

**ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ: СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
ЛОКАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ
(основы теории и примеры применения)**

Н.М. Астафьева

Представлены основы теории вейвлет-преобразования - математического аппарата, хорошо приспособленного для изучения структуры сложных неоднородных процессов, характеризующихся взаимодействиями возмущений в широких диапазонах масштабов. За пределами работы оставлены проблемы, связанные с использованием вейвлетов для очистки, фильтрации и упаковки информации. Применение вейвлетов для численного моделирования и решения уравнений является предметом следующей работы. Здесь возможности вейвлет-преобразования показаны на примерах анализа сигналов: модельных (гармонических, с различными особенностями, фрактальных) и натуральных геофизических временных рядов. Подробно изучены мультимасштабные свойства процесса ЮКЭН (Южное Колебание - Эль-Ниньо) - крупномасштабного процесса в системе океан-атмосфера, оказывающего влияние на климат всей планеты.

Термин «вейвлет» (дословный перевод - маленькая волна) появился сравнительно недавно - его ввели Гроссман и Морле [1] в середине 80-х годов в связи с анализом свойств сейсмических и акустических сигналов. В настоящее время семейство анализаторов, названных вейвлетами, начинает широко применяться в задачах распознавания образов; при обработке и синтезе сигналов (например, речевых); при анализе изображений различной природы (изображение радужной оболочки глаза, рентгенограмма почки, спутниковые изображения облаков или поверхности планеты, снимок минерала и т.п.); для изучения свойств турбулентных полей; для решения уравнений; для свертки (упаковки) больших объемов информации и во многих других случаях.

Вейвлет-преобразование одномерного временного сигнала состоит в разложении его по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами солитоноподобной функции (вейвлета) посредством ее масштабных преобразований и переносов. Каждая из функций базиса характеризует как частоту, так и ее локализацию во времени. Таким образом, вейвлет-преобразование обеспечивает двумерную развертку сигнала, при этом частота и время рассматриваются как независимые переменные. В результате появляется возможность анализировать свойства сигнала одновременно во временном и в частотном пространстве.

Сказанное обобщается на неоднмерные сигналы (или функции). Область использования вейвлетов не ограничивается анализом свойств сигналов и полей различной природы, полученных численно, в эксперименте или при наблюдениях. Вейвлеты начинают применяться и для численного моделирования - как

иерархический базис, хорошо приспособленный для описания динамики нелинейных процессов, характеризующихся взаимодействиями в широких диапазонах пространственных и временных масштабов. Вейвлет-анализ оказывается очень удобным инструментом для изучения существенно неоднородных процессов, поскольку элементы его базиса хорошо локализованы и обладают подвижным частотно-временным окном.

Далеко не случайно многие исследователи называют вейвлет-анализ «математическим микроскопом» - название прекрасно отражает замечательное свойство метода сохранять хорошее разрешение на разных масштабах. Способность этого «микроскопа» обнаружить внутреннюю структуру исследуемого объекта и изучить его локальные скейлинговые свойства уже продемонстрирована на многих примерах.

Например, на таких классических, как фрактальные функции Вейерштрасса и вероятностные меры канторовских рядов. Применение вейвлет-анализа к турбулентному полю скорости в ветровом туннеле при больших числах Рейнольдса дало наглядное подтверждение наличия каскада Ричардсона. Показано сходство энергетического каскадного процесса со структурой мультифрактальных неоднородных канторовских рядов. Еще более эффективным оказалось применение вейвлет-анализа к мультифрактальным инвариантным мерам некоторых хорошо известных динамических систем, моделирующих наблюдаемые в диссипативных системах ситуации перехода к хаосу.

Таким образом, вейвлеты могут с успехом применяться для решения различных проблем. В настоящей работе сделана попытка собрать и по возможности наглядно и просто изложить сведения из теории вейвлетов, необходимые при практическом применении вейвлет-преобразования для анализа сигналов различной природы.

В первом разделе проводится аналогия между рядами Фурье и разложением в ряды по вейвлетам, определяется вейвлет-преобразование, описываются его свойства и некоторые следствия из них; материал основан, главным образом, на сборниках и монографиях [2-4] и прекрасных работах Ингрид Добечи [5] и Мари Фарж [6]. Во втором разделе приводятся примеры применения вейвлет-преобразования к модельным сигналам различного характера и результаты вейвлет-анализа некоторых натуральных временных геофизических рядов.

1. Основы теории

Определения, свойства и их следствия мы приводим для вейвлет-преобразования одномерных функций. При необходимости все сказанное может быть обобщено на многомерные случаи.

1.1. От преобразования Фурье к вейвлет-преобразованию

Интегральное преобразование Фурье и ряды Фурье являются основой гармонического анализа. Получаемые в результате преобразования коэффициенты Фурье поддаются достаточно простой физической интерпретации, что ни в коем случае не умаляет важности последующих выводов о характере исследуемого сигнала. Применение интегрального преобразования и рядов Фурье очень наглядно, все необходимые свойства и формулы выписываются с помощью всего двух действительных функций $\sin(t)$, $\cos(t)$ или одной комплексной - синусоидальной волны $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$, $i = (-1)^{1/2}$ и достаточно легко доказываются.

Вейвлет-преобразование применяется сравнительно недавно и математический аппарат находится в стадии активной разработки. Поэтому для большей наглядности будем, следуя [4], вводить необходимые понятия вейвлет-анализа, проводя аналогии и сравнения с анализом Фурье, значимость и

привлекательность которого для широкого круга исследователей неоспоримы и проверены временем.

1.1.1. Ряды Фурье. Напомним некоторые понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем. Пусть $L^2(0,2\pi)$ - пространство квадратично интегрируемых функций с конечной энергией

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad t \in (0,2\pi).$$

Это - определение кусочно-непрерывной функции $f(t)$. Она может быть периодически расширена и определена на всей оси $R(-\infty, \infty)$ так, что

$$f(t) = f(t - 2\pi) \quad \text{для всех } t \text{ из } R.$$

Любая $f(t)$ из пространства 2π -периодических квадратично интегрируемых функций может быть представлена в виде ряда Фурье

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \exp(int)$$

с коэффициентами

$$c_n = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-int) dt$$

и ряд равномерно сходится к $f(t)$, то есть

$$\lim_{M,N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(t) - \sum_M^N c_n \exp(int)|^2 dt = 0.$$

Отметим, что

$$w_n(t) = \exp(int), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

есть ортонормированный базис пространства $L^2(0,2\pi)$, построенный с помощью масштабного преобразования единственной функции $w(t) = \exp(it)$ таким образом, что $w_n(t) = w(nt)$.

Итак, каждая 2π -периодическая квадратично интегрируемая функция может быть получена суперпозицией масштабных преобразований базисной функции $w(t) = \exp(it) = \cos(t) + i \sin(t)$, то есть является композицией синусоидальных волн с различными частотами (с коэффициентами, зависящими от номера гармоники (частоты)).

Напомним, что для коэффициентов ряда Фурье выполняется равенство Парсевала

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

1.1.2. Разложение по вейвлетам. Рассмотрим пространство $L^2(R)$ функций $f(t)$ с конечной энергией, определенных на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty.$$

Функциональные пространства $L^2(0,2\pi)$ и $L^2(R)$ существенно различны. В

частности, локальное среднее значение каждой функции из $L^2(R)$ должно стремиться к нулю на $(\pm\infty)$. Синусоидальная волна не принадлежит $L^2(R)$ и, следовательно, семейство синусоидальных волн w_n не может быть базисом функционального пространства $L^2(R)$. Попробуем найти достаточно простые функции для конструирования базиса пространства $L^2(R)$.

«Волны», образующие пространство $L^2(R)$, должны стремиться к нулю на $(\pm\infty)$ и для практических целей, чем быстрее, тем лучше. Рассмотрим в качестве базисных функций вейвлеты - хорошо локализованные солитоноподобные «маленькие волны». Как и в случае с пространством $L^2(0,2\pi)$, которое полностью формировалось с помощью одной базисной функции $w(t)$, сконструируем функциональное пространство $L^2(R)$ также с помощью одного вейвлета $\psi(t)$.

Как же с помощью быстро стремящейся к нулю локализованной функции покрыть всю ось $R(-\infty, \infty)$? Это можно сделать, предусмотрев систему сдвигов (переносов) вдоль оси. Пусть для простоты сдвиги будут целыми, то есть $\psi(t-k)$.

Введем аналог синусоидальной частоты. Для простоты и определенности запишем его через степени двойки: $\psi(2^j t - k)$, здесь j и k - целые числа ($j, k \in I$).

Таким образом, с помощью масштабных преобразований $(1/2^j)$ и сдвигов $(k/2^j)$ мы можем описать все частоты и покрыть всю ось, имея единственный базисный вейвлет, $\psi(t)$.

Напомним определение нормы

$$\|\psi\|_2 = \langle \psi, \psi \rangle^{1/2}, \quad \langle p, q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) \bar{q}(t) dt$$

(черта сверху обозначает комплексно-сопряженное). Следовательно, $\|\psi(2^j t - k)\|_2 = 2^{-j/2} \|\psi(t)\|_2$. Таким образом если вейвлет $\psi(t) \in L^2(R)$ имеет единичную норму, то и все вейвлеты семейства $\{\psi_{jk}\}$, вида

$$\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in I \quad (1)$$

также нормированы на единицу $\|\psi_{jk}\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$.

Вейвлет $\psi \in L^2(R)$ называется ортогональным, если определенное в (1) семейство $\{\psi_{jk}\}$ представляет собой ортонормированный базис функционального пространства $L^2(R)$

$$\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$$

и каждая $f \in L^2(R)$ может быть представлена в виде ряда

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(t), \quad (2)$$

равномерная сходимость которого в $L^2(R)$

$$\lim_{M_1, N_1, M_2, N_2 \rightarrow \infty} \|f - \sum_{-M_2}^{N_2} \sum_{-M_1}^{N_1} c_{jk} \psi_{jk}\|_2 = 0.$$

Простейшим примером ортогонального вейвлета является HAAR-вейвлет, определяемый соотношением

$$\psi^H(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & t < 0, t \geq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Каждый может легко проверить, что любые две функции ψ_{jk}^H, ψ_{lm}^H , полученные из этого вейвлета по формуле (1) с помощью масштабных преобразований $(1/2^j)$, $(1/2^l)$ и сдвигов $(k/2^j)$, $(m/2^l)$, ортогональны и имеют единичную норму.

Сконструируем базис функционального пространства $L^2(R)$ с помощью масштабных преобразований и переносов вейвлета $\psi(t)$ с произвольными значениями базисных параметров: масштабного коэффициента a и параметра сдвига b

$$\psi_{ab}(t) = |a|^{-1/2} \psi((t-b)/a), \quad a, b \in R, \quad \psi \in L^2(R), \quad (4)$$

и на его основе запишем интегральное вейвлет-преобразование

$$[W_\psi f](a, b) = |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}((t-b)/a) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \bar{\psi}_{ab}(t) dt. \quad (5)$$

Проводя дальнейшую аналогию с преобразованием Фурье, можно определить коэффициенты $c_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle$ разложения (2) функции f в ряд по вейвлетам через интегральное вейвлет-преобразование

$$c_{jk} = [W_\psi f](1/2^j, k/2^j).$$

В дальнейшем иногда вместо $[W_\psi f](a, b)$ для коэффициентов (амплитуд) вейвлет-преобразования будут использоваться обозначения $W(a, b)$, или $W_\psi f$, или $W[f]$.

Итак, каждая функция из $L^2(R)$ может быть получена суперпозицией масштабных преобразований и сдвигов базисного вейвлета, то есть является композицией «маленьких волн» с коэффициентами, зависящими от номера волны (частоты, масштаба) и от параметра сдвига (времени).

Использование дискретного вейвлет-преобразования (дискретного частотно-временного пространства в виде целых сдвигов и растяжений по степеням двойки) позволяет провести доказательство многих положений теории вейвлетов [2-5], связанных с полнотой и ортогональностью базиса, сходимостью рядов и т.п. Доказательность этих положений необходима, например, при сжатии информации или в задачах моделирования, то есть в случаях, когда важно провести разложение с минимальным числом независимых коэффициентов вейвлет-преобразования и иметь точную формулу обратного преобразования.

При применении вейвлетов для анализа сигналов непрерывное вейвлет-преобразование более удобно; его некоторая избыточность становится положительным качеством, так как позволяет более полно и четко представить содержащуюся в данных информацию.

1.1.3. Обратное вейвлет-преобразование. Синусоидальная волна формирует ортонормированный базис функционального пространства $L^2(0, 2\pi)$ и с обратным преобразованием Фурье проблем не возникает. Ортонормированность же базисов пространства $L^2(R)$, построенных на основе вейвлетов, определяется и выбором базисного вейвлета и способом построения базиса (значениями базисных параметров - сдвига и масштабного коэффициента).

Конечно же, вейвлет может считаться базисной функцией $L^2(R)$ только в том случае, если построенный с его помощью базис ортонормирован и обратное преобразование существует. Однако, строгие доказательства полноты и ортогональности сложны и громоздки, примеры этого можно видеть в [2-5], где разрабатывается теория вейвлет-преобразования. Кроме того, для практических целей часто достаточно бывает устойчивости и «приблизительной» ортогональности системы функций разложения, то есть достаточно, чтобы она была «почти базисом». Как правило, для анализа сигналов используются такие почти базисные вейвлеты, сколь ни кощунственно в этом контексте слово «почти».

За подробным изложением и доказательствами отошлем к уже цитированным работам, здесь же выпишем обратное преобразование лишь для тех двух случаев, что описаны выше: для базиса (1), допускающего расширение и сдвиги $(1/2^j, k/2^j)$, $j, k \in I$, и базиса (4), построенного при произвольных значениях (a, b) , $a, b \in R$.

