изменения параметра, описывающего затухание фотонов в резонаторе. Коэффициент модуляции потерь предполагаем малым. Тогда можно показать, что

$$f(X', X; \tau) = -X' [1 + (r - 1)X] + m(\Omega \tau_1) / (\Omega_0 \tau_c) X \sin[\Omega / \Omega_0 (\tau - \vartheta)]. \quad (47)$$

Для упрощения математических выкладок мы выбираем систему отсчета времени такой, что ее начало ( $\tau=0$ ) совпадает с минимумом импульсов, генерируемых в установившемся режиме, и  $\vartheta = \Omega_0 \vartheta$  - постоянная величина, описывающая фазовый сдвиг между сигналом модуляции и генерируемым излучением (рис.15).

Будем искать периодические решения уравнений (46), с периодом  $T=2\pi/\Omega$ . В соответствии с (43) задание периода однозначно определяет константу  $C$ . Поэтому при заданном  $m$  уравнение (45) определит значение параметра  $\vartheta$ . Для определения  $F(C)$  необходимо вычислить соответствующий интеграл по периоду  $T$ . Разбивая весь путь интегрирования на три интервала: от 0 до  $\tau_1$ , от  $\tau_1$  до  $\tau_2$  и от  $\tau_2$  до  $\tau_3$ , мы можем в качестве  $X_0$  использовать функцию, заданную соотношениями (40). В результате получаем

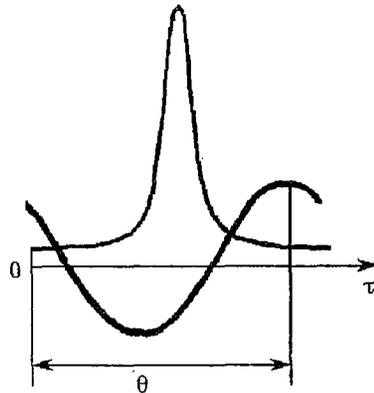


Рис. 15. К расчету возбуждения релаксационных пульсаций лазера методом модуляции потерь в резонаторе

$$F(C) = -r[2/3C^{3/2} + 2C^{1/2}(\ln 2C - 2)] - 4m(\sin\theta)(\Omega\tau_1)/(\Omega_0\tau_c)\ln C. \quad (48)$$

При достаточно больших значениях  $C$  период пульсаций практически равен  $2C^{1/2}$  (или в размерном времени  $2C^{1/2}/\Omega_0$ ). Поэтому в рассматриваемом случае  $C = \pi^2\Omega^2/\Omega_0^2$ , и из условия  $F(C)=0$  получаем соотношение

$$m\sin\theta = -\frac{r}{6\pi} \frac{\tau_c}{\tau_1} \frac{C^2 + 3C(\ln 2C - 2)}{\ln C}. \quad (49)$$

Поскольку  $|\sin\theta| < 1$ , то из соотношения (49) вытекает пороговое условие на глубину модуляции

$$m \geq \frac{r}{6\pi} \frac{\tau_c}{\tau_1} \frac{C^2 + 3C(\ln 2C - 2)}{\ln C}. \quad (50)$$

Так как  $\tau_c/\tau_1 \ll 1$ , то очень неглубокой модуляции добротности достаточно, чтобы возбудить глубокие пульсации лазерного излучения.

Численные исследования показывают, что при постепенном увеличении глубины модуляции система проходит через серию бифуркаций удвоения периода и, в конечном счете, входит в режим динамического хаоса.

Переход к хаосу в лазере с модуляцией добротности возможен не только при увеличении глубины модуляции, но и при изменении ее частоты. В работе [27] исследовалась система уравнений (24) при следующих параметрах:  $\tau_1=10^{-3}$  с;  $\tau_c=1.4 \cdot 10^{-8}$  с;  $\sigma I=2 \cdot 10^{11}$  с<sup>-2</sup>. При фиксированной глубине модуляции и изменении ее частоты наблюдался переход от регулярных пульсаций к хаосу через удвоение периода осцилляций. Наиболее интересный результат этих расчетов состоит в том, что при  $\Omega/2\pi \equiv f=119$  кГц и  $m=2\%$  возникают два сосуществующих аттрактора, соответствующих субгармоникам  $f/2$  и  $f/3$ . Это обстоятельство демонстрирует рис.16. В зависимости от начальных условий лазер генерирует пульсации либо с периодом  $2/f$  либо с периодом  $3/f$ . В частности, на рис. 16 при начальном условии

$W_0=4 \cdot 10^8$ ,  $\dot{W}_0=0$  система выходит на штриховой цикл, а при  $W_0=2 \cdot 10^5$ ,  $\dot{W}_0=-2 \cdot 10^6$  - на цикл, нарисованный сплошной линией. В работе [27] утверждается также, что подбором начальных условий удается выйти на третий цикл с периодом равным  $10/f$ .

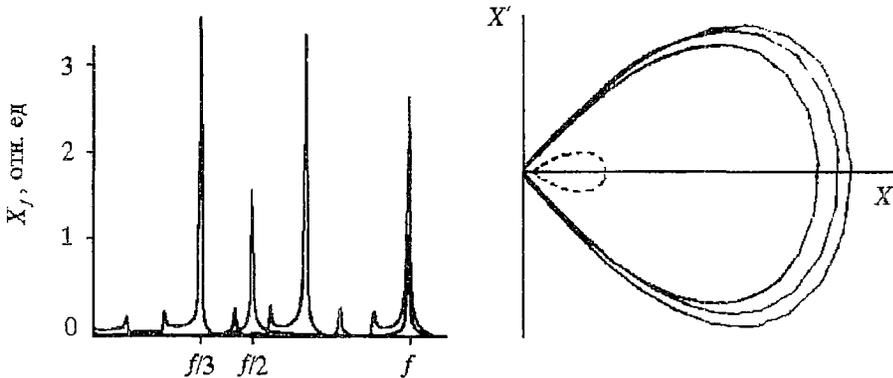


Рис. 16. Спектр пульсаций  $X_f$  и вид предельных циклов в фазовом пространстве лазера ( $X, X'$ ) с периодически модулируемыми потерями резонатора (расчет)

## 5. Модель неоднородного уширения

В основе уравнений (2) лежит двухуровневая модель вещества. Уравнения, описывающие режимы генерации в реальном лазере, могут заметно отличаться от

уравнений (2). Одно из таких отличий состоит в необходимости учета неоднородности (для газовых лазеров - доплеровского) уширения спектральной линии. Неоднородное уширение можно учесть в рамках двухуровневой модели активного вещества, считая, что в резонаторе с полем взаимодействует большое (в пределе - бесконечно большое) количество двухуровневых систем с различными резонансными частотами  $\omega$ . В таком случае уравнения (4) для поляризации и числа частиц останутся неизменными, а в уравнении для поля в правой части должна стоять сумма поляризаций, соответствующих переходам с различными резонансными частотами,

$$\left[ \frac{d}{dt} + \frac{\omega_c}{2Q} \right] E = i2\pi\omega_c \int P(\omega) g(\omega, \omega_0) d\omega, \quad (51a)$$

$$\left[ \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_2} + i(\omega - \omega_c) \right] P(\omega) = -i \frac{|\mu|^2}{\hbar} N(\omega) E, \quad (51б)$$

$$\left[ \frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau_2} \right] N(\omega) = I(\omega) + \frac{i}{2\hbar} [EP^*(\omega) - E^*P(\omega)], \quad (51в)$$

где  $g(\omega, \omega_0)$  - нормированная на единицу форма контура неоднородно уширенной линии с центром в точке  $\omega_0$ ,  $I(\omega)$  - спектральная плотность накачки.

