

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИИ

А.А. Короновский

В работе рассмотрена модель распространения заболевания, имеющего длительный инкубационный период, передающегося при контакте больного человека со здоровым, при условии, что люди иммунитетом к заболеванию не обладают. Получено уравнение, описывающее процесс распространения эпидемии во времени и пространстве, и показано, что, при определенных условиях, оно может быть сведено к дифференциальному уравнению Абеля второго рода. В работе приведены рисунки, иллюстрирующие расположение семейства изоклин для этого уравнения, а также рисунки, показывающие поведение интегральных кривых при различных значениях параметров. Установлена возможность распространения бегущих эпидемиологических волн, в том числе и ударных.

В настоящее время известны различные модели распространения эпидемий. В качестве примера можно привести классическую модель Кермака - Макендрика, предложенную в 1927 году, в которой процесс локального нарастания эпидемии во времени описывается системой трех нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [1].

Наиболее широкую известность получила пространственная модель эпидемии вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F(p), \quad (1)$$

где p - относительная численность больных особей, а функция $F(p)$ описывает локальное увеличение количества больных особей в зависимости от их плотности. Предполагается, что перемещение особей носит случайный характер, подвижность здоровых и больных особей одинакова, эпидемия безымунная, заражение происходит в результате контакта больных и здоровых особей [2]. Впервые подобная проблема (биологическая задача распространения гена) была рассмотрена в 1937 году А.Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым [3]. Было доказано, что в уравнении (1) возможно существование решения типа бегущей волны $p = p(x + vt)$, распространяющейся влево со скоростью v , причем, при достаточно больших t , $v \rightarrow v_0 = 2(DF'(0))^{1/2}$, где $F'(0)$ - есть производная от функции $F(p)$, вычисленная в точке $p=0$; предельная форма кривой плотности дается решением уравнения

$$v_0 \frac{dp}{dx} = D \frac{d^2 p}{dx^2} + F(p),$$

обращающимся в ноль при $x = -\infty$ и в единицу при $x = +\infty$. Такое решение всегда

обращающимся в ноль при $x \rightarrow -\infty$ и в единицу при $x \rightarrow +\infty$. Такое решение всегда существует, и оно единственно.

Значительный интерес представляет собой задача о пространственно-временном распространении эпидемии в человеческом обществе. Понятно, что попытка простого грубого переноса биологических моделей на социальные процессы недопустима. В рамках настоящей работы сделана попытка построения подобной эпидемиологической модели для человеческого общества и ее исследования, правда, при очень существенных упрощающих предположениях. (Заметим также, что эта модель может быть практически без изменений применена к не менее интересным процессам распространения слухов).

Пусть место постоянного проживания индивидуумов характеризуется вектором x , а плотность расселения людей есть $n(x)$. Если $f(x, z, t)$ есть вероятность нахождения индивидуума, проживающего в точке с координатами x , в бесконечно малой окрестности точки с координатами z в момент времени t , то тогда общее число людей, «собравшихся» в точке z в момент времени t , определяется как

$$N(z, t) = \int_S n(x) f(x, z, t) dS_x, \quad (2)$$

где символ dS_x в формуле (2) означает, что при вычислении поверхностного интеграла интегрирование ведется по координатам постоянного места жительства x . Рассмотрим теперь, как будет изменяться число инфицированных людей, если предположить, что заболевание имеет длительный инкубационный период, (а, следовательно, «подвижность» здоровых и больных людей практически одинакова), инфекция передается при контакте больного человека со здоровым, иммунитетом к инфекции люди не обладают.