При базисных параметрах (a,b) , $a,b \in R$ обратное вейвлет-преобразование записывается с помощью того же базиса (4), что и прямое

$$f(t) = C_\psi^{-1} \iint [W_\psi f](a,b) \psi_{ab}(t) da db/a^2,$$

C_ψ - нормализующий коэффициент (аналогичный коэффициенту $(2\pi)^{1/2}$, нормализующему преобразование Фурье)

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi^\wedge(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty$$

(крышечкой обозначается фурье-образ).

Условие конечности C_ψ ограничивает класс функций $\psi(t) \in L^2(R)$, которые могут быть использованы в качестве базисных вейвлетов. В частности, очевидно, что образ Фурье ψ^\wedge должен быть равен нулю в начале координат $\omega=0$ и, следовательно, должен быть равен нулю по крайней мере нулевой момент $\psi(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Чаще всего в приложениях достаточно рассмотрения только положительных частот, то есть $a>0$; вейвлет, соответственно, должен удовлетворять условию

$$C_\psi = 2 \int_0^{\infty} |\psi^\wedge(\omega)|^2 \omega^{-1} d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\psi^\wedge(-\omega)|^2 \omega^{-1} d\omega < \infty.$$

В случае дискретного вейвлет-преобразования устойчивый базис определяется следующим образом.

Функция $\psi \in L^2(R)$ называется R -функцией, если базис $\{\psi_{jk}\}$, определенный (1), является базисом Riesz'a в том смысле, что существуют две константы A и B , $0 < A \leq B < \infty$, для которых соотношение

$$A \|\{c_{jk}\}\|_2^2 \leq \|\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}\|_2^2 \leq B \|\{c_{jk}\}\|_2^2$$

выполняется при любой ограниченной, дважды квадратично суммируемой последовательности $\{c_{jk}\}$

$$\|\{c_{jk}\}\|_2^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{jk}|^2 < \infty.$$

Для любой R -функции существует базис $\{\psi^{jk}\}$ - «двойник» базиса $\{\psi_{jk}\}$ в том смысле, что $\langle \psi_{jk}, \psi^{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$, с помощью которого можно построить реконструкционную формулу

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi^{jk}(t). \quad (6)$$

Если ψ - ортогональный вейвлет и $\{\psi_{jk}\}$ - ортонормированный базис, то $\{\psi^{jk}\}$ и $\{\psi_{jk}\}$ совпадают и формула (6) является формулой обратного преобразования. Если ψ - не ортогональный вейвлет, но является двухместным или парным R -вейвлетом (dyadic wavelet), то он имеет двойника ψ^* , с помощью которого строится двойник семейства $\{\psi_{jk}\}$ подобно базису (1)

$$\psi^{jk}(t) = \psi^*_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi^*(2^j t - k), \quad j, k \in I.$$

В общем же случае реконструкционная формула (6) даже не обязательно является вейвлет-рядом в том смысле, что ψ^* не является вейвлетом и $\{\psi^k\}$ может не иметь базиса-двойника, построенного по типу (4).

1.1.4. Частотно-временная локализация. Преобразование Фурье и ряды Фурье являются прекрасным математическим аппаратом и с успехом используются в приложениях для физической интерпретации процессов при анализе различных сигналов.

Реальный сигнал всегда (или, лучше, как правило) принадлежит пространству $L^2(R)$. Преобразование Фурье сигнала $f(t)$ с конечной энергией, определенной нормой $\|f\|_2$, представляет собой спектр этого сигнала

$$f^{\wedge}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

В некоторых случаях физическая интерпретация с помощью этой формулы бывает затруднительна. Так, чтобы получить спектральную информацию на выбранной частоте, необходимо иметь и всю прошлую и всю будущую временную информацию; к тому же формула не учитывает, что частота может эволюционировать со временем. Преобразование Фурье, например, не отличает сигнал, представляющий собой сумму двух гармоник $\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$, от сигнала, состоящего из тех же гармоник, включающихся последовательно одна за другой (пример рассмотрен во второй главе).

Кроме того, известно, что частота сигнала обратно пропорциональна его продолжительности. Поэтому для получения высокочастотной информации с хорошей точностью важно извлекать ее из относительно малых временных интервалов, а не из всего сигнала; и наоборот - низкочастотную спектральную информацию извлекать из относительно широких временных интервалов.

Часть описанных трудностей снимается при использовании оконного преобразования Фурье. Однако, бесконечно осциллирующая базисная функция (синусоидальная волна) не позволяет получать по-настоящему локализованную информацию. Элементом базиса вейвлет-преобразования является хорошо локализованная функция, быстро стремящаяся к нулю вне небольшого интервала, что позволяет провести «локализованный спектральный анализ» - смысл этого несколько странного сочетания слов станет ясен из дальнейшего. Иными словами, вейвлет-преобразование автоматически обладает подвижным частотно-временным окном, узким на малых масштабах и широким на больших.

Каковы же параметры частотно-временного окна вейвлет-преобразования? Поскольку и сам вейвлет ψ , и его фурье-образ ψ^{\wedge} достаточно быстро спадают, они могут быть использованы как «оконные функции» с «центром» и «шириной», определяемыми следующим образом.

Для нетривиальной оконной функции $z(t) \in L^2(R)$ (необходимо, чтобы $tz(t)$ также принадлежала $L^2(R)$), ее центр t^* и радиус Δ_z определяются формулами

$$t^* = (1/\|z\|_2^2) \int_{-\infty}^{\infty} t |z(t)|^2 dt \quad \text{и} \quad \Delta_z = (1/\|z\|_2^2) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t^*)^2 |z(t)|^2 dt \right\}^{1/2},$$

при этом ширина оконной функции есть $2\Delta_z$.

Пусть t^* , Δ_ψ , ω^* , $\Delta_{\psi^{\wedge}}$ - определенные по этим формулам центры и радиусы вейвлета ψ и его фурье-образа ψ^{\wedge} , соответственно. Тогда интегральное вейвлет-преобразование (5) ограничено «временным окном»

$$[\text{win}_t] = [b + at^* - 2a \Delta_\psi, b + at^* + 2a \Delta_\psi].$$

То есть имеет место временная локализация с центром окна в $b + at^*$ и шириной

окна $2a\Delta\psi$. Введем функцию $\eta(\omega) = \psi^*(\omega + \omega^*)$, которая также является оконной функцией с центром в нуле и радиусом $\Delta\psi$. Воспользовавшись равенством $\langle f, g \rangle = \langle f^*, g^* \rangle / 2\pi$, можно записать интегральное вейвлет-преобразование (5) для фурье-образа f^* в виде

$$W(a, b) = |a|^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) e^{i b \omega} \bar{\eta}(a(\omega - \omega^*/a)) d\omega. \quad (7)$$

Если отвлечься от фазового сдвига и константы, то станет очевидным, что преобразование (7) дает локализованную информацию и о спектре $f^*(\omega)$ сигнала $f(t)$ с «частотным окном»

$$[\text{win}_\omega] = [\omega^*/a - \Delta\psi/a, \omega^*/a + \Delta\psi/a].$$

Частотная локализация происходит около центра окна в ω^*/a с шириной окна, равной $2\Delta\psi/a$.

Заметим, что отношение центральной частоты к ширине окна

$$(\omega^*/a) / (2\Delta\psi/a) = \omega^*/(2\Delta\psi)$$

не зависит от местоположения центральной частоты, а частотно-временное окно $[\text{win}_t] \times [\text{win}_\omega]$, имеющее площадь $4\Delta\psi\Delta\psi^*$, сужается при высокой центральной частоте ω^*/a и расширяется при низкой (рис. 1, а).

Для сравнения на рис. 1 показана локализация в частотно-временном пространстве преобразований Фурье (рис. 1, б) и Шеннона (рис. 1, в). Известно, что преобразование Фурье ряда данных с равномерной дискретизацией по времени Δt не может достичь дискретизации по частоте больше, чем $\Delta\omega = \Delta t / 2$ (частота Найквиста, демонстрирующая частный случай принципа неопределенности между временной и частотной локализацией). Аналогичное ограничение для вейвлет-преобразования можно выразить соотношением $\Delta t \Delta\omega \geq 1 / (4\pi)$. Рис. 1 демонстрирует, что преобразование Фурье хорошо локализует частоту, но без временного разрешения; преобразование Шеннона не обладает частотной локализацией; вейвлет-преобразование имеет подвижное окно, локализованное около выбранного момента времени и расширяющееся с ростом масштаба, что и является наиболее желательным при получении спектральной информации.

Проведем сравнение вейвлет-преобразования (5) с часто используемым для анализа сигналов оконным, или коротко-временным, преобразованием Фурье

$$F(\omega, b) = \int f(t) z(t - b) e^{i\omega t} dt$$

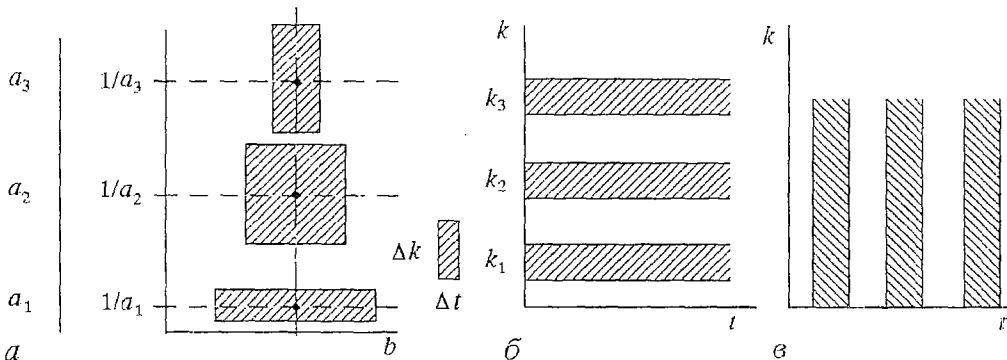


Рис. 1. Частотно-временная локализация преобразований с разными анализаторами: а - вейвлеты, б - гармоника Фурье, в - функции Шеннона

- преобразованием Фурье сигнала, умноженного предварительно на оконную функцию z . Таким образом, $F(\omega, b)$ есть разложение сигнала по семейству функций $z(t-b)e^{i\omega t}$, образованному из единственной функции $z(t)$ с помощью переносов b во времени и переносов ω по частоте, в то время, как результат вейвлет-преобразования $W(a, b)$ есть разложение сигнала по семейству $\psi((t-b)/a)$, образованному из единственной функции $\psi(t)$ с помощью переносов b во времени и растяжений a также во времени. Вейвлет-преобразование представляет собой как бы непрерывный банк оконных преобразований Фурье с различными окнами для каждой частоты.

Таким образом, базисные функции оконного преобразования Фурье имеют одно и то же разрешение по времени и частоте ($z(t), z^*(\omega)$) для всех точек плоскости преобразования, в то время, как базисные функции вейвлет-преобразования имеют уменьшающееся с масштабом a разрешение по времени $\psi(t/a)$ и увеличивающееся с масштабом a разрешение по частоте $\psi^*(a\omega)$. Это свойство вейвлет-преобразования дает ему большое преимущество при анализе сигналов, так как высокочастотные характеристики обычно хорошо локализованы, а медленно меняющиеся характеристики требуют хорошего низкочастотного разрешения.

Легко видеть, что описанные преимущества вейвлетов окажутся чрезвычайно полезными и при решении уравнений.

1.2. Базисные функции вейвлет-преобразования

До сих пор термином «вейвлет» без определения обозначалась некая солитоноподобная функция, вводились связанные с нею понятия и описывались некоторые ее свойства. В литературе мы не встретили общепринятого удачного определения вейвлета. Выпишем некоторые признаки вейвлета. Отметим, что большинство ограничений, накладываемых на вейвлет, связано с необходимостью иметь обратное преобразование (или реконструкционную формулу).

1.2.1. Признаки вейвлета. Для практического применения важно знать признаки, которыми обязательно должна обладать функция, чтобы быть вейвлетом; приведем их здесь, а также рассмотрим в качестве примеров некоторые хорошо известные функции и их соответствие этим необходимым признакам.

Локализация. Вейвлет-преобразование в отличие от преобразования Фурье использует локализованную базисную функцию. Вейвлет должен быть локализован и во временном и в частотном пространстве.

Нулевое среднее

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Часто для приложений оказывается необходимым, чтобы не только нулевой, но и все первые m моментов были равны нулю (вейвлет m -ого порядка)

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t) dt = 0.$$

Такие вейвлеты позволяют, игнорируя наиболее регулярные полиномиальные составляющие сигнала, анализировать мелкомасштабные флуктуации и особенности высокого порядка.

Ограниченность

$$\int |\psi(t)|^2 dt < \infty.$$

Оценка хорошей локализации и ограниченности может быть записана в виде $|\psi(t)| < 1/(1+|t|^n)$ или $|\psi^\wedge(\omega)| < 1/(1+|k-\omega_0|^n)$, здесь ω_0 - доминантная частота вейвлета, n должно быть возможно большим.

Самоподобие. Характерным признаком базиса вейвлет-преобразования является его самоподобие: все вейвлеты семейства $\psi_{ab}(t)$ имеют то же число осцилляций, что и базисный вейвлет $\psi(t)$, поскольку получены из него посредством масштабных преобразований и переносов.

Продemonстрируем сказанное выше на конкретных примерах из [6,7]. Для сравнения среди приведенных функций есть вейвлеты (три последние примера) и функции, которые вейвлетами не являются (три первые примера). На рис. 2 приведены функции, зависящие от времени, (верхний ряд) и их фурье-образы (нижний ряд).