Уравнения (51) трудны для анализа. Модель простейшего приближения к неоднородно уширенной линии состоит в предположении, что с полем определенной моды резонатора взаимодействуют две совершенно одинаковые линии активного вещества, собственные частоты которых  $\omega_+$  и  $\omega_-$  расположены симметрично по обе стороны от собственной частоты моды. Это соответствует случаю совпадения резонансной частоты неоднородно уширенной спектральной линии  $\omega_0$  с собственной частотой резонатора. Частотный интервал  $\omega_+ - \omega_-$  предполагается равным неоднородной ширине линии. Уравнения, описывающие динамику генерации в рамках такой модели, имеют вид

$$dx/d\tau = -\sigma(x - y), \quad (52a)$$

$$dy/d\tau = -y - i\xi v + (1 + \xi^2)xz, \quad (52б)$$

$$dz/d\tau = -b(z - R) - b/2(R - 1)(x^*y + xy^*), \quad (52в)$$

$$dv/d\tau = -v + i\xi y + (1 + \xi^2)xw, \quad (52г)$$

$$dw/d\tau = -bw - b/2(R - 1)(x^*v + xv^*). \quad (52д)$$

В этих уравнениях

$$i \frac{P(\omega_+) + P(\omega_-)}{P_s} = y, \quad i \frac{P(\omega_+) - P(\omega_-)}{P_s} = v,$$

$$\frac{N(\omega_+) + N(\omega_-)}{N_s} = z; \quad \frac{N(\omega_+) - N(\omega_-)}{N_s} = w;$$

$$\xi = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \tau_2, \quad R = \frac{2r}{1 + \xi^2},$$

$P_s$  - значение суммарной поляризации, а  $N_s$  - значение суммарного числа частиц в режиме стационарной генерации. Остальные обозначения те же, что и в уравнениях (12).

Система уравнений (52) имеет стационарные решения: а)  $x=y=v=w=0$ ,  $z=r$ ; б)  $x=y=\pm 1$ ,  $v=-i\xi$ ,  $z=1$ ,  $w=0$ . Устойчивость их проанализирована в работах [19,27-29]. Режим «а» соответствует отсутствию генерации и устойчив, если  $R < 1$ . Режим «б» соответствует генерации с постоянной амплитудой и фазой. Он устойчив, если  $1 < R < R^*$ , причем для  $b=1$  [28, 29]

$$R^* = \sigma \frac{\sigma(1 - \xi^2) + 4}{\sigma - 2}. \quad (53)$$

Как и в случае однородной линии  $R^*$  существует лишь для «плохого» резонатора:  $\sigma > 2$ . Заметим, что (53) переходит в (15), если  $\xi=0$ . В то же время видно, что в зависимости от  $\xi$  параметр  $R^*$  может принимать различные, в том числе достаточно малые значения, если  $\xi > 1$ . Это облегчает экспериментальное наблюдение режимов динамического хаоса в лазерах с неоднородно уширенной линией активного вещества. Однако в рамках рассматриваемой модели диапазон увеличения параметра  $\xi$  ограничен. Дело в том, что при  $\xi^2 > (\sigma+1)^2/[(\sigma+1)^2-2]$  коэффициент самовозбуждения  $r/[1+(\Omega-\omega_0)^2\tau_2^2]$  для каждой отдельной линии (см. формулу (7)) превышает значение  $R$ , и режим генерации на одной центральной частоте становится неустойчивым. Очевидно, что этого не должно быть в случае континуума линий. Такой вывод побуждает предпринять более строгое исследование стационарных решений системы (51) и их устойчивости. Оно может быть выполнено аналитически в предположении, что  $g(\omega, \omega_0)$  - функция Лоренца [30-32]. Проведенные исследования качественно подтверждают основной вывод теории двух линий: при достаточно большой неоднородной ширине параметр  $R^*$  может быть существенно меньше  $r^*$ . Количественные отличия состоят в том, что для  $b=1$  условие плохого резонатора для неоднородно уширенной линии  $\sigma > 1$ , а не  $\sigma > 2$ , как это предсказывает теория двух линий. Одним из наиболее замечательных результатов работы [30] является предсказание бистабильного поведения режимов генерации в лазере с неоднородно уширенной линией при наличии расстройки между частотой резонатора и резонансной частотой линии активного вещества. В некотором интервале изменения параметра  $R$  генерируемая лазером мощность может иметь два значения в зависимости от предыстории. Ограниченный объем данной статьи не позволяет углубляться в эту и другие интересные проблемы, связанные с лазером на основе неоднородно уширенной линии активного вещества. Читатель может ознакомиться с ними по оригинальным и обзорным публикациям [30-41,19,23].

Поскольку спектральные компоненты поляризации активного вещества входят в уравнение для поля (51а) интегрально, возникает идея написать уравнения для интегральных динамических переменных активной среды и свести всю систему (51) к конечному числу обыкновенных уравнений. В работах [23,41] показано, что приближенно такие уравнения могут быть написаны. Результаты исследований динамики лазера на основе этих уравнений можно найти в [23].

## 6. Экспериментальные результаты

Предыдущий анализ показывает, что экспериментальное наблюдение динамического хаоса в лазерах - не простая задача. Главная проблема состоит в том, что практически в любом из широко применяемых лазеров ширина линии люминесценции активной среды превосходит ширину моды в резонаторе, так что для регулярного лазера  $\sigma < 1$ . Как следует из материала предыдущих разделов, динамический хаос в таких лазерах может возникать лишь при модуляции параметра лазера (неавтономный режим работы).

Трудность наблюдения хаоса в лазере с однородно уширенной линией не

только в требовании  $\sigma > 1 + b$ , но и в том, что при этом параметр самовозбуждения  $r$  должен быть большим. Напомним, что  $r_{\min}^* \approx 15$  при  $b=1$ . Как мы видели, положение в отношении  $r$  смягчается, если использовать лазер с неоднородно уширенной линией активного вещества, но при этом требование плохого резонатора остается.

Изложенные обстоятельства определили историческую хронологию экспериментального наблюдения динамического хаоса в лазерах.

**6.1. Неавтономный CO<sub>2</sub>-лазер.** В работе [27] экспериментально исследовано возникновение режима хаотических пульсаций мощности в CO<sub>2</sub>-лазере, работающем на длине волны излучения 10.6 мкм. Параметры лазера, исследованного в работе [27], были следующими:  $\tau_1 = 0.4$  мс;  $\tau_2 \approx 10$  нс; длина резонатора 2 м; потери в резонаторе на проход 20%, чему соответствует  $\tau_c = 3 \cdot 10^{-8}$  с;  $\Omega_0/2\pi = 43$  кГц. Накачка лазера обеспечивала выходную мощность 50 мкВт. Время жизни фотонов в резонаторе изменялось по закону  $(1/\tau_c)(1 + m \cos \Omega t)$  с помощью электрооптического модулятора. Частота модуляции  $f = \Omega/2\pi$  могла перестраиваться от 40 до 100 кГц. Выходная мощность лазера детектировалась пьезоэлектрическим детектором с временным разрешением 2.5 нс. Ток пьезоэлектрического детектора пропорционален числу фотонов в резонаторе  $W$ . Этот сигнал подавался на X-ось осциллографа. На Y-ось подавался сигнал, пропорциональный  $W'$ , так что на осциллографе регистрировалась фазовая диаграмма колебаний интенсивности лазера. Наряду с этим с помощью спектроанализатора регистрировался спектр функции  $W(t)$  (спектр мощности генерации).

Изменение глубины модуляции в пределах от 1 до 5% не приводило к появлению каких-либо особенностей в режиме генерации. Поэтому были детально изучены режимы генерации при фиксированной глубине модуляции  $m=0.01$  и различных частотах модуляции.