Если $u(x, t)$ есть доля инфицированных людей, проживающих в точке x , ($0 \leq u \leq 1$), то в момент времени t в точке z из $N(z, t)$ людей $A(z, t)$ будут инфицированными, а $(N(z, t) - A(z, t))$ - здоровыми, где $A(z, t)$ есть

$$A(z, t) = \int_S n(x) u(x, t) f(x, z, t) dS_x. \quad (3)$$

Так как инфицирование происходит при контакте больного человека со здоровым, то увеличение числа инфицированных людей в точке z за интервал времени Δt разумно определить как

$$\Delta A(z, t) = k A(z, t) [N(z, t) - A(z, t)] \Delta t, \quad (4)$$

где k - коэффициент пропорциональности. Нетрудно видеть, что увеличение доли инфицированных людей, проживающих в точке x , обусловленное заражением в точке z в момент времени t есть

$$\Delta u^*(x, z, t) = \frac{\Delta A(z, t)}{N(z, t)} f(x, z, t). \quad (5)$$

Понятно, что увеличение доли инфицированных людей, проживающих в точке x , обусловленное всевозможными контактами на всей области проживания населения есть

$$\Delta u(x, t) = \int_S \Delta u^*(x, z, t) dS_z, \quad (6)$$

Тогда, устремляя Δt к нулю, с учетом равенств (2)-(6), получим, что

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\int_S n(y) u(y, t) f(y, z, t) dS_y \int_S n(y) (1 - u(y, t)) f(y, z, t) dS_y}{\int_S n(y) f(y, z, t) dS_y} f(x, z, t) dS_z. \quad (7)$$

Полученное уравнение (7) описывает процесс распространения эпидемии во времени и в пространстве, с учетом сделанных выше предположений. (Заметим, что (7) можно применять и в качестве модели, описывающей распространение волны слухов: в этом случае $u(x,t)$ есть доля людей, проживающих в точке x , которые уже знают содержимое «слуха», а $(1 - u(x,t))$ - доля людей, до которых эта информация еще не дошла.)

Понятно, что уравнение (7) очень сложно и громоздко, для того, чтобы его исследовать. Сделаем теперь предположения, которые существенно упростят (и, конечно, идеализируют) рассматриваемую модель.

Будем рассматривать одномерную задачу, полагая область расселения людей бесконечно протяженной. В этом случае уравнение (7) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} n(y)u(y,t)f(y,z,t)dy \int_{-\infty}^{+\infty} n(y)(1 - u(y,t))f(y,z,t)dS_y}{\int_{-\infty}^{+\infty} n(y)f(y,z,t)dy} f(x,z,t)dz_z. \quad (8)$$

Будем полагать теперь, что плотность населения везде одинакова и не зависит от координаты x (то есть, $n(x) = n_0 = \text{const}$), функция $f(x,z,t)$ не зависит от времени, и $f(x,z,t) = f(|x - z|)$. Полагаем также, что u дифференцируема по x . Тогда, с учетом всех сделанных предположений и соотношений (2)-(6), получим

$$N(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_0 f(x,z,t)dx = n_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z,t)dx = n_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f(|x - z|)dx.$$

С учетом условия нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(|z - x|)dx = 1$ окончательно получим

$$N(x,t) = n_0. \quad (9)$$

Раскладывая $u(x,t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z , пренебрегая высшими членами разложения (то есть, считая, что вероятность передвижения людей на расстояния, на которых происходят значительные изменения u , пренебрежимо мала), обозначив $y = x - z$, получим

$$\begin{aligned} A(z,t) &= n_0 \int_{-\infty}^{+\infty} [u(z,t) + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} y^2] f(|y|)dy = \\ &= n_0 [u(z,t) + \frac{\partial u}{\partial y} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(|y|)dy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(|y|)dy]. \end{aligned}$$

Обозначая

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(|y|)dy, \quad (10)$$

получим, что

$$A(z,t) = n_0 [u(z,t) + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}]. \quad (11)$$

Тогда формула (4) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta A(z,t) &= kn_0 [u(z,t) + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}] [n_0 - n_0 [u(z,t) + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}]] \Delta t = \\ &= kn_0^2 [u(z,t) - u^2(z,t) - \gamma u(z,t) \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} - (\frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2})^2] \Delta t. \end{aligned}$$

Учитывая, что γ является малым параметром ($\gamma^2 \ll \gamma$), окончательно получим

$$\Delta A(z,t) = kn_0^2 [u(z,t) - u^2(z,t) - \gamma u(z,t) \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}] \Delta t. \quad (12)$$