Хорошо локализованная в t -пространстве δ -функция не обладает этим свойством в k -пространстве (рис. 2, а). Хорошо локализованный в k -пространстве синус не локализован в t -пространстве (рис. 2, б). Функция Габора (рис. 2, в)

$$G(t) = \exp[i\Omega(t-t_0) - i\vartheta] \exp[-(t-t_0)^2/2\sigma^2] / [\sigma(2\pi)^{1/2}]$$

- модулированная функция Гаусса с четырьмя параметрами: сдвиг t_0 , стандартное (среднеквадратичное) отклонение σ , частота модуляции Ω и фазовый сдвиг ϑ . Разложение по функциям Габора является разложением по модулированным фрагментам синусоид. Длина фрагментов для всех частот постоянна, что дает различное число осцилляций для разных гармоник. То есть хорошо локализованные и в t - и в k -пространстве функции Габора не обладают свойством самоподобия.

НААР-вейвлет (формула (3), рис. 2, г) - пример ортогонального дискретного вейвлета, порождающего ортонормированный базис. Недостатками этого вейвлета являются негладкость - резкие границы в t -пространстве, вследствие чего возникают бесконечные (убывающие, как k^{-1}), «хвосты» в k -пространстве, а также несимметрия формы. Для некоторых приложений эти недостатки не существенны, а иногда односторонность вейвлета даже становится достоинством. Часто применяется похожий дискретный, но симметричный ФНАТ-вейвлет, более известный под названием «Французская шляпа» (French hat)

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1/3, \\ -1/2, & 1/3 < |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1, \end{cases} \quad \psi^\wedge(k) = 3H(k) (\sin k/k - \sin 3k/3k),$$

где $H(k)$ - функция Хевисайда.

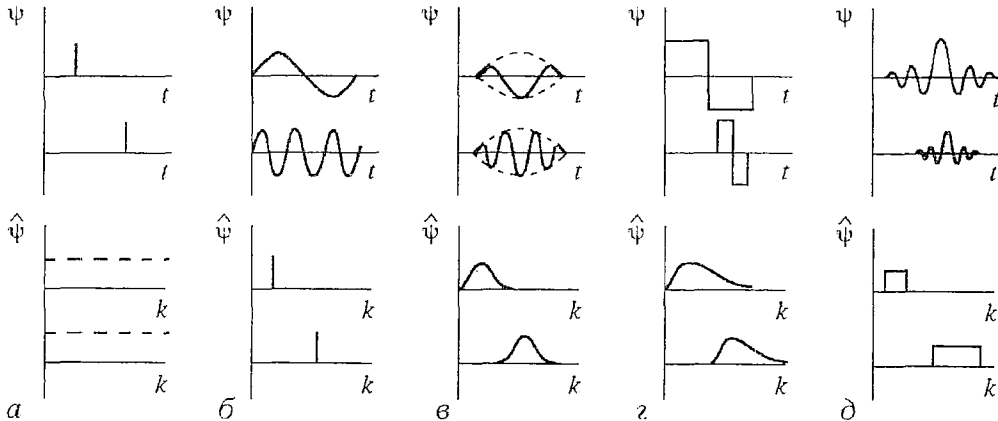


Рис. 2. Анализирующие функции (в зависимости от времени - верхний ряд, образы Фурье - нижний ряд) преобразований: а - Шеннона, б - Фурье, в - Габора; и вейвлет-преобразования: НААР-вейвлет (г) и ЛР-вейвлет (д)

На рис. 2, δ для примера показан LP-вейвлет (Littlewood, Paley). FHAT-вейвлет, нерегулярный во временном пространстве и недостаточно быстро спадающий в частотном, и LP-вейвлет, наоборот, имеющий резко очерченные границы в пространстве Фурье и плохо спадающий во временном пространстве, можно считать предельными случаями, между которыми находятся наиболее приемлемые вейвлеты.

1.2.2. Примеры вейвлетообразующих функций. Поскольку вейвлет-преобразование есть скалярное произведение анализирующего вейвлета и анализируемого сигнала, коэффициенты $W(a,b)$ содержат комбинированную информацию о вейвлете и сигнале (как и коэффициенты преобразования Фурье, которые содержат информацию о сигнале и синусоидальной волне). Выбор анализирующего вейвлета, как правило, определяется тем, какую информацию необходимо извлечь из сигнала. Каждый вейвлет имеет характерные особенности во временном и в частотном пространстве, поэтому иногда с помощью разных вейвлетов можно полнее выявить и подчеркнуть те или иные свойства анализируемого сигнала.

Если продолжить уже упоминавшуюся аналогию с «математическим микроскопом», то параметр сдвига b фиксирует точку фокусировки микроскопа, масштабный коэффициент a - увеличение и, наконец, выбором базисного вейвлета ψ определяются оптические качества микроскопа.

Вещественные базисы часто конструируются на основе производных функции Гаусса

$$\psi_m(t) = (-1)^m \partial_t^m [\exp(-|t|^2/2)], \quad \psi^*_m(k) = m(ik)^m \exp(-|k|^2/2),$$

здесь $\partial_t^m = \partial^m / \partial t^m$. Более высокие производные имеют больше нулевых моментов и позволяют извлечь информацию об особенностях более высокого порядка, содержащихся в сигнале.

На рис. 3, a, b показаны вейвлеты, полученные при $m=1$ и $m=2$, соответственно. Из-за их формы первый называют обычно WAVE-вейвлет, второй - MNAT-вейвлет, или «Мексиканская шляпа» (Mexican hat).

MNAT-вейвлет, имеющий узкий энергетический спектр и два нулевых момента, хорошо приспособлен для анализа сложных сигналов. Обобщенный на двумерный случай, MNAT-вейвлет часто используется для анализа изотропных полей. Если же производная берется лишь в одном направлении, получается неизотропный базис с хорошей угловой избирательностью [6]. Для построения такого базиса к масштабным преобразованиям и сдвигам базисного вейвлета необходимо добавить его вращение. При этом «математический микроскоп» приобретает еще и качества поляризатора с углом поляризации, пропорциональным углу поворота вейвлета.

На основе функции Гаусса строится также хорошо известный DOG-вейвлет (difference of Gaussians)

$$\psi(t) = \exp(-|t|^2/2) - 0.5 \exp(-|t|^2/8),$$

$$\psi^*(k) = (2\pi)^{-1/2} [\exp(-|k|^2/2) - \exp(-2|k|^2)].$$

Примеры комплексных вейвлетов приведены на рис. 3, β, γ (показаны их действительные составляющие). Наиболее часто используемый комплексный базис строится на основе хорошо локализованного в k - и в t -пространстве вейвлета Морле [1]

$$\psi(t) = \exp(ik_0 t) \exp(-t^2/2), \quad \psi^*(k) = H(k) \exp[-(k - k_0)^2/2]$$

- плоская волна, модулированная гауссианом единичной ширины. На рис. 3, β вейвлет Морле показан при $k_0=6$. С увеличением k_0 возрастает угловая избирательность базиса, но ухудшается пространственная.

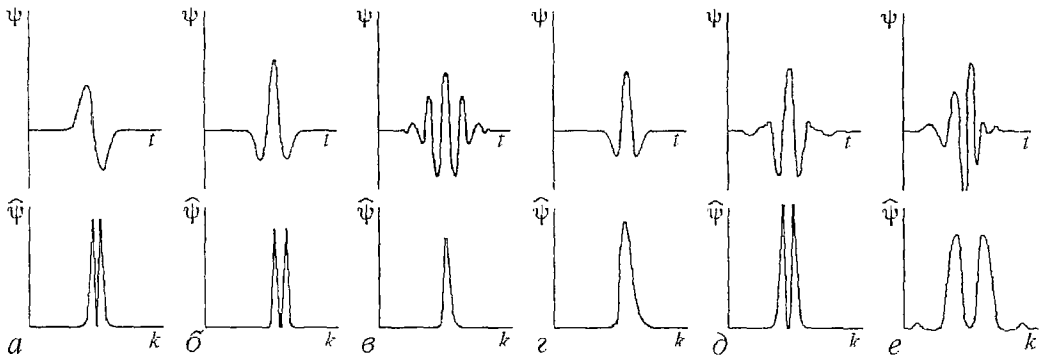


Рис. 3. Примеры часто используемых вейвлетов: а - WAVE, б - MHAТ, в - Morlet, г - Paul, д - LMB, е - Dobeсhies. Показаны вейвлеты в зависимости от времени (верхний ряд) и их образы Фурье (нижний ряд)

Часто применяемый в квантовой механике вейвлет Пауля [8]

$$\psi(t) = \Gamma(m+1) im / (1-it)^{m+1}, \quad \psi^{\wedge}_m(k) = H(k) (k)^m \exp(-k)$$

показан на рис. 3, г при $m=4$. Чем больше m , тем больше нулевых моментов имеет вейвлет.

Представленные комплексные вейвлеты являются прогрессивными. Так называются вейвлеты, имеющие нулевые коэффициенты Фурье при отрицательных значениях волновых чисел. Они хорошо приспособлены для анализа сигналов, для которых важен принцип причинности, - эти вейвлеты сохраняют направление времени и не создают паразитической интерференции между прошлым и будущим.

Отметим, что при анализе комплексного одномерного сигнала или использовании комплексного анализирующего вейвлета в результате вейвлет-преобразования получаются двумерные массивы значений модуля коэффициентов и фазы $W(a,b) = |W(a,b)| \exp(i\Phi(a,b))$.

На рис.3,д,е приведены примеры вейвлетов, которые часто служат основой для построения ортогональных дискретных базисов типа (1) с помощью процедуры Малла [9]: LMB-вейвлет (Lemarie, Meyer, Battle) [10,11] и один из вейвлетов Добечи [5]. Это би-ортогональные вейвлеты, имеющие пару (двойника), необходимую для получения реконструкционной формулы. В цитированных работах представлены другие примеры таких вейвлетов и способы их конструирования.

1.3. Свойства и возможности вейвлет-преобразования

В отличие от одномерного преобразования Фурье, дающего также одномерную информацию об относительном вкладе (амплитудах) разных временных масштабов (частот), результатом вейвлет-преобразования одномерного ряда является двумерный массив амплитуд вейвлет-преобразования - значений коэффициентов $W(a,b)$. Распределение этих значений в пространстве (a,b) = (временной масштаб, временная локализация) дает информацию об эволюции относительного вклада структур разного масштаба во времени и называется (по аналогии со спектром амплитуд или коэффициентов преобразования Фурье) спектром коэффициентов вейвлет-преобразования, частотно- или масштабно-временным спектром или вейвлет-спектром.

В литературе уже принято спектр Фурье называть single spectrum, в отличие от вейвлет-спектра - time-scale spectrum, или wavelet spectrum.

1.3.1. Способы представления результатов. Спектр $W(a,b)$ одномерного сигнала представляет собой поверхность в трехмерном пространстве. Способы визуализации этой информации могут быть различными. Кроме поверхностей,

часто представляют их проекции на плоскость (a,b) с изолиниями (изоуровнями) или теневые картины, позволяющие проследить изменение амплитуд вейвлет-преобразования на разных масштабах и во времени, а также картины линий локальных экстремумов этих поверхностей (так называемый «skeleton»), четко выявляющие структуру анализируемого процесса. Термин «скелет» или «скелетон» хорошо отражает смысл картин линий локальных экстремумов и мы часто будем использовать его для краткости.

В тех случаях, когда необходимо показать очень широкий диапазон масштабов, предпочтительнее визуализация результатов в координатах $(\log a, b)$.

Продемонстрируем сказанное на примере преобразования конкретного сигнала, не касаясь интерпретации результатов анализа. На рис. 4, а представлена зависимость интенсивности глобального тропического циклогенеза от времени в период с 1983 по 1992 год; ряд составлен из значений количества тайфунов в тропической зоне Земли в сутки, длина ряда равна 3654 суткам. Результаты анализа частично опубликованы в [12]. На рис. 4,б,в показаны картина значений коэффициентов $W(a,b)$ и картина значений плотности энергии сигнала $E_w(a,b) = W^2(a,b)$ (см.п. 1.3.3.) в проекциях на плоскость (a,b) : по оси абсцисс b отложено время, по оси ординат a - временной масштаб, меняющийся от недели до полутора лет (масштаб линейно растет вниз). В вычислениях использовался МНАТ-вейвлет. На рис.4, б светлые области соответствуют положительным, а темные - отрицательным значениям $W(a,b)$, оттенками серого цвета в каждой из областей выделены диапазоны значений $W(a,b)$. На рис. 4, в светлые области соответствуют большим значениям плотности энергии $E_w(a,b)$, темные - меньшим.

Значение амплитуды вейвлет-преобразования в точке (a_0, b_0) тем больше, чем выше корреляция между вейвлетом данного масштаба и поведением сигнала в окрестности $t=b_0$. Обе картины демонстрируют, что процесс составляют компоненты разных масштабов и что он нестационарен - экстремумы $W(a,b)$ наблюдаются на разных масштабах, интенсивность их меняется и со временем и с масштабом. На масштабах полгода-год процесс почти периодический, годовой ход отчетливо прослеживается на обеих картинах. Пересоединения максимумов на крупных масштабах могут говорить о нелинейности процесса на масштабах более года (нелокальные взаимодействия являются одним из характерных свойств нелинейных систем).

Процесс заметно усложняется на масштабах менее полугода. Для иллюстрации этого на рис. 4, г, д в другом масштабе для небольшого фрагмента, выделенного на рис. 4, б рамкой, показаны картина значений плотности энергии $E_w(a,b)$ и картина линий локальных экстремумов - линий, от масштаба к масштабу соединяющих экстремумы каждой поверхности («холма» или «впадины») отдельно. Многие авторы полагают, что скелетон не только четко и без лишних деталей визуализирует структуру анализируемого процесса, но содержит всю информацию о нем. Темные линии на рисунке отмечают положение максимумов $W(a,b)$ - вершин «холмов», более светлые пунктирные линии отмечают положение минимумов $W(a,b)$ - дно «впадин».

На рис. 4, г, д можно подробно рассмотреть мелкомасштабные детали процесса: в верхней части картины есть эволюционирующие частоты, видны диапазоны локальной периодичности процесса на разных масштабах, линии локальных экстремумов четко обозначают годовую и полугодовую периодичности (в нижней части картины), на некоторых масштабах (в верхней и средней части картины) они образуют «вилочки», характерные для бифуркаций удвоения периода.