На рис. 17 представлены спектры мощности и фазовые портреты колебаний при изменении частоты  $f$ . При частоте модуляции  $f < 62.75$  кГц лазер генерирует импульсы излучения с периодом  $T = 1/f$  (на рисунке не показано). Рис. 17, а соответствует частоте  $f=62.75$  кГц. При этой частоте модуляции возникает движение с удвоенным периодом, что отражено присутствием в спектре субгармоники с частотой  $1/2f$ . Рис. 17, б соответствует частоте модуляции  $f = 63.80$  кГц. При этой частоте возникает следующее удвоение периода, что отражено портретом предельного цикла и наличием в спектре субгармоники  $1/4f$ . При  $f = 64.00$  кГц наблюдается странный аттрактор (см. рис. 17, в). Осциллограф не разрешает отдельные витки траекторий. Спектр мощности непрерывный с одним небольшим пиком на частоте модуляции (следует обратить внимание на изменение масштаба оси ординат в сравнении с другими картинками этого рисунка). Дальнейшее небольшое увеличение частоты до значения  $f=64.13$  кГц приводит к исчезновению странного аттрактора и возникновению цикла,

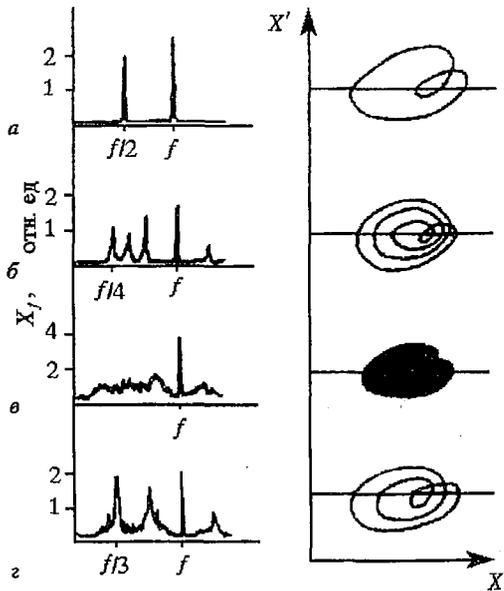


Рис. 17. Спектр пульсаций  $X_f$  и вид предельных циклов в фазовом пространстве лазера ( $X', X$ ) с периодически модулируемыми потерями резонатора (эксперимент)

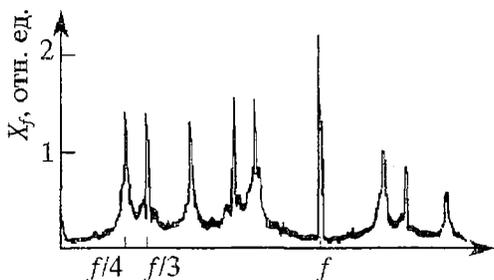


Рис. 18. Спектр пульсаций  $X_f$  лазера с периодически модулируемыми потерями резонатора: видно возникновение двух предельных циклов с периодами  $3f$  и  $4f$  (эксперимент)

соответствующего третьей субгармонике возбуждающей частоты (см. рис. 17, з). При  $f > 64.25$  кГц наблюдается устойчивый предельный цикл, период которого точно соответствует частоте модуляции. Было экспериментально обнаружено, что при частоте модуляции  $f = 63.85$  кГц рождается второй предельный цикл утроенного периода, сосуществующий с ранее появившимся циклом учетверенного периода (рис.18). Переход от режима учетверения периода (см. рис.17, б) к хаосу (см. рис.17, в) происходит путем слияния этих циклов.

Как видно из приведенного выше перечня параметров  $\text{CO}_2$ -лазера, исследованного в работе [27], ширина спектральной линии активного вещества примерно в три раза больше полосы пропускания резонатора. Поэтому можно надеяться, что модель (46) качественно применима для описания режимов генерации в таком лазере. Численное моделирование, изложенное в разделе 4, было проделано в связи с описанными экспериментами с  $\text{CO}_2$ -лазером. Как мы видели, расчет показывает возникновение второго цикла уже в области удвоения периода, а не учетверения, как показывает эксперимент. Возможно, это связано с тем, что, строго говоря,  $\text{CO}_2$ -лазер - многоуровневая система. Сведение модели, описывающей его динамику, к двухуровневой представляет собой сравнительно грубое приближение. Тем не менее, предсказания, основанные на двухуровневой модели, находят хорошее качественное подтверждение экспериментом: в лазере на основе появления четной и нечетной субгармоник возникают по крайней мере два устойчивых предельных цикла, слияние которых приводит к рождению странного аттрактора.

Экспериментальные исследования  $\text{CO}_2$ -лазера с модулируемыми параметрами нашли свое развитие в последующих работах. В частности, в [42] исследованы  $\text{CO}_2$ -лазеры с модулированной накачкой.

Эксперименты, близкие по духу к исследованиям  $\text{CO}_2$ -лазеров, были проведены с лазером бегущих волн на основе активированного неодимом алюмоиттриевого граната (YAG) [43]. Авторам этой работы удалось проследить переход от режима генерации с постоянной амплитудой к хаотическим пульсациям путем изменения глубины модуляции добротности резонатора при фиксированной частоте модуляции. Этому эксперименту предшествовали теоретические изыскания [44,45], результаты которых качественно подтвердились опытными данными.

**6.2. Автономная система. Неоднородное уширение.** Первые эксперименты по наблюдению стохастических режимов генерации в лазерах с неоднородно уширенной линией удалось провести авторам работы [46]. Предтечей этой работы можно считать эксперименты, описанные в [47 - 49]. В работе [47] исследовался полупроводниковый лазер при гелиевой температуре. Авторы экспериментально обнаружили существование второго порога по  $r$ , при котором возникали периодические пульсации амплитуды генерируемого излучения. Соответствующее условиям эксперимента значение параметра  $b$  было значительно меньше единицы. Хотя достичь условий хаоса в работе [47] не удалось, это была первая экспериментальная работа, посвященная целенаправленному поиску нестабильности, предсказанной теорией одномодового лазера.

Авторам работ [48, 49] удалось впервые наблюдать режим регулярных пульсаций в газовом лазере.

Эксперименты [46] были проведены с электроразрядным He-Xe-лазером, причем принимались специальные меры для того, чтобы добиться превышения полосы пропускания резонатора над однородной шириной линии и достичь

значения параметра  $\sigma > 2$ . Наблюдались три сценария перехода от стационарной генерации к стохастическому режиму.

1. Переход через удвоение периода регулярных пульсаций мощности наблюдался при перестройке частоты резонатора для следующих параметров лазера. Состав рабочего газа: [Xe]-175мТорр; [He]-0.7Торр. Общая однородная ширина линии за счет спонтанного излучения и соударений  $1/\tau_2 = (6.1 \pm 0.3)10^7 \text{ с}^{-1}$ . Затухание моды резонатора  $\omega/2Q = (3.3 \pm 0.5)10^8 \text{ с}^{-1}$ , чему соответствует значение  $\sigma = 5.4$ . Максимальный коэффициент самовозбуждения  $r_{\text{max}} = 2.3$ .

При перестройке частоты резонатора по мере приближения ее к значению, соответствующему максимуму усиления, параметр  $r$  возрастает и лазер через серию бифуркаций удвоения периода пульсаций переходит в режим генерации с широким спектром излучения, соответствующим хаотическим пульсациям мощности.

2. Двухчастотный переход к режиму хаотических пульсаций мощности наблюдался при постепенном увеличении разрядного тока. Параметры лазера при этом были следующими: [Xe]-175мТорр; [He]-0.3Торр,  $1/\tau_2 = (3.8 \pm 0.3)10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega/2Q = (3.3 \pm 0.5)10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $\sigma = 8.7$ . Важно, чтобы расстройка между частотой генерируемой моды резонатора и вершиной спектральной линии попадала в определенную область. К сожалению, в работе [46] не приводится конкретного значения расстройки. Режим хаотических пульсаций возникал при  $r = 2.2$ .