Обозначив

$$w(z,t) = kn_0 [u(z,t) - u^2(z,t) - \gamma u(z,t) \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}], \quad (13)$$

получим, что

$$\Delta u^*(x,z,t) = w(z,t) f(|x-z|) \Delta t. \quad (14)$$

С учетом всех сделанных предположений, а также формул (9)-(14), формула (8) примет вид

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} w(z,t) f(|x-z|) dz. \quad (15)$$

Раскладывая теперь $w(z,t)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x , обозначив $y=z-x$, пренебрегая членами высших порядков, получим

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} [w(x,t) + \frac{\partial w}{\partial y} y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} y^2] f(|y|) dy,$$

или, с учетом (10)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = w(x,t) + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}. \quad (16)$$

Пренебрегая членами порядка γ^2 , имеем

$$\frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\gamma}{2} kn_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - 2u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] = kn_0 \gamma \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Тогда, с учетом (13), (16), (17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= kn_0 \left[u - u^2 - \gamma u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = \\ &= kn_0 \left[(u - u^2) + \gamma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (1 - 2u) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Вводя новый масштаб времени $\tau = kn_0 t$, окончательно получим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \gamma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + (2u - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = u(1 - u). \quad (18)$$

Полученное уравнение (18) является дифференциальным уравнением в частных производных для функции u . Нетрудно заметить, что (18) похоже на классическое уравнение (1) и отличается от него наличием нелинейных членов $(\partial u / \partial x)^2$ и $2u(\partial^2 u / \partial x^2)$. Возникает вопрос, существует ли решение уравнения (18) в виде бегущей волны

$$u(x,\tau) = u(x + v\tau) = u(\xi), \quad (19)$$

распространяющейся справа налево со скоростью v , со следующими граничными

условиями на функцию $u(\xi)$:

$$u(-\infty) = 0, \quad u(+\infty) = 1, \quad (20)$$

как это происходит с уравнением (1)? (Граничные условия (20) вытекают из предположения, что в любой фиксированной точке x_0 , в момент времени $\tau = -\infty$ (то есть, до начала рассмотрения) инфицированных людей вообще не было, а в момент времени $\tau = +\infty$ (после завершения распространения эпидемии) все люди, проживающие в точке x_0 , оказались зараженными.) Заметим, что все последующие рассуждения могут быть применены и для бегущей волны, распространяющейся слева направо, для чего необходимо заменить v на $-v$ и граничные условия с $u(-\infty) = 0, u(+\infty) = 1$, на $u(-\infty) = 1, u(+\infty) = 0$. Как станет ясно из дальнейшего рассмотрения, все выводы, полученные для волны, распространяющейся со скоростью $+v$, остаются справедливыми и для волны, распространяющейся со скоростью $-v$, чего, в общем-то, и следовало ожидать.

Понятно, что $(\partial u / \partial x) = (du / d\xi)$, $(\partial^2 u / \partial x^2) = (d^2 u / d\xi^2)$ и $(\partial u / \partial \tau) = v(du / d\xi)$; тогда уравнение (18) примет вид

$$v \frac{du}{d\xi} + \gamma \left[\left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 + (2u - 1) \frac{d^2 u}{d\xi^2} \right] = u(1 - u). \quad (21)$$

Обозначив $p = du / d\xi$, приведем (21) к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned} du / d\xi &= p, \\ \frac{dp}{d\xi} &= \frac{u(1 - u) - vp - \gamma p^2}{\gamma(2u - 1)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Система (22) имеет две неподвижные точки $(0;0)$ и $(1;0)$. Понятно, что при $v < 2\gamma^{1/2}$ неподвижная точка $(0;0)$ является неустойчивым фокусом и при $v \geq 2\gamma^{1/2}$ - неустойчивым узлом, а точка $(1;0)$ - устойчивым фокусом при $v < 2\gamma^{1/2}$ и устойчивым узлом при $v \geq 2\gamma^{1/2}$.