Мы уже говорили, что вейвлет-преобразование разлагает анализируемый процесс на составляющие его волны, компоненты разного масштаба и, кроме того, дает «локализованную» во времени информацию о процессе. Горизонтальное сечение показанных на рис. 4 картин при заданном масштабе a покажет изменение компоненты выбранного масштаба со временем. Вертикальное сечение картин коэффициентов или картин плотности энергии в некоторый момент времени t_0 продемонстрирует поведение процесса в окрестности выбранного момента

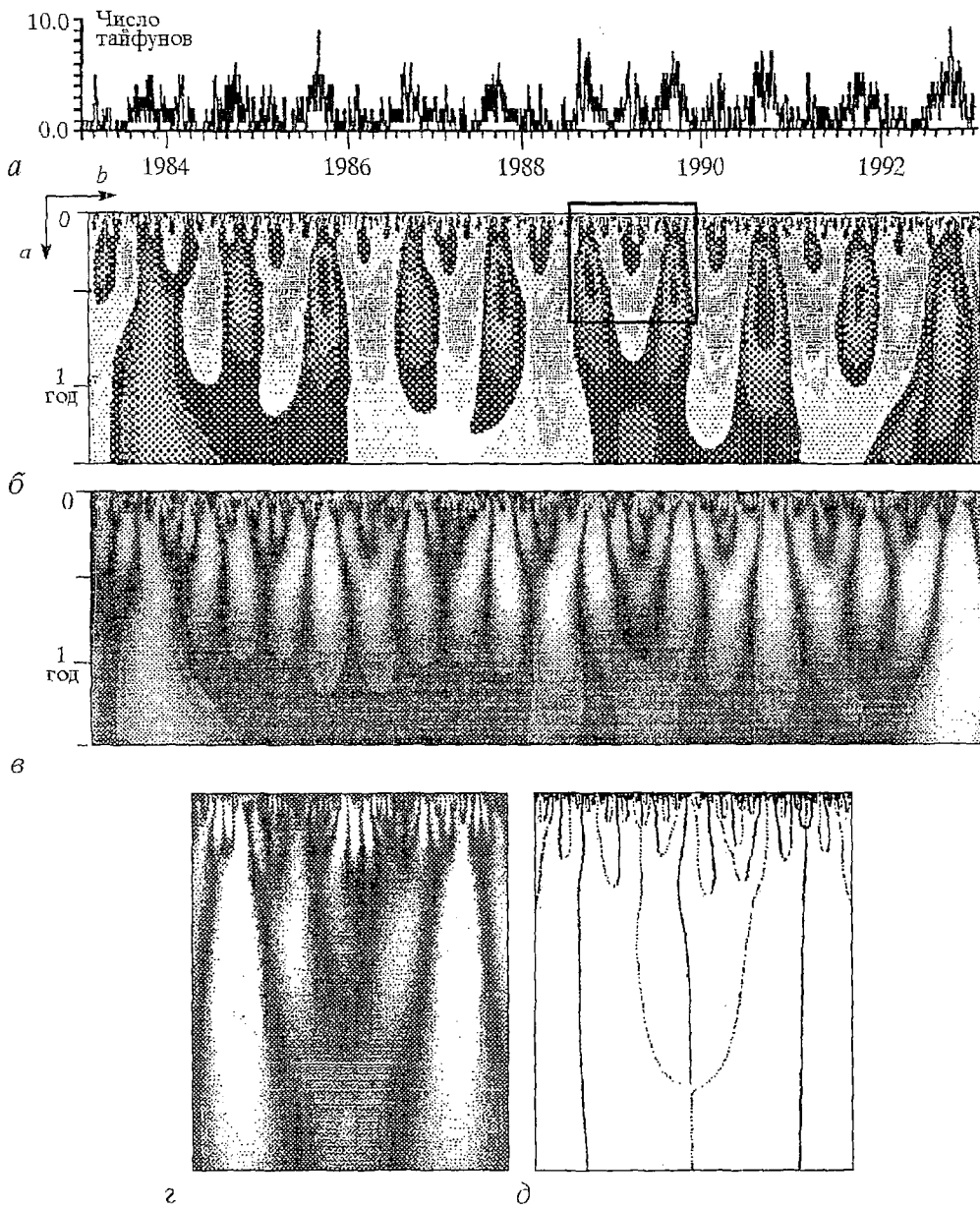


Рис. 4. Пример вейвлет-преобразования реального сигнала: *a* - анализируемый сигнал, *б* - картина коэффициентов $W(a,b)$, *в* - плотность энергии $E_W(a,b)$, *г* - плотность энергии (фрагмент), *д* - линии локальных экстремумов (фрагмент)

времени (можно определить наличие и порядок особенности, набор задействованных масштабов, см. анализ локальной регулярности в п.1.3.3).

Обратим внимание, что значение анализируемой функции в точке t_0 влияет на значения коэффициентов преобразования в растущих с масштабom временных диапазонах в так называемом угле влияния (рис. 5, *a*). Ясно, что угол влияния выглядит иначе, если масштаб меняется не линейно, а по иному закону (например, логарифмическому). В свою очередь, коэффициент $W(a,b)$ в точке (a_0, b_0) зависит от значений ряда из определяемого тем же углом влияния временного диапазона (диапазона интегрирования) около b_0 (рис. 5, *б*). Диапазон этот тем больше, чем больше масштаб a_0 , то есть высокочастотная (или мелкомасштабная) информация вычисляется на основе малых отрезков ряда, а низкочастотная - больших.

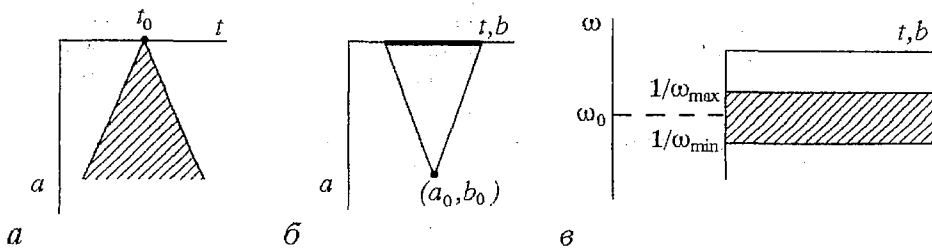


Рис. 5. Угол влияния (а), (б) и полоса влияния (в)

Максимальный угол влияния - угол достоверности (для примера он показан на рис. 5, б), отмечает область достоверности - область, вне которой коэффициенты $W(a, b)$ вычисляются уже по отрезкам, выходящим за границы ряда (как бы по дополненному ряду). Для уменьшения ошибок вычисления коэффициентов вне угла достоверности ряд часто дополняют с учетом его поведения (средним значением, известным временным ходом и т.п.).

Вейвлет-преобразование может быть записано также через образы Фурье сигнала $f^{\wedge}(\omega)$ и вейвлета $\psi^{\wedge}(\omega)$. Легко показать, что влияние компоненты Фурье $f^{\wedge}(\omega_0)$ испытывают коэффициенты $W(a, b)$, находящиеся в горизонтальной полосе $\omega_{\min} < a\omega_0 < \omega_{\max}$ (рис. 5, в); в свою очередь, на коэффициент $W(a, b)$ в точке (a_0, b_0) влияют все компоненты Фурье $f^{\wedge}(\omega)$ сигнала, для которых $\omega_{\min} < a_0\omega < \omega_{\max}$. Раствор угла влияния и ширина полосы влияния зависят от базисного вейвлета. Так, МНАТ-вейвлет (см. рис. 3, б) хорошо локализован во времени и имеет узкий энергетический спектр. Это удачное качество означает, в частности, что коэффициенты $W(a, b)$ зависят от малого интервала области частот вейвлета, то есть ширина полосы влияния невелика.

Вопросы, связанные с алгоритмами, остаются за рамками работы. Скажем лишь, что дискретное вейвлет-преобразование очень хорошо приспособлено для быстрого алгоритма, использующего широко применяемую процедуру быстрого преобразования Фурье [13]. Непрерывное преобразование выполняется, как правило, прямым интегрированием. Самая простая (и быстрая) проверка алгоритма заключается в вычислении вейвлет-преобразования функции Дирака: в результате на каждом масштабе должен быть получен анализирующий вейвлет. Проверить достаточную плотность дискретизации по масштабу можно, вычислив вейвлет-преобразование самого анализирующего вейвлета и убедившись в отсутствии каких-либо паразитных краевых деталей.

Для дальнейшего анализа коэффициентов нам понадобятся свойства вейвлет-преобразования. Все они следуют из изложенного уже в первом разделе материала.

1.3.2. Свойства вейвлет-преобразования. Коэффициенты вейвлет-преобразования содержат комбинированную информацию об анализирующем вейвлете и анализируемом сигнале. Несмотря на это, вейвлет-анализ позволяет получить и объективную информацию об анализируемом сигнале, так как некоторые свойства вейвлет-преобразования не зависят от выбора анализирующего вейвлета. Независимость от анализатора делает эти простые свойства преобразования очень важными.

Выпишем основные элементарные свойства вейвлет-преобразования функции $f(t)$. Будем использовать обозначения $[W_{\psi}f](a, b) = W[f] = W(a, b)$.

1⁰. *Линейность*

$$W[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha W[f_1] + \beta W[f_2] = \alpha W_1(a, b) + \beta W_2(a, b).$$

Отсюда, в частности, следует, что вейвлет-преобразование векторной функции есть вектор с компонентами, представляющими собой вейвлет-преобразование каждой из компонент анализируемого вектора в отдельности.

2⁰. *Инвариантность относительно сдвига*

$$W[f(t - b_0)] = W(a, b - b_0).$$

Из этого свойства следует коммутативность дифференцирования, в частности, $\partial_t W[f] = W[\partial_t f]$, здесь $\partial_t = \partial/\partial t$. Вместе с первым свойством это означает перестановочность и для производных векторного анализа.

3⁰. *Инвариантность относительно растяжения (сжатия)*

$$W[f(t/a_0)] = (1/a_0) W(a/a_0, b/a_0).$$

Это свойство позволяет, в частности, определять наличие и характер особенностей анализируемой функции (см. следующий пункт).

Кроме трех выписанных независимых от выбора анализирующего вейвлета элементарных свойств вейвлет-преобразование обладает еще несколькими. Наиболее важными и полезными из них, на наш взгляд, являются следующие.

1¹. *Частотно-временная локализация и наличие частотно-временного окна и угла влияния* (правильнее было бы говорить масштабно-временная локализация). Параметры частотно-временного окна выписаны в пункте 1.1.4.

2¹. *Дифференцирование*

$$W[\partial_t^m f] = (-1)^m \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \partial_t^m [\bar{\psi}_{ab}(t)] dt.$$

Таким образом, чтобы проигнорировать, например, крупномасштабные полиномиальные составляющие и проанализировать высокого порядка особенности или мелкомасштабные вариации функции f , безразлично, дифференцировать ли нужное число раз анализирующий вейвлет или саму функцию. Очень полезное свойство, если учесть, что функция f часто представляет собой ряд чисел, а анализирующий вейвлет задан формулой.

3¹. *Для вейвлет-преобразования существует аналог теоремы Парсеваля и выполняется равенство*

$$\int f_1(t) \bar{f}_2(t) dt = C_{\psi}^{-1} \iint W_1(a,b) \bar{W}_2(a,b) da db / a^2,$$

откуда следует, что энергия сигнала может быть вычислена через амплитуды (коэффициенты) вейвлет-преобразования подобно тому, как она вычисляется через амплитуды преобразования Фурье $E = \int f^2(t) dt = \int |A(\omega) - iB(\omega)|^2 d\omega$.

Определения и свойства одномерного непрерывного вейвлет-преобразования обобщаются на многомерный и на дискретный случаи. Каждый из них имеет свои особенности. Здесь мы не будем о них говорить, поскольку для дальнейшего нам понадобится непрерывное вейвлет-преобразование одномерных функций.

1.3.3. Некоторые возможности вейвлет-анализа. Имея вейвлет-спектры, можно вычислить полезные характеристики изучаемого процесса и проанализировать многие его свойства. Опишем более подробно возможности анализа особенностей сигнала и его энергетических характеристик.

а) *Анализ локальной регулярности* [6,13]. Рассмотрим некоторые следствия свойства масштабной инвариантности 3⁰.

Если $f \in C^m(t_0)$, то есть анализируемая функция в точке t_0 непрерывно дифференцируема вплоть до производной порядка m , тогда коэффициенты ее вейвлет-преобразования при $t=t_0$ должны подчиняться неравенству $W(a,t_0) \leq a^{m+1} a^{1/2}$ при $a \rightarrow 0$.

Множитель $a^{1/2}$ возникает из-за того, что вследствие масштабной инвариантности 3⁰ скейлинговые свойства функции f необходимо изучать на основе L^1 - нормированных коэффициентов. Напомним, что L^1 - и L^2 - нормированные коэффициенты связаны простым соотношением $W(a,b) = a^{-1/2} W(a,b)$.

Если $f \in \Lambda^\alpha(t_0)$, то есть анализируемая функция принадлежит пространству холдеровских функций с показателем α (напомним, это означает, что f непрерывна, не обязательно дифференцируема в t_0 , но такая, что $|f(t+t_0) - f(t)| = c|t_0|^\alpha$, $\alpha < 1$,

$c = \text{const} > 0$), то коэффициенты ее вейвлет-преобразования при $t=t_0$ должны подчиняться соотношению $W(a, t_0) \sim c a^\alpha a^{1/2}$ при $a \rightarrow 0$.

Вейвлет-преобразование так устроено, что $W(a, t)$ - регулярная функция даже при нерегулярной $f(t)$. Вся информация о возможной особенности $f(t)$ (локализация t_0 , интенсивность c , показатель α) заключена в асимптотическом поведении коэффициентов $W(a, t_0)$ при малых a . Если коэффициенты на малых масштабах расходятся, тогда f имеет особенность в t_0 и показатель сингулярности α определяется наклоном $\log|W(a, t_0)|$ к $\log a$. Если они, напротив, близки к нулю в окрестности t_0 на малых масштабах, тогда f в точке t_0 регулярна.