3. Переход к хаосу через перемежаемость режимов возникал при следующих параметрах лазера: [Xe]-175мТорр; гелий в смеси отсутствовал;  $1/\tau_2 = (2.0 \pm 0.1)10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega/2Q = (3.3 \pm 0.5)10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $\sigma = 16.5$ . В этом случае с ростом возбуждающего тока (или параметра  $r$ ) регулярные пульсации мощности все чаще перемежаются нерегулярностями в колебаниях; спектр пульсаций постепенно уширяется. При  $r = 2.2$  пульсации мощности полностью теряют регулярность, а спектр становится сплошным в пределах от 0 до примерно 50 МГц.

**6.3. Однородно уширенная спектральная линия.** Как мы видели (см. раздел 1), для наблюдения динамического хаоса в лазере с однородно уширенной линией активного вещества необходима линия усиления с шириной, меньшей полосы пропускания моды резонатора ( $\sigma > 1 + b$ ) и большой коэффициент возбуждения  $r$ . Удовлетворить этим условиям удалось путем создания лазера на основе молекул  $\text{NH}_3$  [50-52]. Мы обсудим более подробно результаты работы [52]. В этой работе газ молекул  $^{15}\text{NH}_3$  возбуждался излучением  $^{13}\text{CO}_2$ -лазера. Для генерации использовался чисто вращательный переход  $aR(4,4)$  с длиной волны 153 мкм. Априори можно было надеяться, что при сравнительно больших давлениях газа в активной среде линия усиления будет однородно уширена, и режимы генерации в лазере будут следовать теории, описанной в разделе 1. Эти ожидания полностью подтвердились. На рис. 19 показаны пульсации, наблюдавшиеся в  $^{15}\text{NH}_3$ -лазере при следующих параметрах:  $\sigma = 4.5$ ;  $b = 0.25$ ;  $r > 10.5$ ; отсутствовала

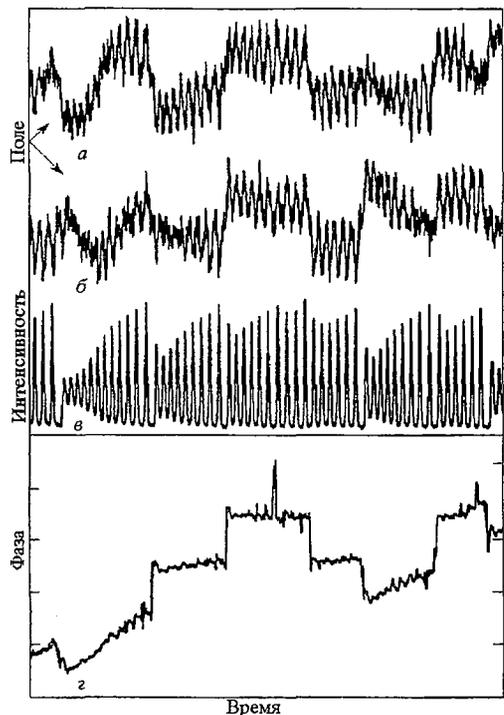


Рис. 19. Пульсации амплитуды, интенсивности и фазы в лазере с однородно уширенной линией (эксперимент)

расстройка между резонансами линий усиления и моды. Как видно, картина хаотических пульсаций находится в полном соответствии с теоретическими предсказаниями (см. рис.1 - 3).

При сравнительно низких давлениях наблюдались заметные отклонения от предсказаний двухуровневой модели с однородно уширенной линией усиления. В частности, при низких давлениях и расстройке наблюдался несимметричный гомоклинический странный аттрактор Шильникова. За подробностями мы отсылаем читателя к оригинальным работам [52,53] и цитируемой в них литературе.

### Вместо заключения

Настоящая заметка - это своего рода историческое эссе, а не последовательный обзор по динамике лазеров: слишком много информации, полученной к настоящему времени, осталось «за кадром». Имеющиеся монографии помогут значительно расширить кругозор читателя [54-65]. Но монографиям трудно поспеть за быстро бегущим временем. Поэтому, не имея реальной возможности дать развернутый обзор нелинейной динамики лазеров, я сделал попытку в заключение перечислить основные направления исследований, ведущихся в этой обширной области.

**Одномодовые системы.** 1. *Лазеры с инжектируемым сигналом* [10,66-76]. Воздействие на лазер производится путем прямого введения внешнего излучения в резонатор. Лазер в этом случае часто используется, как сверхрегенеративный усилитель. Но интерес к нему обусловлен также и тем, что он демонстрирует сложную динамику.

2. *Резонансный насыщающийся поглотитель в резонаторе*, возбуждаемом внешним сигналом. Такая система внешне напоминает лазер с инжектируемым сигналом. Она проявляет бистабильные свойства и в настоящее время является наиболее популярной моделью бистабильного оптического элемента [77-83].

3. *Лазеры с насыщающимся фильтром* [84-99]. Такого типа лазеры часто используются как генераторы коротких импульсов. В свое время он был «популярен» как бистабильный оптический элемент и в полупроводниковом исполнении рассматривался как основной кандидат на место логического элемента, необходимого для создания оптического компьютера [86, 87]. Но время вносит коррективы... Лазеру с насыщающимся нелинейным элементом близки по духу лазеры с другими типами нелинейности внутри резонатора [96 -98]. Сюда же можно отнести лазеры на основе активных сред, сечение индуцированного перехода в которых зависит от температуры, изменяющейся с изменением мощности генерации [100-102].

4. *Лазеры с запаздывающей обратной связью* [25,103-110]. В конце 60-х полупроводниковый лазер с запаздывающей обратной связью рассматривался как один из вариантов генератора коротких субнаносекундных световых импульсов [25]. Впоследствии он приобрел популярность в форме полупроводникового лазера с внешним резонатором, используемым для стабилизации частоты и уменьшения спектральной ширины линии генерации лазера [103], но тут же ввиду богатства динамических режимов он стал «добычей» нелинейных динамиков.

**Многомодовые системы.** Очевидно, что с возрастанием числа мод динамические возможности системы неограниченно возрастают. Возрастают и трудности анализа таких систем, так что многомодовые системы еще сравнительно малоизученная область.

1. *Противофазная динамика* [111-117]. Истоки этих работ в попытках понять сложную динамику генерации твердотельных лазеров на основе механизма нелинейного взаимодействия близких по частоте мод [111-114].

2. *Взаимодействие многих мод в лазерах* [25,41,118-125]. Сюда следует отнести динамику межмодового взаимодействия в связи с проблемой чувствительности метода внутррезонаторной лазерной спектроскопии [126].

3. *Поперечная динамика лазерного излучения, формирование структур* [127-130].

#### 4. Динамика лазерных решеток [131-134].

5. *Генерация высших гармоник.* Развитие метода генерации гармоник путем помещения нелинейного элемента внутрь резонатора сделало генераторы гармоник динамически интересными системами. По существу, генераторы гармоник - это разновидность многомодового генератора. Даже если задающий генератор одномодовый, все устройство в целом представляет собой двухмодовую модель, описывающую поле основной частоты и поле гармоники [135 - 137].

*Управление хаосом.* В последние годы стала популярной тема управления хаосом. Еще в работе [6] было показано, что хаотические пульсации можно подавить внешним сигналом. Той же цели может служить отрицательная обратная связь [138]. Разрабатываемые в последние годы методы основаны на идее выбора желаемой фазовой траектории из множества траекторий странного аттрактора и ее поддержания с помощью малого управляющего сигнала [139-144].