Исключим из рассмотрения в системе (22) переменную ξ , для чего будем считать, что $p = p(u(\xi))$. Тогда уравнение (22) может быть сведено к уравнению Абеля второго рода [4]

$$p \frac{dp}{du} = \frac{1}{1 - 2u} p^2 + \frac{v}{\gamma(1 - 2u)} p + \frac{u(u - 1)}{\gamma(1 - 2u)}, \quad (23)$$

или, разрешая (23) относительно производной dp/du , получим

$$\frac{dp}{du} = \frac{u(1 - u) - vp - \gamma p^2}{\gamma(2u - 1)p}. \quad (24)$$

Если теперь удастся показать, что для (23) на плоскости (u, p) существует кривая, выходящая из точки $(0;0)$ и приходящая в точку $(1;0)$ (что, в принципе, возможно, так как, $(0;0)$ является неустойчивой, а $(1;0)$ - устойчивой точкой), такая, что $0 \leq u \leq 1$, то тем самым будет доказана возможность существования для уравнения (18) решения в виде бегущей волны (19) с граничными условиями (20).

Проведем качественный анализ поведения интегральных кривых уравнения (23) на плоскости (u, p) . Для этого рассмотрим семейство изоклин уравнения (24):

$$\frac{u(1 - u) - vp - \gamma p^2}{\gamma(2u - 1)p} = c, \quad (25)$$

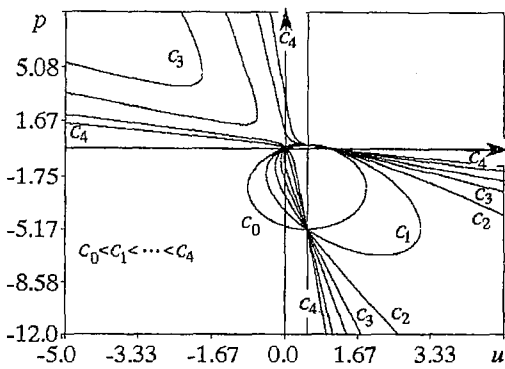


Рис. 1. Семейство изоклин, построенное при выбранных значениях параметров $\gamma=0.25$ $v=1.25$. Параметр c является фиксированным угловым коэффициентом интегральных кривых: $c_0=0$, $c_1=1$, $c_2=2$, $c_3=3$, $c_4=8$. На рисунке приведены лишь изоклины с неотрицательным параметром c . Изоклины с параметром $-c$ ($c>0$) расположены симметрично изоклинам с параметром c относительно прямой $u=1/2$

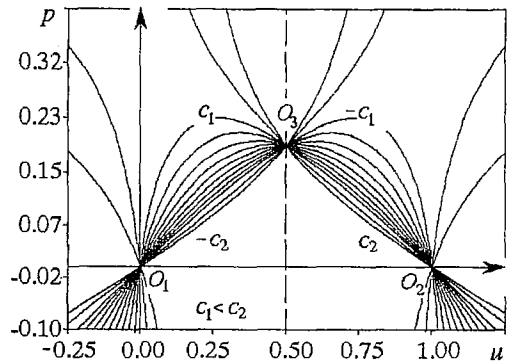


Рис. 2. Поведение семейства изоклин в области $0 \leq u \leq 1$. Показаны изоклины как с положительным, так и с отрицательным параметром c ($c_1=4$, $c_2=8$)