Описанное свойство часто и с успехом используется при анализе фрактальных и мультифрактальных сигналов [14, 15]. Типичным свойством фрактальных множеств является их асимптотическое самоподобие, так, разглядывая f вблизи точки t_0 с разным увеличением, мы на разных масштабах увидим практически ее же: $f(\lambda t + \lambda t_0) - f(\lambda t) \sim \lambda^{\alpha(t_0)} (f(t + t_0) - f(t))$. Базис преобразования самоподобен; легко показать, что и коэффициенты преобразования масштабируются с тем же показателем, что и анализируемая функция: $W(\lambda a, t_0 + \lambda b) \sim \lambda^{\alpha(t_0)} W(a, t_0)$. Отсюда легко получить скейлинговый показатель $\alpha(t_0)$, который, как известно, тесно связан с фрактальной размерностью множества. Анализ мультифрактального множества позволяет определить спектр показателей и спектр размерностей.

Особо отметим, что анализ локальной регулярности в некотором смысле универсален - он не зависит от выбора анализирующего вейвлета.

б) *Энергетические характеристики* [6,16]. Рассмотрим некоторые следствия свойства 3¹.

Из существования для вейвлет-преобразования аналога равенства Парсевала следует, что в пространстве действительных функций полная энергия сигнала f может быть записана через амплитуды вейвлет-преобразования в виде

$$E_f = \int f^2(t) dt = C_\Psi^{-1} \iint W^2(a, b) da db / a^2.$$

Плотность энергии сигнала $E_W(a, b) = W^2(a, b)$ характеризует энергетические уровни (уровни возбуждения) исследуемого сигнала $f(t)$ в пространстве $(a, b) =$ =(масштаб, время).

Локальный спектр энергии. Одним из основных отличий вейвлет-преобразования является возможность получать локализованные характеристики и изучать локальные свойства процессов. Как ни парадоксально звучат слова «локальный энергетический спектр», однако, природа вейвлет-преобразования такова, что термин имеет право на существование. Поясним сказанное.

Зная плотность энергии $E_W(a, b)$, можно с помощью окна определить локальную плотность энергии в точке b_0 (или t_0)

$$E_\xi(a, t_0) = \int E_W(a, b) \xi((b - t_0)/a) db.$$

Оконная функция ξ «поддерживает» диапазон около t_0 и удовлетворяет равенству $\int \xi(b) db = 1$. Если в качестве ξ выбрать функцию Дирака, то локальный спектр энергии примет вид

$$E_\delta(a, t_0) = W^2(a, t_0).$$

Эта характеристика позволяет проанализировать временную динамику передачи энергии процесса по масштабам - обмен энергией между составляющими процесс компонентами разного масштаба в любой заданный момент времени.

Глобальный спектр энергии. Полная энергия распределена по масштабам в соответствии с глобальным спектром энергии коэффициентов вейвлет-преобразования

$$E_w(a) = \int W^2(a,b) db. \quad (8)$$

Его называют также скалограммой (scalogram) или дисперсией вейвлет-преобразования (wavelet variance).

Выразив спектр энергии $E_w(a)$ через спектр энергии сигнала в пространстве Фурье $E_F(\omega) = |f^\wedge(\omega)|^2$

$$E_w(a) = \int E_F(\omega) |\psi^\wedge(a\omega)|^2 d\omega, \quad (9)$$

можно видеть, что вейвлет-спектр энергии сигнала соответствует спектру Фурье энергии сигнала, сглаженному на каждом масштабе спектром Фурье анализирующего вейвлета.

Энергия сигнала определяется через спектр энергии равенством

$$E_f = C_\psi^{-1} \int E_w(a) da/a^2.$$

Таким образом, E_f пропорциональна площади под кривой $E_w(a)/a^2$, а скалограмма отражает относительный вклад различных масштабов в полную энергию и выявляет распределение энергий процесса по масштабам.

Анализируемая функция имеет конечную энергию, а анализирующий вейвлет - нулевое среднее значение, вследствие чего спектр энергии $E_w(a)$ должен стремиться к нулю на обоих концах шкалы масштабов и должен иметь по крайней мере один максимум. Положение подобных максимумов (пиков) спектра Фурье $E_F(\omega)$ привычно связывается с частотами и соответствующими характерными модами анализируемого сигнала, несущими в себе основную энергию процесса. Максимумы энергетического спектра $E_w(a)$ интерпретируются аналогично - они определяют основной вклад в полную энергию E_f .

Покажем на простом примере связь между выявленным в результате вейвлет-преобразования масштабом и характерным масштабом, полученным из спектра Фурье. Пусть $f(t) = \sin(\omega_0 t) = \sin(2\pi t/T_0)$ - обыкновенный синус; его вейвлет-преобразование, записанное через образы Фурье (см., например, формулу (7)), $W(a,b) = [\exp(i\omega_0 b)\psi^\wedge(a\omega_0) + \exp(-i\omega_0 b)\psi^\wedge(-a\omega_0)]/i2$, а спектр $E_w(a) = |\psi^\wedge(a\omega_0)|^2$. Необходимым и достаточным условием наличия пика на масштабе $a=a_0$ является равенство нулю производной $d\psi^\wedge(a\omega_0)/da$ при $a=a_0$. Условие выполняется при $a_0\omega_0 = \omega_\psi$, где ω_ψ - зависящая от вейвлета ψ константа с размерностью частоты. Для многих вейвлетов константа ω_ψ вычисляется аналитически; так, для HAAR- и MNAT-вейвлетов она равна 1.484π и $2^{1/2}$, соответственно.

На практике, если скалограмма $E_w(a)$ имеет пик при $a=a_0$, характерный временной масштаб определяется как $d=T_0/2=a_0\pi/\omega_\psi$. Множитель $1/2$ появился из-за того, что определяется не период, а масштаб элементарного события, детали. В этом смысле синус, например, имеет две элементарные детали на периоде.

Константа ω_ψ получена для простой функции. Распространяя результат на произвольный сигнал, даже негармонический, мы предполагаем, что положение максимума $E_w(a)$, то есть выявленный масштаб можно интерпретировать как среднюю продолжительность элементарного события (событий), вносящего основной вклад в энергию анализируемого процесса. Этот факт проверен на многих известных сигналах с разными вейвлетами и признан очень хорошим приближением (см., например, [16]).

2. Примеры применения вейвлет-преобразования

В разделе 2.1 мы продемонстрируем возможности вейвлетов в выявлении различных характерных особенностей сигналов на примерах применения вейвлет-

преобразования к некоторым модельным сигналам, построенным на основе функций с хорошо известными свойствами (см. также [17]). В разделе 2.2 представлены результаты анализа реальных данных - долговременных рядов наблюдений за изменениями некоторых геофизических параметров.

2.1. Модельные примеры

Для каждого примера приведен график анализируемого ряда. Коэффициенты $W(a,b)$ показаны в виде проекций на плоскость (a,b) (временной масштаб, время); по оси абсцисс отложено время, по оси ординат - временной масштаб (он линейно растет вниз). Как и на рис.4, б, светлые области соответствуют положительным, а темные - отрицательным значениям $W(a,b)$, оттенками серого цвета в каждой области выделены диапазоны значений $W(a,b)$. Картины линий локальных экстремумов или локальных максимумов представлены в тех же координатах.

Приведенные результаты получены с помощью МНАТ-вейвлета. Вычисления проводились в прямоугольной области значений параметров (a,b) . Ряды данных для этого продлевались; способ дополнения показан на графиках анализируемых функций. На картинах линий локальных максимумов показан треугольник достоверности, или максимальный угол влияния; его граница продолжается стрелочкой, если она совпадает с какой-нибудь линией максимумов.

2.1.1. Гармоническая функция. Вейвлет-преобразование с МНАТ-вейвлетом применялось к рядам синусоид

$$f(t) = \sin(2\pi t/T_1) + C\sin(2\pi t/T_2).$$

Результаты вейвлет-преобразования такой функции легко сравнить с тем, что дает привычное преобразование Фурье. Значения периодов T_1 , T_2 и постоянной C анализируемых сигналов приведены в таблице. В нее также занесены масштабы $D_1=T_1/2$, $D_2=T_2/2$, которые должны быть получены по коэффициентам вейвлет-преобразования, номер соответствующего рисунка и номер сигнала.

Таблица

Характеристики анализируемых гармонических функций

T_1	T_2	C	D_1	D_2	Номер рисунка	Номер сигнала
10	200	0.4	5.0	100	6	1
10	200	0.4	5.0	100	7	2
50	-	-	25.0	-	9	3
25	-	-	12.5	-	10	4
25	50	1.0	12.5	25.0	13	5
25	50	1.0	12.5	25.0	14	6
25	23	1.0	12.5	11.5	16	7

Сигнал 1. На рис. 6, а показан сигнал I - сумма синусоид с заметно отличающимися частотами (как видно из графика, ряд продолжен средним значением). На картине значений коэффициентов (рис. 6, б) легко различаются повторяющиеся детали в верхней части картины (при малых значениях масштаба a), являющиеся результатом резонанса высокочастотной составляющей сигнала с мелкомасштабными вейвлетами; а также три темные и две светлые области на крупных масштабах (положительные и отрицательные значения $W(a,b)$, соответственно), являющиеся результатом высокой корреляции между

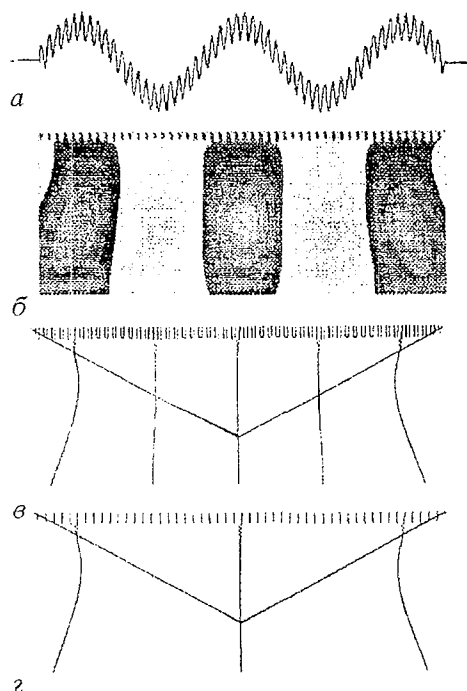


Рис. 6. Сигнал 1 (а) и результаты его вейвлет-преобразования: картины коэффициентов (б), линий локальных экстремумов (в) и линий локальных максимумов (г)

период (рис. 7, а), но даже в этом случае картина коэффициентов (рис. 7, б) позволяет говорить о наличии крупномасштабной составляющей в сигнале, а две крупномасштабные линии скелетона (рис. 7, в) позволяют говорить о наличии у нее двух экстремумов - максимума и минимума. Сдвоенные линии локальных экстремумов по краям отмечают граничные особенности (см. п.2.1.2). Отметим, что крупномасштабные детали, связанные с краевыми эффектами, малоинтенсивны. На рис. 7, б это отражено тем, что они имеют заметно меньше цветовых уровней, чем основные периодические детали.

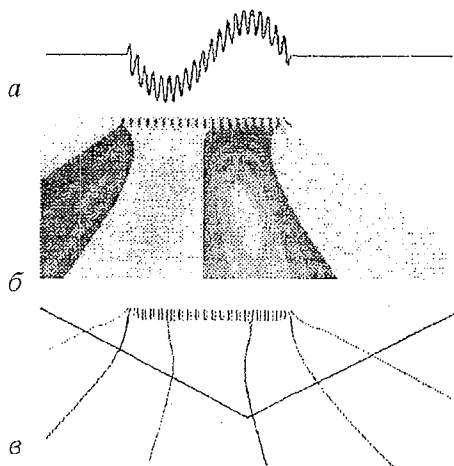


Рис. 7. Сигнал 2 (а), картины коэффициентов (б) и линий локальных экстремумов (в)

крупномасштабными вейвлетами и низкочастотной составляющей сигнала, представленной всего двумя с половиной периодами.

На рис. 6, в представлены линии локальных экстремумов; черные линии отмечают локальные максимумы, серые - локальные минимумы. На картине локальных максимумов (рис. 6, г) показаны только линии, относящиеся к положительным экстремумам. Обе картины выявляют периодическую структуру анализируемого сигнала и представляют собой масштабновременной скелет описываемого сигналом процесса. Линии, отмечающие положение локальных экстремумов коэффициентов вейвлет-преобразования, соответствуют экстремумам анализируемой функции - точкам смены знака ее производной.

В дальнейшем будет демонстрироваться лишь один из скелетонов. Если линии локальных минимумов не несут смысловой нагрузки и лишь усложняют рисунок, как для сигнала 1, будет представлена только картина линий локальных максимумов.

Сигнал 2. На длине сигнала уложился один крупномасштабный

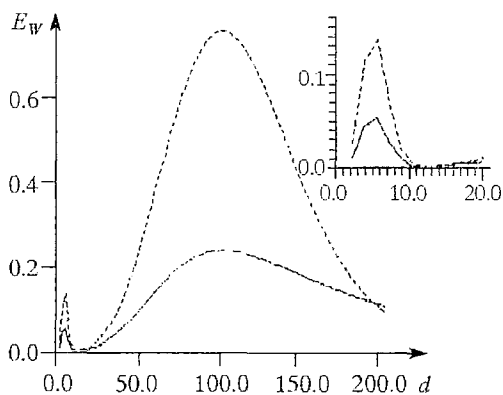


Рис. 8. Энергетические спектры $E_W(d)$ сигналов 1 (пунктир) и 2 (сплошная линия); в верхнем углу справа более крупно показана мелко-масштабная часть спектра

Энергетический спектр $E_w(a)$ позволяет в этом простом случае определить даже масштаб крупномасштабной составляющей сигнала, хотя она и представлена всего одним периодом. На рис. 8 показан спектр энергии $E_w(a)$; напомним, что для МНАТ-вейвлета характерный временной масштаб d связан с масштабом вейвлет-преобразования a соотношением $d=a\pi/2^{1/2}$. Сплошной линией на рисунке показан энергетический спектр сигнала 2, пунктирной - сигнала 1. В обоих случаях легко выделяются пики, соответствующие масштабам 5 и 100; мелкомасштабная часть спектра более подробно показана в правом верхнем углу рисунка. С помощью спектров Фурье в обоих случаях нам удастся выявить только высокочастотную составляющую.