*Трехуровневые модели.* В основе большинства работ по динамике лазеров лежит двухуровневая модель активной среды. Фактически же для стационарной накачки лазеров необходима, как минимум, трехуровневая система<sup>2</sup>. Однако, если накачка производится некогерентным источником энергии, то динамическая модель такого лазера, как правило, может быть сведена к двухуровневой схеме. При накачке лазера когерентным излучением реальная динамическая система усложняется. В этом случае квантовые переходы между всеми парами трехуровневой схемы играют существенную роль в динамике лазера, и модель лазера не может быть сведена к двухуровневой схеме. Это обстоятельство привело к появлению серии публикаций по динамике «трехуровневых» лазеров [145 - 150].

*Другие системы.* Недавние теоретические исследования показали [151-153], что мазер на основе пучка моноскоростных атомов или молекул демонстрирует богатую динамику мультистабильных режимов. К сожалению, пока нет экспериментальных работ на эту тему, хотя оценки указывают на возможность постановки экспериментов [153].

Многие современные лазеры используют сверхзвуковые потоки активного вещества. Движение активной среды может обусловить взаимодействие мод в таких системах [154], что делает изучение динамики быстропроточных лазеров интересной проблемой.

Проблема динамической стохастичности в лазерах и других нелинейных оптических системах остается предметом пристального внимания исследователей вплоть до сегодняшних дней. Она стала темой специальных выпусков ряда известных журналов (см., например, [155] и серии специализированных конференций IDLNOS'85 [156], NDOS'90 [157], NDOS'92 [158], NDLOS'93 [159], NDOS'95 [160]).

Приведенный список литературы, несмотря на его внушительный объем, не претендует на полноту. Составление исчерпывающего списка - за пределами моих возможностей. Ряд авторов фигурируют в списке неявно: их работы можно найти в литературном перечне монографий, обзоров и в трудах конференций. Я приношу извинения тем авторам, публикации которых остались вне моего поля зрения.

### Библиографический список

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
3. Рюэль Д., Такенс Ф. О природе турбулентности // Странные аттракторы/ Пер. с англ. под ред. Я.Г.Синая, Л.П.Шильникова. М.: Мир, 1981. 117 с.

<sup>2</sup> Исключением являются инжекционный лазер и мазер на пучке атомов (молекул). В этих системах используется пространственное движение излучателей.

4. Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. 88 с.
5. Грасюк А.З., Ораевский А.Н. Переходные процессы в молекулярном генераторе // РЭ. 1964. Т. 9, № 3. С.524.
6. Grasiuk A.Z., Oraevsky A.N. Transient processes in a beam maser // Proc. of the 4-th International Congress on Microwave Tubes. September, 1962. Sheveningen, Holland. P. 446.
- Grasiuk A.Z., Oraevsky A.N. The Dynamics of quantum oscillator. Estratto da Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica «E.Fermi», XXXI Corso. P.192 (August 1963, Varenna, Italy); in Quantum Electronics and Coherent Light / Ed. P.A. Miles. N.-Y.: Academic press, 1964.
7. Ораевский А.Н. Молекулярные генераторы. М.: Наука, 1984.
8. Haken H. Analogy between higher instabilities in fluids and lasers // Phys. Lett. A. 1975. Vol. 53, № 1. P. 77.
9. Файн В.М. Об уравнениях колебаний молекулярного генератора // ЖЭТФ. 1957. Т. 3. С. 945.
10. Ораевский А.Н. К теории молекулярного генератора // РЭ. 1959. Т. 4, № 4. С. 718.
11. Ораевский А.Н., Торонов В.Ю. Влияние флуктуаций на аттрактор в модели одномодового лазера // Квантовая электроника. 1989. Т. 16, № 10. С. 2063.
12. Ленфорд О. Изображение аттрактора Лоренца, полученное с помощью компьютера // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. 73 с.
13. Монин А.С. О природе турбулентности // УФН. 1978. Т. 125, № 1. С.97.
14. Рабинович М.И. Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН. 1978. Т. 125, № 1. С. 123
15. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Л.И.Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн // УФН. 1979. Т. 128, № 4. С. 579.
16. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры. Препр. № 187. Горький: Ин-т прикл.физики АН СССР, 1983.
17. Ott E. Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems // Rev.Mod.Phys. 1981.Vol.53. № 4, Pt. 1. P. 655.
18. Hofstadter D.R. Strange attractors: mathematical patterns delicately poised between order and chaos // Sci. Amer. 1980. P.16.
19. Ораевский А.Н. Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т.8, № 1. С. 130.
20. Вильямс Р.Ф. Структура аттракторов Лоренца // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. 58 с.
21. Каплан Д., Иорке Дж. Предтурбулентность: режим, наблюдаемый в течении жидкости, описываемый моделью Лоренца // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. 213 с.
22. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР. 1977. Т. 234. 336 с.
23. Торонов В.Ю. Исследование динамических моделей одномодового лазера: Дисс.канд. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 1992.
24. Ledrappier F. Some relations between dimension and Lyapunov exponents // Comm. Math. Phys. 1981. Vol.81, № 2. P. 229.
25. Беленов Э.М., Морозов В.Н., Ораевский А.Н. Вопросы динамики квантовых генераторов // Тр. ФИАН. 1970. Т. 52. С. 237.
26. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний М.: ГИТТЛ, 1956.
27. Arecchi F.T., Meucci R., Puccioni G.P., Tredicce J.R. Experimental Evidence of Subharmonic Bifurcations, Multistability, and Turbulence in a Q-Switched Gas Laser // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 49, № 17. P. 1217.
28. Идиатулин В.С., Успенский А.В. Режимы в генераторе с неоднородно уширенной линией // Матер. II Всесоюз. семинара-совещания «Метрология в радиоэлектронике». М., 1971. С. 68.

29. Владимирский К.В. Об устойчивости генерации на неоднородно уширенной линии // Крат. сообщ. по физике. М.: ФИАН, 1971. № 10. С. 41.
30. Lugiato L.A., Narducci L.M., Bandy D.K., Abraham N.B. Instabilities in inhomogeneously broadened single-mode lasers // Opt. Comm. 1983. Vol. 46. P. 115.
31. Mandel P. Influence of Lorentz broadening on the stability of monomode ring lasers // Opt. Comm. 1983. Vol. 45. P. 269.
32. Mandel P. Properties of Lorentz-broadened single-mode unidirectional ring laser // JOSA-B. 1985. Vol. 2. P. 112.
33. Abraham N.B., Lugiato L.A., Mandel P., Narducci L.M., Bandy D.K. Steady-state and unstable behavior of a single-mode inhomogeneously broadened laser // JOSA-B. 1985. Vol. 2. P. 35.
34. Bandy D.K., Narducci L.M., Lugiato L.A., Abraham N.B. Time-dependent behavior of a unidirectional ring laser with inhomogeneous broadening // JOSA-B, 1985. Vol. 2. P. 56.
35. Casperson L.M. Spontaneous coherent pulsation in ring-laser oscillators: stability criteria // JOSA-B. 1985. Vol. 5. P. 933.
36. Tarroja M.F.H., Abraham N.B., Bandy D.K., Narducci L.M. Periodic and chaotic output pulsations in a single-mode inhomogeneously broadened laser // Phys. Rev. A. 1986. Vol. 34. P. 3148.
37. Casperson L.M. Stability criteria for lasers with mixed line broadening // Opt. & Quant. Electron. 1987. Vol. 17. P. 29.
38. Casperson L.M. Spontaneous coherent pulsation in standing-wave laser oscillator // JOSA-B. 1988. Vol. 5. P. 107.
39. Casperson L.M. Gas laser instabilities and their interpretation // Optical Instabilities-II / Eds. N.B. Abraham, F.T. Arecchi, L.A. Lugiato. N.- Y.: Plenum Press, 1988. P. 83.
40. Ораевский Ф.Н., Проценко И.Е., Сафонова М.А., Торонов В.Ю. Динамические режимы в лазере с двумя резонансными линиями активной среды // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т. 31. С. 300.
41. Мельников А.Л. Пространственно-временная динамика световых полей в лазерах, резонансных средах и оптических волноводах: Дисс. док. физ.-мат. наук. Саратов: СГУ, 1992.
42. Глова А.Ф., Козлов С.Н., Луханский В.В., Ярцев В.П. Бифуркации и хаос в CO<sub>2</sub>-лазере с периодической накачкой // Квантовая электроника. 1990. Т. 17, № 17. С. 894.
43. Хандохин П.А., Ханин Я.И. Автостохастический режим генерации твердотельного кольцевого лазера с низкочастотной периодической модуляцией потерь // Квантовая электроника. 1984. Т. 11, № 1. С. 1483.
44. Переведенцева Г.В., Хандохин П.А., Ханин Я.И. К теории одночастотного кольцевого твердотельного лазера // Квантовая электроника. 1980. Т. 7, № 1. С. 128.
45. Ivanov D.V., Khanin Ya.I., Matorin I.I., Pikovsky A.S. Chaos in a solid-state laser with periodically modulated losses // Phys. Lett. A. 1982. № 2. P. 229.
46. Gioggia R.S., Abraham N.B. Routs to chaotic output from a single-mode dc-excited laser // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51, № 8. P. 650.
47. Литвинов В.Ф., Молочев В.И., Морозов В.Н., Никитин В.В., Семенов А.С. Динамическая неустойчивость полупроводникового лазера при низких температурах // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19, № 12. С. 747.
48. Minden M.L., Casperson L.W. Dispersion-induced instability in CW laser oscillators // IEEE J. Quant. Electron. 1978. Vol. 18. P. 1952.
49. Bentley J., Abraham N.B. Mode-pulling, mode-splitting and pulsing in a high gain He-Xe-laser // Opt. Comm. 1982. Vol. 41, № 1. P. 52.
50. Biswas D.J., Harrison R.G. Observation of optical turbulence in a single mode homogeneously broadened optically pumped molecular laser // Opt. Comm. 1985. Vol. 54, № 2. P. 112.
51. Weiss C.O., Brock J. Evidence of Lorenz-type chaos in a laser // Phys. Rev. 1986. Vol. 57, № 22. P. 2804.