где c есть значение dp/du в точке (u, p) . Нетрудно видеть, что существует четыре особых точки, в которых не выполняются требования теоремы о существовании и единственности решения уравнения [5]: в этих точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(1/2; [(v^2+\gamma)^{1/2} - v]/2\gamma)$, $(1/2; -[(v^2+\gamma)^{1/2} + v]/2\gamma)$ пересекаются все изоклины. На рис. 1 приведено схематичное расположение семейства изоклин на плоскости (u, p) для случая $v > 2\gamma^{1/2}$. Как явствует из исследования уравнения (25), при $c^2 < 1/\gamma$ изоклины являются эллипсами, а при $c^2 > 1/\gamma$ - гиперболами. В случае $c^2 = 1/\gamma$ изоклины являются параболлами, а при $c^2 = (v^2 + \gamma)/\gamma^2$ и $c = \pm\infty$ - скрещенными прямыми. Рис. 2 иллюстрирует расположение тех же изоклин в области $0 \leq u \leq 1$, а на рис. 3, 4 показано качественное поведение интегральных кривых уравнения (23) в случаях $v < 2\gamma^{1/2}$ и $v > 2\gamma^{1/2}$ соответственно. Очевидно, что при $v < 2\gamma^{1/2}$ (см.рис.3) любая интегральная кривая, выходящая из $(0;0)$, обязательно пройдет через область отрицательных u [6] (точка $(0;0)$ является неустойчивым фокусом), что, при

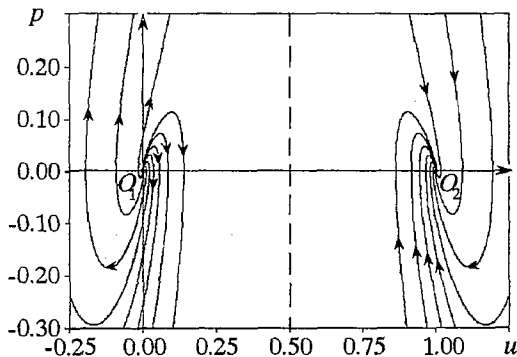


Рис. 3. Поведение интегральных кривых уравнения Абеля второго рода на плоскости (u, p) для случая $v < 2\gamma^{1/2}$ ($v_0 = 0.75$, $\gamma=0.25$). Интегральные кривые получены численным моделированием системы дифференциальных уравнений (22) методом Рунге - Кутты четвертого порядка с шагом интегрирования $h = 0.001$

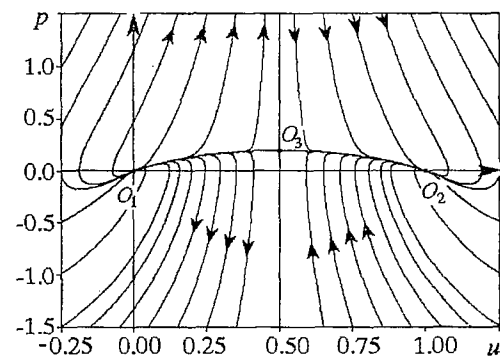


Рис. 4. Поведение интегральных кривых рассматриваемого уравнения для случая $v > 2\gamma^{1/2}$ ($v_0 = 1.25$, $\gamma=0.25$)

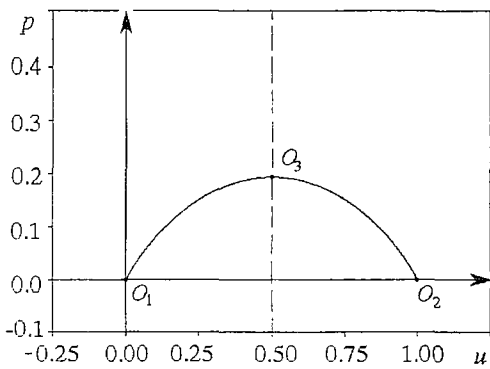


Рис. 5. Финитная интегральная кривая, проходящая через точку O_3

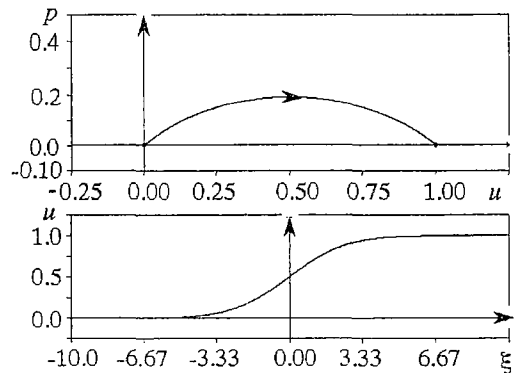


Рис. 6. «Особая» интегральная кривая и профиль фронта соответствующей ей бегущей волны

нашей интерпретации величины u , не имеет смысла. Следовательно, при $v < 2\gamma^{1/2}$ бегущей волны (19) существовать не может.