Сигналы 3 и 4. На рис. 9 и 10 показаны картины коэффициентов и линий локальных максимумов, полученные в результате преобразования синусоид с периодами, равными 50 и 25, соответственно. Верхние части рисунков демонстрируют периодический характер сигнала. Темные и светлые области в нижней части рисунков связаны с граничными эффектами и очень малоинтенсивны (поэтому они имеют один цветовой уровень и волнистые линии локальных экстремумов).

Одинаковая длина линий локальных максимумов внутри треугольника достоверности и периодичность их появления указывают на единственную характерную частоту сигнала и постоянство периода. Об этом свидетельствует также своеобразная «пунктирная» структура скелетона в нижней части треугольника достоверности; в случае наличия нескольких частот (см. результаты для сигналов 6, 7, 8) она станет «интерференционной».

Такая своеобразная интерференционная (или пунктирная, как для сигналов 3 и 4) структура скелета возникает в тех случаях, когда длина ряда оказывается достаточной, чтобы внутри треугольника достоверности реализовались все присущие сигналу масштабы (это выполняется для всех рассмотренных сигналов, кроме первого), и из-за того, что коэффициенты $W(a,b)$ после реализации всех масштабов резко падают, становятся очень малыми и стремятся к нулю колебательным образом.

На рис. 11 показаны спектры $E_w(d)$ сигналов 3 и 4, имеющие характерные пики на масштабах 25 и 12.5, соответственно.

Сигналы 5 и 6 представляют собой разные комбинации сигналов 3 и 4: сигнал 5 составлен из последовательно включающихся сигналов 3 и 4, сигнал 6 представляет собой их сумму. Сигналы 5 и 6 интересны тем, что они неразличимы для преобразования Фурье - их спектры Фурье $E_F(\omega)$, показанные на рис.12,

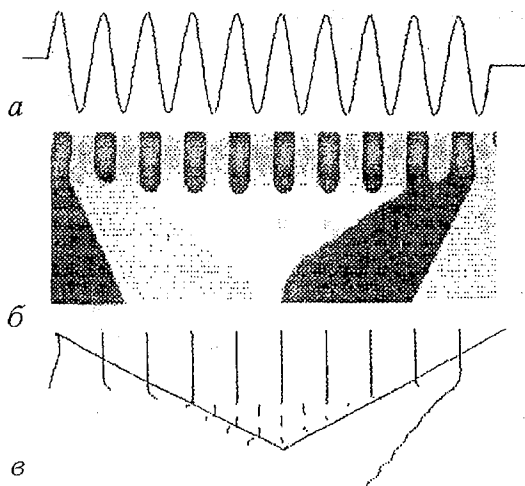


Рис. 9. Сигнал 3 (а), картины коэффициентов (б) и линий локальных максимумов (в)

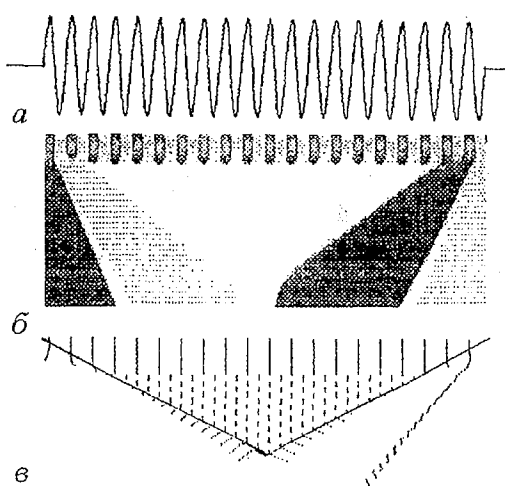


Рис. 10. Сигнал 4 - то же, что на рис.9

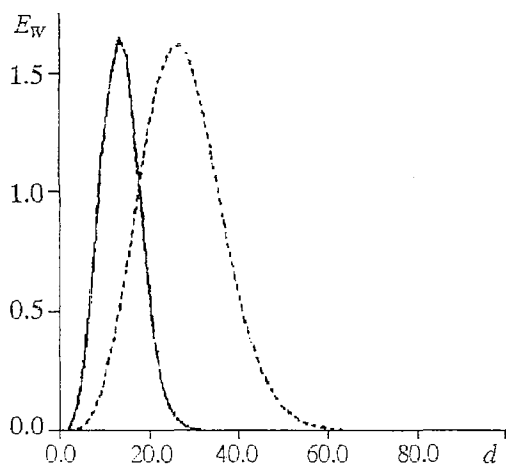


Рис. 11. Энергетические спектры $E_W(d)$ сигналов 3 (пунктир) и 4 (сплошная линия)

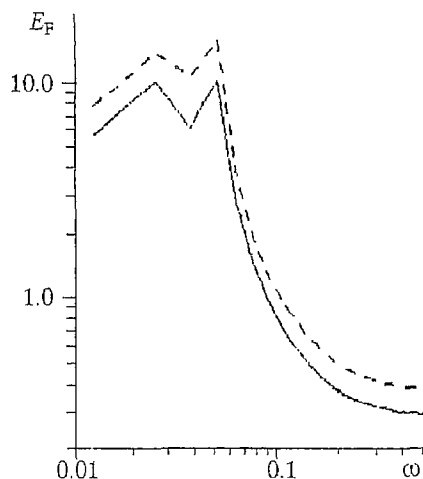


Рис. 12. Спектры Фурье $E_F(\omega)$ сигналов 5 (сплошная линия) и 6 (пунктир)

практически одинаковы. Для вейвлет-преобразования эти сигналы очень разные, что демонстрируют картины коэффициентов и линий локальных максимумов на рис.13 и 14.

Энергетические вейвлет-спектры этих сигналов, как и их спектры Фурье, очень похожи, поскольку получены сверткой по всей длине ряда. Они имеют широкие максимумы, поглощающие характерные масштабы; выделить оба масштаба удастся только по спектрам в разной нормировке, (рис.15, а, б, ср. с рис.11).

Заметим, что нестационарные свойства сигналов, например, эволюционирующие частоты (масштабы), хорошо выявляются с помощью локализованного спектрального анализа, когда при вычислении спектров $E_W(d)$ свертка коэффициентов вейвлет-преобразования ведется не по всей длине ряда, а по его отрезкам.

Сигнал 7. На рис. 16 представлены результаты для сигнала, представляющего собой сумму двух синусоид с очень близкими частотами; наличие второй частоты проявляется лишь наклоненными линиями локальных максимумов. Подобные наклоны могут появиться и в результате низкочастотной модуляции, однако, в таком случае не было бы характерной интерференционной картины скелетона, говорящей о реализации всех масштабов, присутствующих в сигнале.

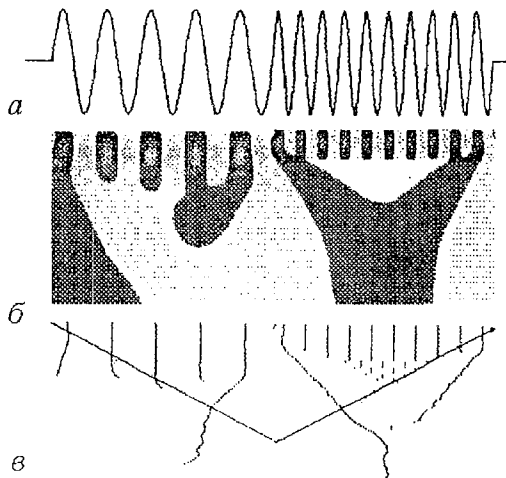


Рис. 13. Сигнал 5 (а), картины коэффициентов (б) и линий локальных максимумов (в)

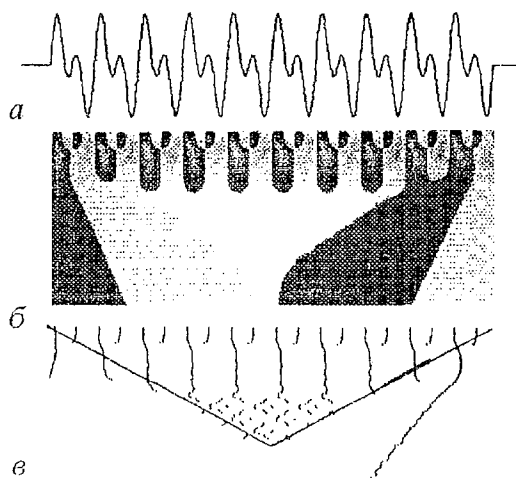


Рис. 14. Сигнал 6 - то же, что на рис.13

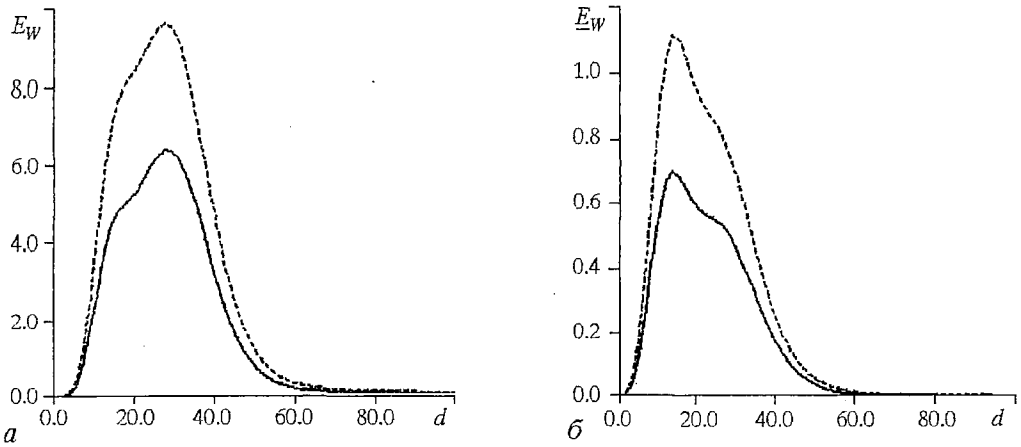


Рис. 15. Энергетические спектры вейвлет-преобразования сигналов 5 (сплошная линия) и 6 (пунктир) в разной нормировке: а - $E_W(d)$; б - $\underline{E}_W(d)$

Значения характерных масштабов 11.5 и 12.5 определяются положением пиков энергетических спектров в разной нормировке. На рис. 17 спектр $\underline{E}_W(d)$ нанесен сплошной линией, $E_W(d)$ - пунктиром.

2.1.2. Сигнал с особенностью. В сигналах часто встречаются изолированные особенности типа импульса, ступеньки, степенные особенности и т.п. Это могут быть как присущие описываемому сигналом процессу детали, так и паразитные детали, например, сбой аппаратуры. Преобразование Фурье сигнала, регулярного везде, за исключением одной сбойной точки, несет информацию о ней во всех своих коэффициентах. Изолированные особенности практически не фильтруются, искажая спектр и реконструированный сигнал.

Вейвлет-преобразование применялось к сигналам с особенностями некоторых из перечисленных типов. На рис. 18 кроме сигналов представлены картины линий локальных экстремумов (они более характерны) и, схематически, несколько линий уровня значений коэффициентов $W(a,b)$. Сплошные линии относятся к положительным, пунктирные - к отрицательным значениям.

Все точечные особенности, содержащиеся в сигналах, сопровождаются линиями локальных максимумов, исходящими из этих точек. Количество их определяется характером особенности сигнала и анализирующим вейвлетом.