52. Weiss C.O., Abraham N.B., Hubner U. Homoclinic and heteroclinic chaos in single-mode laser // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 61, № 14. P. 1587.
53. Abraham N.B., Dangoisse D., Glorieux P., Mandel P. Observation of undamped pulsation in a low-pressure far-infrared laser and comparison with a simple theoretical model // JOSA-B. 1985. Vol. 2. P. 23.
54. Ханин Я.И. Динамика квантовых генераторов. М.: Сов. радио, 1975.
55. Дементьев В.А., Зубарев Т.Н., Ораевский А.Н. Режимы пульсаций интенсивности излучения в квантовых генераторах // Тр. ФИАН. 1977. Т.91. С. 3.
56. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
57. Ривлин Л.А., Семенов А.Т., Якубович С.Д. Динамика и спектры излучения полупроводниковых лазеров М.: Радио и связь, 1983.
58. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем // УФН. 1983. Т. 141, № 2. С. 343.
59. Войтович А.П. Магнитооптика газовых лазеров. Минск: Наука и техника, 1984.
60. Agrawal G.P., Dutta N.K. Long-wavelength semiconductor lasers. Vsn Nostrand Reinhold. N.-Y. 1986.
61. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
62. Narducci L.M., Abraham N.B. Laser physics and laser instabilities. New Jersey: World Scientific, 1988.
63. Хакен Г. Лазерная светодинамика. М.: Мир, 1988.
64. Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А. Автоколебания в лазерах. Минск: Наука і Тэхніка, 1990.
65. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
66. Gordon J.P. // Proc. IRE. 1962. Vol.50. P.1898.
67. Агабекян А.С., Грасюк А.З., Зубарев И.Г., Ораевский А.Н., Свергун В.И. // РЭ. 1964. Т. 9. С. 2156.
68. Lugiato L.A. // Lett. Nuovo Cimento. 1978. Vol. 23. P. 609.
69. Yamada T., Graham R. Chaos in a laser system under modulated external field // Phys. Rev. Lett.A. 1980. Vol. 45, № 16. P. 1322.
70. Scholz M.J., Yamada T., Brand H., Graham R. // Phys. Lett.A. 1981. Vol. 82. P. 321.
71. Lugiato L.A., Narducci L.M., Bandy D.K., Pennise C.A. // Opt. Comm. 1983. Vol. 46. P. 64.
72. Bandy D.K., Narducci L.M., Pennise C.A., Lugiato L.A. // Coherence and Quantum Optics / Eds. L.Mandel and E.Wolf. N.-Y.: Plenum Press, 1984. Vol.5. P. 585.
73. Arecchi F.T., Lippi G., Puccioni G., Tredicce J. // Coherence and Quantum Optics / Eds. L.Mandel and E.Wolf. N.-Y.: Plenum Press, 1984. Vol. 5. P.1227.
74. Otsuka K., Ivamura H. // Phys. Rev.A. 1983. Vol. 28. P. 3153.
75. Bandy D.K., Narducci L.M., Lugiato L.A. Coexisting attractors in a laser with injected signal // JOSA-B. 1985. Vol. 2. P. 148.
76. G.H.M. van Tartwijk, Lenstra D. Nonlocking behavior of an optically injected diode laser // Proc. of SPIE on Nonlinear dynamics in Lasers and Optical Systems. 1993. Vol. 2099. P. 89.
77. Ikeda K. // Opt. Comm. 1979. Vol.30. P. 257.
78. Lugiato L.A. Optical bistability // Progress in Optics / Ed. E.Wolf. North Holland, Amsterdam, 1984. Vol. XXI. P. 69.
79. Optical bistability / Eds. C.M. Bowden, U.Cifton and R.R. Robl. N.-Y.: Plenum Press, 1981.
80. Optical Bistability II / Eds. C.M. Bowden, H.M. Gibbs and S.L. McCall. N.-Y.: Plenum Press, 1984.
81. Gibbs H.M. Optical bistability: controlling light with light. N.-Y.: Academic Press, 1985.
82. Optical bistability / Eds. H.M Gibbs., P. Mandel, N. Peyghambarian and S.D. Smith. Springer, Berlin, 1986.