Совершенно иная ситуация возникает в случае $v \geq 2\gamma^{1/2}$. Как видно из рис. 4, на плоскости (u, p) существует единственная интегральная кривая, выходящая из точки $O_1(0;0)$ и приходящая в точку $O_2(1;0)$. Поведение этой кривой отдельно показано на рис.5: кривая, выходящая из неустойчивого узла $O_1(0;0)$, попадает в особую точку $O_3(1/2; [(v^2+\gamma)^{1/2} - v]/2\gamma)$, которая является седлом [5]. Следовательно, через точку O_3 проходит *только одна финитная* интегральная кривая, параллельная в этой точке оси $0u$ ($dp/du=0$). Пройдя через точку O_3 , интегральная кривая, вышедшая из точки O_1 , приходит в устойчивый узел O_2 . Эта «особая» интегральная кривая целиком лежит в области $0 \leq u \leq 1$, а, следовательно, в рассматриваемой модели может существовать бегущая волна, распространяющаяся справа налево со скоростью $v \geq v_0 = 2\gamma^{1/2}$. Профиль фронта этой волны схематично изображен на рис. 6.

Кроме того, при $v \geq v_0 = 2\gamma^{1/2}$ существует целый класс интегральных кривых, выходящих из точки O_1 и уходящих на бесконечность, но, тем не менее, полностью лежащих в области $0 \leq u \leq 1/2$, а также класс интегральных кривых, приходящих из бесконечно удаленной точки в устойчивый узел O_2 , полностью принадлежащих области $1/2 \leq u \leq 1$ (рис. 7). Тот факт, что вдоль интегральных кривых неограниченно возрастает p , объясняется тем, что производная dp/du обращается в бесконечность при $u=1/2$. Каждая такая интегральная кривая соответствует бегущей волне, распространяющейся справа налево со скоростью v , причем эта бегущая волна является ударной волной, то есть, она имеет на своем профиле фронта участок бесконечно быстрого роста, так как при $u=1/2$ (кроме особой точки O_3) выполняется $p=du/d\xi=\infty$ (рис. 8)*.

* Следует отметить, что все вышеизложенное относится к уравнению (18), которое, фактически, является «первым приближением» модели (8), а, следовательно, поведение (8) может отличаться от поведения (18). Действительно, для участка бесконечно быстрого роста величины u на профиле бегущей ударной волны, при рассмотрении поведения (8), в уравнении (18) следует учитывать члены, содержащие старшие производные. Так, сохраняя члены порядка γ^2 , получим вместо (18) уравнение

$$u_\tau + \gamma[u_x^2 + (2u - 1)u_{xx}] + (\gamma/2)^2[3u_{xx}^2 + 4u_x u_{xxx} + (2u - 1)u_{xxxx}] = u(1 - u).$$

Однако, учитывая, что параметр γ является малым, становится понятно, что поведение решения (18) отличается от поведения решения (8) (в рамках сделанных предположений) только лишь для самого фронта ударной волны (то есть для очень «тонкого» участка с бесконечно быстрым ростом величины u на профиле волны) и остается адекватным поведению (8) на всем остальном профиле бегущей волны.

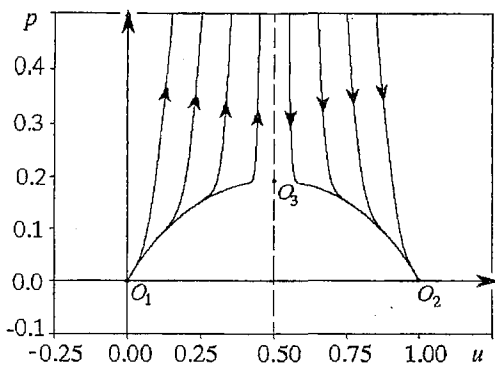


Рис. 7. Множество инфинитных интегральных кривых, удовлетворяющих условию $0 < u < 1$