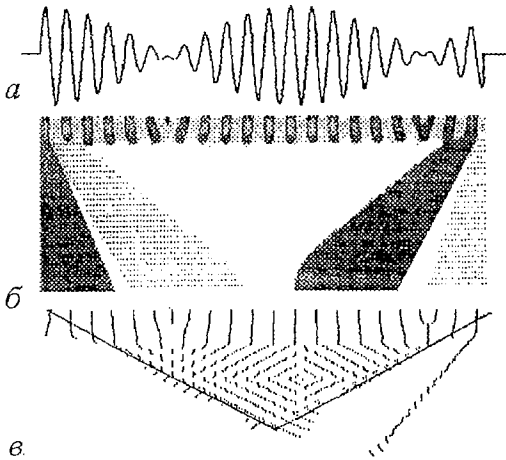


Рис. 16. Сигнал 7 (а), картины коэффициентов (б) и линий локальных максимумов (в)

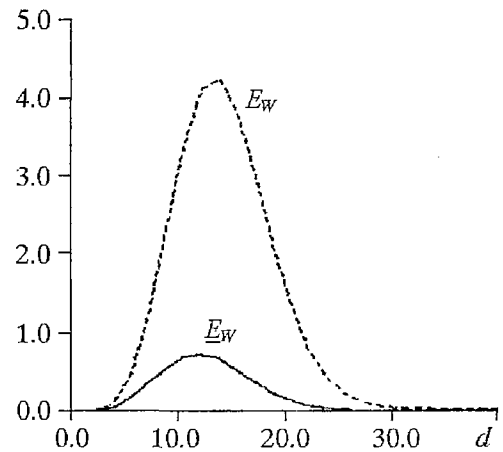


Рис. 17. Энергетические спектры вейвлет-преобразования сигнала 7 в разной нормировке

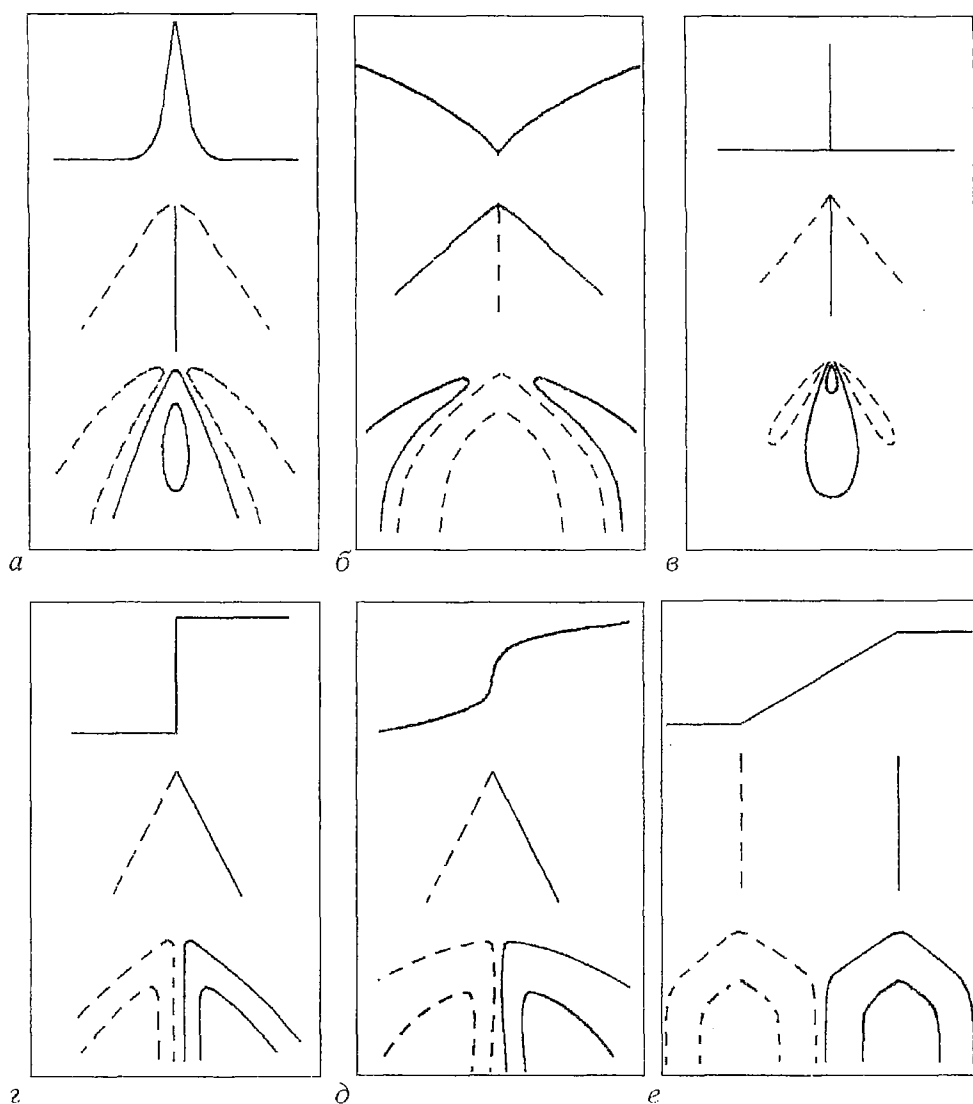


Рис. 18. Вейвлет-преобразование сигнала с особенностями: *a* - сигнал $|t^5|$, *б* - сигнал $t^{2/3}$, *в* - δ -функция, *г* - скачок сигнала, *д* - сигнал $t^{1/3}$, *е* - излом

Примеры предыдущего пункта показали, что смена знака производной анализируемой функции отмечается линией локальных экстремумов распределения $W(a,b)$.

Первые два примера, показанные на рис. 18, *a, б*, содержат особенности, при которых смена знака производной сопровождается разрывом функции (степенные особенности, вида $|t^5|$ и $t^{2/3}$, соответственно). В этом случае точка локализации особенности сигнала отмечена тремя линиями скелетона. Центральная линия является линией максимумов или минимумов в зависимости от того, имеет ли сигнал в этой точке максимум или минимум. Аналогично выглядят результаты вейвлет-преобразования δ -функции (рис. 18, *в*).

Особенности менее высокого порядка, такие, как перегиб функции $t^{1/3}$ (рис.18, *д*) или скачок (рис.18, *г*), отмечаются двумя линиями локальных экстремумов, излом (рис.18, *е*) - одной.

Таким образом, вейвлет-преобразование способно выявить положение особенности - коэффициенты вейвлет-преобразования гладкой функции малы и резко возрастают при появлении особенности, отмечая ее локализацию линиями

локальных экстремумов. Характер особенности в точке определяется из асимптотического поведения коэффициентов вейвлет-преобразования при стремлении масштаба к нулю (см. п.1.3.3). Например, значение коэффициентов вейвлет-преобразования δ -функции максимально при наименьшем значении масштаба, а затем резко падает, повторяя характер особенности. Изолированная особенность локальным образом влияет на коэффициенты вейвлет-преобразования и при необходимости может быть легко удалена из сигнала или скорректирована.

Приведенные результаты получены с помощью МНАТ-вейвлета, имеющего два нулевых момента. Вейвелеты, имеющие только один нулевой момент, неспособны различать особенности производных; распределение коэффициентов вейвлет-преобразования, полученное с помощью такого вейвлета, имеет меньше линий локальных экстремумов. Например, для первых трех сигналов отсутствует центральная линия экстремумов, особенность производной сигнала $t^{1/3}$ (рис. 18, д) не отмечена вообще, а скачок сигнала (рис. 18, г) отмечен одной линией экстремумов.

Чем выше порядок анализирующего вейвлета, чем больше нулевых моментов он имеет, тем лучше вейвлет-преобразование дифференцирует особенности.

Отметим, что особенности вейвлет-преобразования с вейвелетами разного порядка с успехом могут быть использованы для выявления наличия и характера наиболее крупномасштабной составляющей сигнала, так называемого тренда. Применяя к коэффициентам реконструкционную формулу и вычтя реконструированный сигнал из исходного, можно выделить ту самую крупномасштабную составляющую, которая «зануляется» вследствие наличия нулевых моментов у вейвлета: постоянная составляющая, линейный или полиномиальный тренд и т.п. Таким образом, устраняется элемент субъективизма, который почти всегда присутствует при определении тренда другими способами.

2.1.3. Фрактальное множество. Вейвлет-преобразование, с его иерархическим базисом, хорошо приспособлено для анализа каскадных процессов, турбулентных сигналов, фрактальных и мультифрактальных множеств, имеющих иерархическую природу.

Приведем пример анализа фрактального множества, построенного на основе однородного триадного канторовского ряда. Как известно, при построении первого поколения этого ряда отрезок делится на три части, средняя из которых выбрасывается; при построении второго поколения такая же процедура продельвается с двумя оставшимися отрезками и так на каждом последующем этапе до бесконечности. На рис.19, а показаны первые этапы построения ряда.

На основе получившегося множества - канторовской пыли - строится числовая последовательность, состоящая из нулей и единиц (нули соответствуют выбрасываемым при построении ряда частям отрезка).

На рис. 19, б, в показаны фрагменты картины коэффициентов и линий локальных максимумов. Они достаточно подробны, однако линейное изменение масштаба не позволяет охватить большой диапазон масштабов. Чтобы продемонстрировать общий характер процесса, на рис. 20, а скелетон показан в логарифмическом масштабе.

Картина коэффициентов показывает иерархическую структуру анализируемого множества. Еще более ясно она видна на картинах линий локальных максимумов. Скелетон выявляет не только иерархическую структуру анализируемого множества, но и способ построения фрактальной меры, на которой оно сформировано.

Каждый этап каскадного процесса, каждое дробление масштаба отмечено на картине локальных максимумов ветвлением, появлением характерной «вилочки» - линия, отмечающая положение локального максимума, раздваивается, расходясь на два независимых локальных максимума. Это неизменно повторяется с ростом масштаба, так как мера обладает свойством самоподобия и монофрактальна.

Известно, что фрактальная размерность или размерность подобия

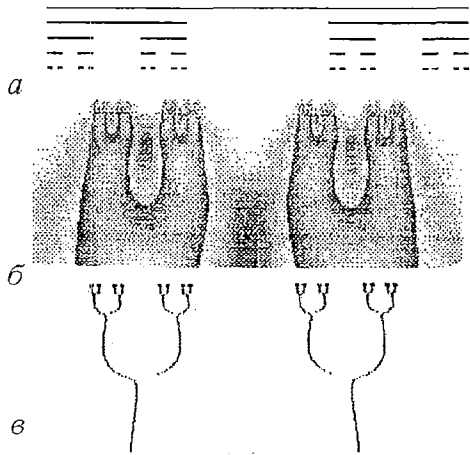


Рис. 19. Первые поколения однородного триадного канторовского ряда (а), фрагменты картин коэффициентов (б) и линий локальных максимумов (в)

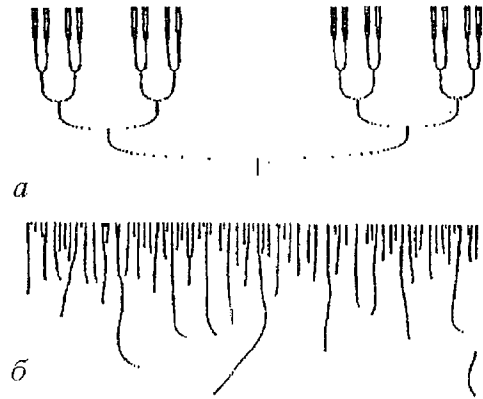


Рис. 20. Картины линий локальных максимумов триадного однородного канторовского ряда (а) и случайного процесса (б); масштаб меняется логарифмически

однородного канторовского ряда $D_f = \ln(m)/\ln(s)$, где m - скорость ветвления, s - масштабный множитель. В случае триадного ряда $D_f = \ln(2)/\ln(3)$. Аналогично размерность вычисляется по коэффициентам вейвлет-преобразования как предел отношения $\ln(N(a))/\ln(a)$ при стремлении масштаба к нулю, здесь $N(a)$ - число локальных максимумов. Чем более высокое поколение канторовского ряда используется, тем точнее определяется его размерность; для 10-11 поколения вычисленное по коэффициентам вейвлет-преобразования значение размерности практически совпадает с теоретическим.

Для сравнения на рис. 20, б представлены линии локальных максимумов случайного процесса. Видно, насколько отличаются даже качественно «древовидная» структура скелетона каскадного процесса и «травовидный» скелетон случайного (можно сравнить с периодическими скелетами гармонических функций и «кустами» линий, отмечающими особенности сигналов).

2.2. Вейвлет-анализ метеорологических рядов

Приведем примеры анализа реальных данных - долговременных рядов наблюдений за изменениями метеорологических параметров.

2.2.1. Южное Колебание - Эль-Ниньо (ЮКЭН). Южное Колебание - крупномасштабный атмосферный процесс, развивающийся над акваторией Тихого океана. Южное Колебание тесно связано с явлением Эль-Ниньо - резким потеплением океанических вод вблизи тихоокеанского побережья Центральной Америки. Этот глобальный процесс планетарного масштаба в системе атмосфера - океан оказывает заметное влияние на динамику всей климатической системы планеты. Меняются циркуляция Гадлея и Уокера и расположение областей активной конвекции в приэкваториальной зоне.

Процессы в тропической зоне, как предполагается, играют важную роль в формировании динамики климата в масштабах десятилетия и более. Опишем коротко это чрезвычайно интересное и важное явление ЮКЭН - своеобразные «диалоги ветра и моря».

El-Nino (испанское для Christ Child) - так издавна называли рыбаки Эквадора и Перу теплое течение в океане, появлявшееся чаще всего к Рождеству и существовавшее в течение некоторого времени. Теплое течение могло появиться в мае или даже в июне, однако, термин Эль-Ниньо за ним и связанными с ним явлениями с годами закрепился.

В 1920-х годах известный английский ученый Gilbert Walker работал в Индии над проблемой предсказания муссонов, приносящих иногда катастрофические ливни. Изучая, в частности, показания барометров, он обнаружил зависимость между данными, полученными на станциях в западной и восточной частях Тихого океана. Термин Южное Колебание был введен им для обозначения аномалий приземного атмосферного давления вдоль тропической зоны. Чередование знаков аномалий напоминает гигантские качели, перекачивающие массы воздуха между восточным и западным полушариями. Вблизи центров действия Южного Колебания противоположного знака находятся станции Таити (17° ю.ш., 150° з.д.) и Дарвин (12° ю.ш., 150° в.д.). Именно поэтому временной ряд разностей нормализованных аномалий давления этих станций представляет собой наиболее обоснованный индекс Южного Колебания $S(t)$.

Связь между этими двумя явлениями, Эль-Ниньо и Южное Колебание, была осознана гораздо позже - после сильного Эль-Ниньо в 1957 году. Уже долгое время общепринятой является интерпретация этой связи, основанная на гипотезе Виртки [18]. Изложим ее с иллюстрациями, взятыми из [19] и представленными на рис. 21, 22.

При нормальных условиях $S \approx 0$ северо-восточные и юго-восточные пассатные ветры нагоняют теплую воду в западную часть Тихого океана (см. рис. 21, а); уровень моря здесь на 40 см превышает уровень моря в восточной части. Сгон воды сопровождается апвеллингом - подъемом глубинной холодной богатой питательными веществами воды у тихоокеанского побережья Южной Америки. При $S > 0$ описанные явления выражены сильнее.

Когда индекс S уменьшается и становится отрицательным, градиент давления между восточной и западной частями Тихого океана заметно уменьшается. Не испытывая сопротивления ветра (см. рис. 21, б), теплая вода устремляется на восток, достигает берегов Южной Америки и затем движется к северу, к югу и в виде отраженной волны на запад. Область теплой воды быстро расширяется.