83. *Harrison R.J., Firth W.J., Emshary C.A., Al-Saidi I.A.* Observation of period doubling in all-optical resonator containing  $\text{NH}_3$  gas // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 51, № 7. P. 562.
84. *Ривлин Л.А.* Отрицательное резонансное поглощение света в устойчивой среде // *ЖЭТФ.* 1965. Т. 47, № 8. С. 624.
85. *Воропаев Н.Д., Ораевский А.Н.* Режимы в квантовом генераторе при наличии поглощающей примеси // *Изв. вузов. Радиофизика.* 1965. Т. 8. С. 409.
86. *Lasher G., Stern F.* // *Phys. Rev.* 1964. Vol. 133, A533.
87. *Басов Н.Г., Никитин В.В., Семенов А.С.* // *УФН.* 1969. Т. 97, № 4. С. 561.
88. *Arimondo E., Glorieux P.* // *Appl. Phys. Lett.* 1978. Vol. 33, № 1. P. 49.
89. *Arimondo E., Casagrande F., Lugiato L.A., Glorieux P.* // *Appl. Phys. B.* 1983. Vol. 30, № 2. P. 57.
90. *Самсон А.М.* Равновесные состояния, автоколебания, полистабильность и гистерезисные явления в лазерах с просветляющимся фильтром: Препр. № 321. Минск: Ин-т. физики АН БССР, 1984.
91. *Arimondo E., Dagoisse D., Gabbanini C., Menchi E., Papoff F.* // *JOSA-B.* 1987. Vol. 4. P. 892.
92. *Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А.* // *Изв. АН СССР. Сер. физическая.* 1989. Т. 53, № 6. С. 1076.
93. *Hennequin D., Dangoisse D., Glorieux P.* Farey hierarchy in a bimode  $\text{CO}_2$  - laser with saturable absorber // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol. 42, № 11. P. 6966.
94. *Анищенко В.С., Сафонова М.А., Татаркова С.А., Тучин В.В.* Модуляция параметров в лазере с насыщающимся поглотителем // *Квантовая электроника.* 1991. Т. 18, № 9. С. 1066.
95. *Lefranc M., Hennequin D., Dangoisse D.* Homoclinic chaos in a laser containing a saturable absorber // *JOSA-B.* 1991. Vol. 8, № 2. P. 239.
96. *Tatarkova S.A., Tuchin V.V.* Multistability and chaos in laser with saturable absorber // *Laser Physics.* 1992. Vol. 2, № 4. P. 482.
97. *Окулов А.Ю., Ораевский А.Н.* Регулярная и стохастическая автомодуляция излучения в кольцевом лазере с нелинейным элементом // *Квантовая электроника.* 1984. Т. 11, № 9. С. 1844.
98. *Ковалев В.И., Суворов М.Б., Тасмуратов О.С.* Временная динамика и пространственные характеристики генерации  $\text{CO}_2$ -лазера с нелинейной средой в резонаторе // *Изв. АН СССР. Сер. физическая.* 1990. Т. 54, № 10. С. 2062.
99. *Гордиенко В.М., Ковалев В.И., Путивский Ю.Я.* Динамика ТЕА  $\text{CO}_2$ -лазера с кубической нелинейной средой в резонаторе: от стабилизации частоты до хаоса // *Квантовая электроника.* 1994. Т. 21, № 12. С. 1160.
100. *Ораевский А.Н.* Многотемпературная модель и динамика лазера // *Квантовая электроника.* 1990. Т. 17, № 11. С. 1463.
101. *Oraevsky A.N., Clark M.M., Bandy D.K.* Many Temperature Model of a Laser with Dynamics // *Opt. Comm.* 1991. Vol. 85, № 4. P. 360.
102. *Willatzen M., Uskov A., Mork J., Olesen H., Tromborg B., Jauho A.-P.* Non-linear gain suppression in semiconductor lasers due to carrier heating // *IEEE Photon. Technol. Lett.* 1991. Vol. P. 606.
103. *Лойко Н.А.* Нелинейная динамика лазерных систем с запаздыванием: Дисс. док. физ.-мат. наук. Минск: Ин-т физики Белорусской АН, 1993.
104. *Mork J., Tromborg B., Mark J., and Velichansky V.* Instabilities in a laser diode with a strong optical feedback // *Proc. of SPIE.* 1992. Vol. 1837. P. 775.
105. *Mork J., Tromborg B., Christiansen P.L.* Bistability and low-frequency fluctuations in semiconductor lasers with optical feedback // *IEEE J. of Quantum Electronics.* 1988. Vol. 24, № 2. P. 124.
106. *Mork J.* Nonlinear dynamics and stochastic behaviour of semiconductor lasers with optical feedback // *The Technical University of Denmark, Report № S48, March, 1989.*
107. *Anishchenko V.S., Bogoroditsky A.G., Rabinovich E.M.* Bifurcation of the period adding and transition to chaos in a laser generator with delayed feedback // *OSA*

Proc. on Nonlinear Dynamics in Optical System / Eds. N.B. Abraham, Elsa Garmire, Paul Mandel. 1990. P. 415.

108. *Oraevsky A.N.* On the Theory of Thin-Layer Lasers // Sov. J. Quant. Electr. 1992. Vol. 19, № 10. P. 979.

109. *Oraevsky A.N., Denisov P.E., Jones D.J., Bandy D.K.* Nonlinear Dynamics of a Thin-Layer Laser // Proc. of SPIE on Nonlinear Dynamics in Lasers and Optical System. 1993. Vol. 2099. P. 183.

110. *Cerboneschi E., F. de Tomai, Arimondo E.* Low frequency fluctuation instabilities in diod lasers with optical feedback // Proc. of SPIE on Nonlinear Dynamics in Lasers and Optical System. 1993. Vol. 2099. P. 193.

111. *Басов Н.Г., Морозов В.Н., Ораевский А.Н.* Динамика оптического квантового генератора с двумя типами колебаний // ДАН СССР. 1965. Т. 162. С. 781.

112. *Басов Н.Г., Морозов В.Н., Ораевский А.Н.* Нелинейное взаимодействие типов колебаний в оптическом квантовом генераторе // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 895.

113. *Островский Л.А.* Автомодуляция излучения оптического квантового генератора с двухмодовым резонатором // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 1535.

114. *Fleck J. A., Kidder R.E.* Stability of coupled-mode laser equations // J. Appl. Phys. 1965. Vol. 36. P. 2327.

115. *Erich C., Mandel P., Abraham N.B., Zeglache H.* Dynamics of two mode semiconductor laser // IEEE J. of QE. 1992. Vol.18. P. 259.

116. *Mandel P.* Laser rate equations with phase sensitive interaction // IEEE J. of QE. 1993. Vol. 29, № 3. P. 836.

117. *Bielawsky S., Derozier D., Glorieux P.* Antiphase dynamics and polarization effects in the Nd-doped fiber laser // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 46, № 5. P. 2811.

118. *Lamb Jr.W.E.* Theory of an Optical Maser // Phys. Rev.A. 1964. Vol. 134, № 6. P. 1429.

119. *Сучков А.Ф.* Влияние неоднородностей на режим работы квантовых генераторов на твердом теле // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 1495.

120. *Аллахвердян Р.Г., Ораевский А.Н., Сучков А.Ф.* Влияние волноводных свойств на генерацию GaAs-диодного лазера // ЖТФ. 1970. Т. 42, № 2. С. 341.

121. *Аллахвердян Р.Г., Ораевский А.Н., Сучков А.Ф.* Динамика полупроводникового лазера с показателем преломления, зависящего от интенсивности излучения // ЖТФ. 1970. Т. 42, № 2. С. 341.

122. *Bracikowski C., Rajarshi Roy.* Chaos in a multimode solid-state laser system // Chaos. 1991. Vol. 1, № 1. P. 49.

123. *Brunner W., Fischer R., Paul H.* Regular and chaotic behavior of multimode laser // JOSA-B. 1985. Vol. 2, № 1. P. 202.

124. *Melnikov L.A., Rabinovich E.M., Tuchin V.V.* Quasi-periodic oscillations and chaos in a gas discharge active mode-locked laser // JOSA-B. 1988. Vol. 5, № 5. P. 1134.

125. *Victorov E.A., Vitrishchak I.B., Novikov G.E., Orlov O.A., Mak A.A., Sokolov V.A., Ustyugov V.I., Khaleev M.M.* Instabilities and chaos in solid-state lasers as a result of mode coupling // OSA Proc. on Nonlinear Dynamics in Optical System / Eds. N.B.Abraham, Elsa Garmire, Paul Mandel. 1990. P. 410.

126. *Коваленко С.А.* Динамика генерации многомодовых широкополосных лазеров и чувствительность внутрирезонаторной спектроскопии: Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: ФИАН, 1991.

127. *Okulov A.Yu., Oraevsky A.N.* Space-Temporal Behavior of a Light Pulse in nonlinear nondispersive media // JOSA-B. 1986. Vol. 3(5). P. 741.

128. *Lugiato L.A.* Spatio-temporal structures. Prt I // Physics Reports. 1992. Vol. 219, № 3-6. P. 293.

129. *Weiss C.J.* Spatio-temporal structures. Prt II. Vortices and defects in lasers // Physics Reports. 1992. Vol. 219, № 3-6. P. 311.