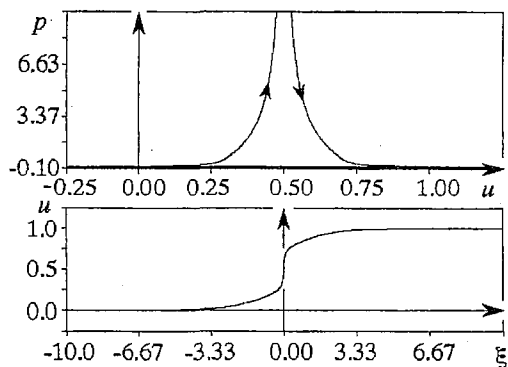


Рис. 8. Одна из инфинитных интегральных кривых и профиль фронта соответствующей ей бегущей ударной волны. На профиле фронта отчетливо виден участок бесконечно быстрого роста величины u

Заметим, что «особая» интегральная кривая (см. рис. 5) является неустойчивой в области $0 \leq u \leq 1/2$, и, наоборот, притягивающей в области $1/2 \leq u \leq 1$ (см.рис. 4).

Таким образом, для любого значения $v \geq v_0 = 2\gamma^{1/2}$ существуют интегральные кривые, выходящие из точки $O_1(0;0)$ и входящие в $O_2(1;0)$, целиком лежащие в области $0 \leq u \leq 1$, причем, существуют одна финитная интегральная кривая (эта «особая» интегральная кривая и профиль фронта соответствующей ей бегущей волны показаны на рис. б) и множество инфинитных кривых, одна из которых, вместе с профилем фронта соответствующей ей ударной бегущей волны, показана на рис.8.

Иными словами, мы получили спектр возможных скоростей, с которыми могут распространяться бегущие волны (в том числе и ударные), ограниченный снизу величиной $v_0 = 2\gamma^{1/2}$. Вопрос же о том, какая из этих скоростей реализуется в действительности, требует более серьезного исследования и в данной работе не рассматривается. Рискнем, однако, предположить, что выводы, полученные для классического уравнения (1), могут быть применены и к рассматриваемой задаче. В пользу подобного предположения может свидетельствовать тот факт, что качественная оценка скорости, с которой будет распространяться бегущая волна при $t \rightarrow +\infty$ для уравнения (1) в работе [6], вполне применима и для (18) и дает тот же самый результат $v \rightarrow v_0 = 2\gamma^{1/2}$.

В заключение выражаю искреннюю признательность профессору Д.И. Трубецкову за постоянную поддержку и внимание, а также доценту В.П. Складову за ряд ценных советов, которые были использованы при написании данной работы.

Библиографический список

1. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. С.313.
2. Байжанова К.С. Вопросы исследования скорости эпидемических волн // Моделирование процессов экологического развития: Сб. тр. Вып. 8. М.:ВНИИСИ, 1984. С. 48.
3. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и применение его к одной биологической проблеме//Бюл. МГУ. 1937. Сер. А, вып. 6.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. С. 47.

5. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. С. 28.

6. Свирижев Ю.М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 22.03.95
после переработки 25.05.95

ABOUT ONE MODEL OF EPIDEMIC SPREAD

A.A. Koronovski

The work deals with the model of the disease spread, having long incubation period, transmitting during the contact between the sick and the healthy people on condition that people are not immune against the disease. The equation, describing the process of epidemic spread in time and in space, has been obtained and it has been shown that in certain conditions it can be reduced to Abel differential equation of the second kind. The figures, illustrating the distribution of the family of isoclines for the equation mentioned and the figures, demonstrating the behaviour of the integral curves at different parameter values, are shown. The possibility of travelling epidemic waves transmission, including the shock waves, has been established.



Короновский Алексей Александрович - родился в 1972 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и ее проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. В издательстве ГосУНЦ «Колледж» вышла монография в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым «Нелинейная динамика в действии» (1996). Автор 2 статей в центральной печати.