130. *Arecchi F.T.* Optical Morphogenesis: pattern formation and competition in nonlinear optics // Nuovo Chimento. 1994. Vol. 107-A, № 7. P. 1111.

131. *Butler J.K., Ackley D.E., Botez D.* Coupled-mode analysis of phase-locked injection laser arrays // Appl. Phys. Lett. 1983. Vol. 44, № 3. P. 293.

132. *Kapon E., Katz J., Yariv A.* Supermode analysis of phase-locked arrays of semiconductor // *Opt. Lett.* 1984. Vol. 10. P. 125.
133. *Agraval G.P.* Lateral-mode analysis of gain-guided and index-guided semiconductor-laser arrays // *J. Appl. Phys.* 1985. Vol. 58, № 8. P. 2922.
134. *Wang S.S., Winful H.G.* Dynamics of phase-locked semiconductor laser arrays // *Appl. Phys. Lett.* 1988. Vol. 52, № 22. P. 1774.
135. *McNeil K.J., Drummond P.D., Walls D.F.* Self pulsing in second harmonic generation // *Opt. Comm.* 1978. Vol. 27, № 2. P. 292.
136. *Mandel P., Xiao-Guang Wu.* Second-harmonic generation in a laser cavity // *JOSA -B.* 1986. № 7. P. 940.
137. *Baer T.* Large-amplitude fluctuation due to longitudinal mode coupling in diode-pumped intracavity-doubled Nd: YAG lasers // *JOSA-B.* 1986. № 9. P. 1175.
138. *Агабекян А.С., Грасюк А.З., Зубарев И.Г.* Стабилизация неустойчивого режима в двухуровневом квантовом генераторе // *РЭ.1964.* Т. 9, № 12. С. 2156.
139. *Auerbach D., Cvitanovic P., Eckmann J.-P., Gunaratne G., Procaccia I.* Exploring chaotic motion through periodic orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 58. P. 2387.
140. *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors // *Phys. Rev. A.* 1988. Vol. 37. P. 1711.
141. *Lima R., Pettini M.* Suppression of Chaos by Resonant Parametric Perturbations // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol. 41, № 2. P. 726.
142. *Arimondo E., Casagrande F., Lugiato L.A., Glorieux P.* Repetitive passive Q-switching and bistability in lasers with saturable absorbers // *Appl. Phys.B.* 1983. Vol. 30. P. 57.
143. *Meucci R., Gadomski W., Ciofini M., Arecchi F.T.* Experimental control of chaos by means of weak parametric perturbations // *Phys. Rev. E.* 1994. Vol. 49, № 4. P. 2528.
144. *Rajashi Roy.* Controlling Chaotic Lasers // *Nonlinear Dynamics in Optical Systems: Conference Digest, Rochester, June 5-7, 1995.* P. WA2.
145. *Dupertuis M.A., Salomaa R.R.E., Siegrist M.R.* The Conditions for Lorentz Chaos in the optically-pumped far-infrared laser // *Opt. Comm.* 1986. Vol. 57, № 6. P. 410.
146. *Lawandy N.M., Plant D.V.* On the experimental accessibility of the self-pulsing regime of the Lorentz model for single mode homogeneously broadened lasers // *Opt. Comm.* 1986. Vol. 59, № 1. P. 55.
147. *Moloney J.V., Uppal J.S. and Harrison R.G.* Origin of Chaotic Relaxation Oscillations in an Optically Pumped Molecular Laser // *Phys. Rev. Lett.* 1986. Vol. 59, № 25. P. 2868.
148. *Pujol J., Laguara F., Vilaseca R. and Corbalan R.* Influence of Pump Coherence on the Dynamic Behavior of a Laser // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1988. Vol. 5, № 5. P. 1004.
149. *Khandokhin P.A., Khanin Ya.I. and Koryukin I.V.* Bifurcations and Chaos in the Three Level Model of Laser with Coherent Optical Pumping // *Opt. Comm.* 1988. Vol. 65, № 5. P. 367.
150. *Forysiak W., Moloney J.V. and Harrison R.G.* Bifurcations of an optically Pumped Three-level Laser Model // *Physica D.* 1991. Vol. 53. P. 162.
151. *Ораевский А.Н., Саркисян Т.В., Джонс Д.Дж., Бенди Д.К.* Динамика моноскоростного пучкового лазера // *Квантовая электроника.* 1992. Т. 19, № 3. С. 234.
152. *Casagrande F., Lugiato L.A., Lange W., Walther H.* Multistability in mesoscopic Rydberg-atom systems // *Phys. Rev.A.* 1993. Vol. 48, № 1. P. 790.
153. *Bandy D.K., Jons D.J., Grahem J., Oraevsky A.N., Sarkisian T.V.* Dynamics of a monovelosity-atomic-beam maser in a semiclassical model // *Phys. Rev.A.* 1994. Vol. 50, № 1. P. 685.
154. *Oraevsky A.N.* Nonlinear Dynamics of Gas-Flow Lasers // *9-th International Symposium on Gas-Flow and Chemical Lasers, 21-25 September 1992, Heraklion (Crete, Greece).*
155. *Nonlinear Dynamics of Lasers / Eds. D.K.Bandy, A.N.Oraevsky, J.Tradicce // JOSA-B.* 1988. Vol.5, № 5.

156. Instabilities and dynamics of lasers and nonlinear optical systems // Technical Digest of International meeting, Rochester, N.-Y., 1985.

157. Nonlinear Dynamics in Optical Systems-1992 // Technical Digest, June 22-26, 1992, Alpbach, Austria.

158. Nonlinear Dynamics in Optical Systems / Eds. N.B.Abraham, Elsa Garmire, Paul Mandel // OSA Proc. Oklahoma, June 4-8, 1990, Afton.

159. Nonlinear Dynamics in Lasers and Optical Systems // Proc. of SPIE. 1993. Vol. 2099. P. 162.

160. Nonlinear Dynamics in Optical Systems // Conference Digest. Rochester, 1995, June 5-7.

*Физический институт РАН*

*Поступила в редакцию 21.03.95  
после переработки 30.08.95*

## DYNAMICS OF SINGLE-MODE LASERS AND DYNAMICAL CHAOS

*A.N. Oraevsky*

A review on nonlinear of single-mode lasers are presented. A special attention is paid to properties of a strange attractor corresponding to a chaotic regime of a single mode laser. The main topics of laser nonlinear dynamics are listed and discussed. List of references: 160 positions.



*Ораевский Анатолий Николаевич*, родился 26 января 1934 года в г. Тейково Ивановской области. Окончил радиофизический факультет Московского физико-технического института в 1957 году. Работает в Физическом институте им. П.Н. Лебедева (ФИАН) с 1956 года. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в 1960 году и доктора физико-математических наук в 1965 году. Главный научный сотрудник и зав. сектором Теоретической радиофизики ФИАН, профессор Московского инженерно-физического института. Действительный член Академии Естественных Наук Российской Федерации, Лауреат Ленинской премии. Основные работы относятся к квантовым стандартам частоты, нелинейной динамике оптических систем, квантовой оптике, газодинамическим и химическим лазерам, лазерам на свободных электронах, лазерной химии и биологии, сверхпроводимости.

Среди результатов, полученных А.Н. Ораевским лично или в соавторстве: пионерские работы по динамике мазеров и лазеров; обнаружение неперидических (стохастических) режимов в одномодовом мазере (лазере) (1962), предложение (1963) и реализация (1969) химических лазеров на цепных реакциях (независимо от В.Л. Тальрозе); экспериментальное обнаружение фотохимического действия инфракрасного лазерного излучения; вывод нестационарной системы уравнений для сверхпроводника, объединяющей параметр порядка, фотоны и фононы в единую динамическую систему и др. Автор (соавтор) более 400 публикаций в рецензируемых научных журналах, четырех монографиях, 20 изобретений.