Повышение температуры поверхности в восточной и центральной частях Тихого океана меняет расположение областей конвекции в атмосфере. Обычно конвекция активна над Индонезией и в западной части Тихого океана (см. рис. 21, а, 22, а). С уменьшением индекса Южного Колебания в окрестностях австралийско-индонезийского центра действия наступает период очень сухой погоды, а в центральных и восточных частях Тихого океана, где дождей обычно не бывает, начинаются проливные дожди. Население прибрежных стран Южной Америки страдает от наводнений и шквалов; из-за прекращения прибрежного апвеллинга и выноса питательных веществ мигрирует или гибнет рыба, птицы, животные.

Меняется расположение областей конвекции в атмосфере не только над Тихим океаном, но и во всей приэкваториальной зоне. Сухая погода приходит на западные побережья Африки и Южной Америки, где обычно выпадает нормальное

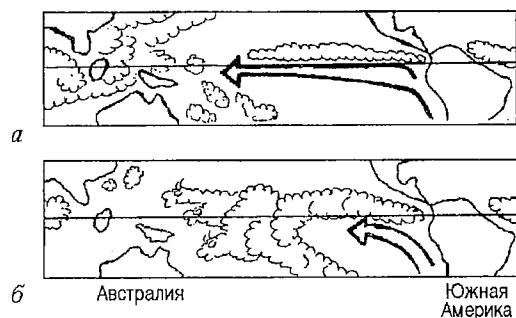


Рис. 21. Схематическое распределение дождевых зон над тропической частью Тихого океана при $S \geq 0$ (а) и $S \leq 0$ (б); доминирующий приповерхностный ветер показан стрелкой, дождевые зоны - облаками



Рис. 22. Структура атмосферной циркуляции и расположение областей повышенной конвекции в приэкваториальной зоне при $S \geq 0$ (а) и $S \leq 0$ (б); направление циркуляции показано стрелочками, зоны повышенной конвекции - облаками

количество осадков (см. рис. 22, а, б). Наблюдается смещение путей распространения тропических циклонов, так в Атлантике при Эль-Ниньо заметно уменьшается число дней с тропическими циклонами.

Необычное расположение областей повышенной конвекции при Эль-Ниньо возмущает атмосферную циркуляцию не только в приэкваториальной зоне, но и на всем земном шаре. Связанные с этим аномалии погоды обнаруживаются в зонах умеренных широт. Так, сильное Эль-Ниньо 1982-1983 годов привело к тому, что зимой 1982/83 г. с Северной Атлантики через Скандинавию двигались на восток необычайно интенсивные циклоны. Напомним, что вызванные ими штормы размыли Куршскую косу. Многие природные явления, происходящие во время действия Эль-Ниньо имеют тяжелые экологические и экономические последствия.

Неудивительно, что интереснейший процесс ЮКЭН и его последствия являются предметом неугасающего уже многие годы внимания исследователей. Последнее десятилетие было посвящено его пристальному изучению. Получены новые данные, интерпретация связи Южного Колебания с Эль-Ниньо, основанная на гипотезе Виртки претерпела некоторые изменения. Выяснилось, что периодичность и сценарии ЮКЭН заметно меняются во времени. Так, аномалия поверхностной температуры может мигрировать не только на восток, но и на запад; пятно теплой воды может не достигать берегов Эквадора и Перу, а ограничиваться центральной частью Тихого океана и т.п.

Явлениям Эль-Ниньо и Южное Колебание посвящено много публикаций, однако, многие детали изучены недостаточно, особенно на масштабах более десятилетий и менее месяцев.

Объектом анализа являются следующие временные ряды: данные, свидетельствующие о динамике Эль-Ниньо за последние 500 лет из статьи [20], среднемесячные значения индекса Южного Колебания $C(t)$ за период с 1882 по 1990 год из [21] и суточные значения индекса $C(t)$ за период с 1981 по 1990 год, полученные сотрудниками проф. Д.М. Сонечкина (Гидрометеоцентр); частично результаты анализа динамики индекса Южного Колебания опубликованы в работе [22].

2.2.2. 500 лет из жизни Эль-Ниньо. Интерес к истории ЮКЭН определяется изложенными выше причинами, а также тем, что частота процесса Южное Колебание - Эль-Ниньо иногда ассоциируется с глобальным потеплением климата [19]. Существуют многочисленные попытки реконструкции более чем тысячелетней истории ЮКЭН. Данные об аномалиях давления и поверхностной температуры охватывают чуть более столетия. При реконструкции используются косвенные свидетельства, которые могут говорить о событиях Эль-Ниньо. Например, свидетельства о засухах и наводнениях, состоянии снега и льда на горных вершинах, составе ископаемой микрофлоры, скорости роста скелета кораллов, кольцах роста деревьев и др.

Наиболее достоверными нам представляются данные из [20] о частоте событий Эль-Ниньо за последние 500 лет. Данные основаны на свидетельствах о количестве тайфунов в Южном Китае, холодных зимах в Восточной Азии, засухах в Австралии, наводнениях на Ниле и в Перу, причиной которых являются события Эль-Ниньо. За период с 1470 по 1987 год обнаружено 114 событий Эль-Ниньо со средним интервалом между ними около 4.5 лет. Близкой связи между частотой событий и глобальным потеплением автором [20] не замечено.

На рис. 23, а представлен график зависимости числа событий от времени. Для удобства показаны усредненные по десяти годам значения - за десятилетие происходило от 1 до 4 событий Эль-Ниньо. Картина коэффициентов вейвлет-преобразования неусредненных данных, состоящих из ряда нулей и единиц, показана на рис.23,б. Шкала времени здесь совпадает с осью абсцисс графика, шкала масштабов линейно растет вниз до 330 лет (чтобы показать все крупномасштабные детали). Распределение плотности энергии $E_{\psi}(a,b)$ позволяет более детально изучить характерные масштабы; на рис. 23, в оно показано для верхней трети диапазона масштабов - до 100 лет.

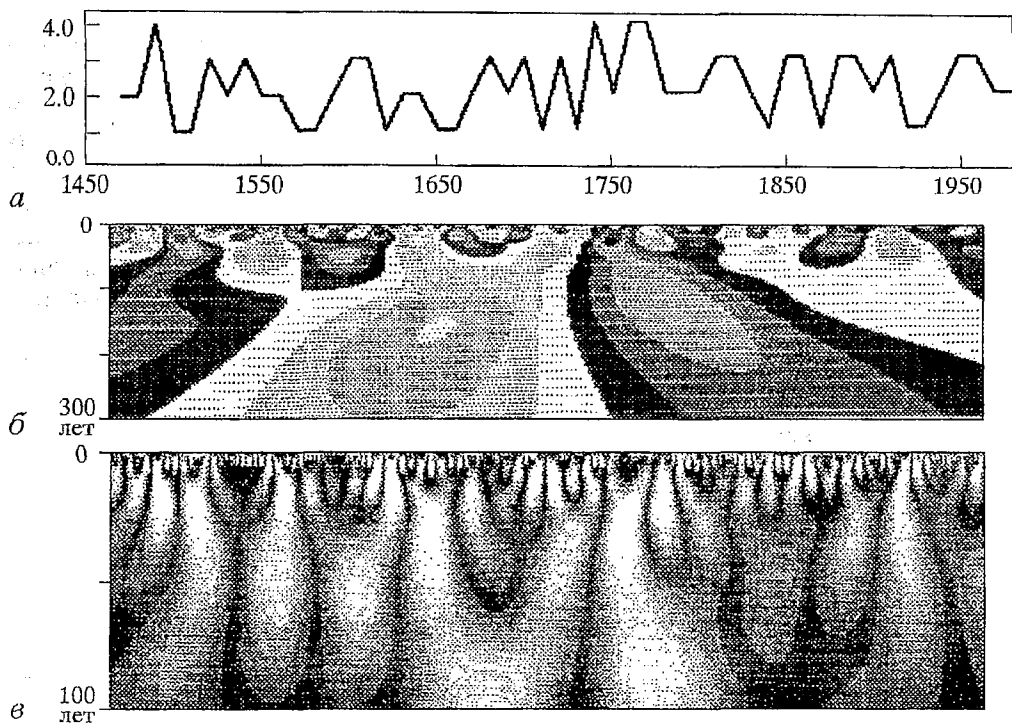


Рис. 23. Динамика количества событий Эль-Ниньо за 500 лет (а), картина коэффициентов (б) и распределения плотности энергии (в)

Показанное на рис. 24 распределение энергии по масштабам $E_w(a)$, полученное по коэффициентам вейвлет-преобразования (на графике выделяется диапазон в 9 лет), имеет три максимума - в диапазонах масштабов около 9-10, 37-40 и 150 лет.

Масштаб 9-10 лет обычно связывают с лунным циклом в 18.6 лет, который присутствует в динамике засух, наводнений и в ходе температуры в Северной Америке [24]. Масштаб 37-40 лет согласуется с 70-80 летним циклом Эль-Ниньо, обнаруженным в [20, 23, 25]; причины генерации этот цикла пока неясны. Попытки связать его с вулканической деятельностью [26] не представляются обоснованными. Третий характерный масштаб (около 150 лет - ему соответствуют три самые крупно-масштабные детали на рис. 23, б) находится на границе точности из-за недостаточной длины анализируемого ряда и может быть признан недостоверным.

Распределение плотности энергии $E_w(a,b)$ (см. рис. 23, в) позволяет более детально изучить характерные масштабы. Несмотря на явную нестационарность процесса, вблизи некоторых масштабов видна похожая на квазипериодическую структура. В начале и в конце анализируемого временного отрезка выделяются по три детали с масштабами 42-43 и 41-42 года, соответственно; в середине рисунка - несколько деталей с масштабами около 25-30 лет, которые формируют две крупномасштабные детали приблизительно в 91-93 года. Кроме того, видны несколько диапазонов локальных периодичностей с масштабами от 8 до 11 лет (и с еще меньшими).

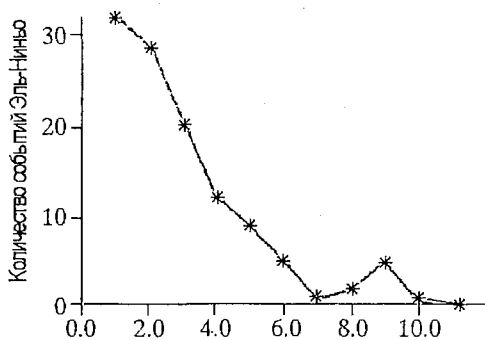


Рис. 24. Количество событий Эль-Ниньо с определенными промежутками лет между ними (ось абсцисс)

Таким образом, вейвлет-анализ, одна из сильных сторон которого состоит в возможности изучения нестационарных процессов, показал следующее. Существуют локальные периодичности с масштабами от 8 до 11 лет; необходимо дополнительное изучение вопроса, связаны ли они с лунным циклом в 18.6 лет или 22-летним циклом солнечной активности. О меньших масштабах при годичных данных говорить не имеет смысла. Крупномасштабная динамика не показывает устойчивого 70-80-летнего цикла. Существуют достаточно продолжительные эпохи повторяющейся длительности - около 25-30 лет, 40-42 года и, возможно, порядка 90 лет. О более длительных эпохах не позволяет говорить конечная длина ряда. О связи между частотой событий Эль-Ниньо и глобальным потеплением судить сложно, поскольку важна, повидимому, не только частота, но и длительность, и интенсивность событий.

При интерпретации результатов, необходимо помнить, что анализируемые данные реконструированы по косвенным свидетельствам и, кроме того, не содержат информации об интенсивности процесса (они отражают только наличие или отсутствие события Эль-Ниньо в течение года) и не содержат информации об анти-Эль-Ниньо, или Ла-Нинья, являющегося неотъемлемой частью процесса ЮКЭН. Гораздо больше и гораздо более достоверной информации содержат данные наблюдений за последнее столетие.

2.2.3. Среднемесячные значения индекса Южного Колебания. Напомним, что индекс $C(t)$ - это определенным образом нормированная разность атмосферного давления, измеряемого на уровне моря на станциях, расположенных вблизи центров действия Южного Колебания. Отрицательные значения этого индекса тесно связаны с событиями Эль-Ниньо, положительные, соответственно, с Ла-Нинья.

На рис. 25 представлено изменение среднемесячных значений индекса $C(t)$ за последние 108 лет (рис. 25, а) и картина коэффициентов вейвлет-преобразования (рис. 25, б) в таком диапазоне масштабов, чтобы охватить по возможности все крупномасштабные детали процесса, описываемые этим конечным рядом (масштаб линейно растет вниз до 97 лет). На рис. 25, в представлено распределение плотности энергии среднемесячных значений индекса $C(t)$ в более мелкомасштабной области (масштаб меняется до 10.5 лет).

Обращают на себя внимание два крупномасштабных минимума почти на границах ряда и ветвящееся «дерево» положительных экстремумов между ними. Ствол дерева и две его почти одновременно начинающиеся ветви выделяют два практически одинаковых периода - между Эль-Ниньо на границах дерева и в его середине - по 39.8 лет.

Распределение плотности энергии (рис. 25, в) показывает, что мелкомасштабная часть процесса демонстрирует наличие диапазонов локальных периодичностей и, кроме того, качественное отличие структуры процесса в отрезки времени, принадлежащие и не принадлежащие дереву. Внутренняя часть дерева содержит в основном детали с характерными масштабами около 30 и 12 месяцев, а внешние - около 18 месяцев. Возможно, этим объясняется отличие характера сценариев Эль-Ниньо до и после середины 70-х годов, которое отмечается многими авторами.

Два крупномасштабных минимума на границах дерева и один между его ветвями соответствуют интенсивным и продолжительным явлениям Эль-Ниньо 1899-1902, 1940-1941 и 1982-1983 годов. При сравнении с 500-летними данными убеждаешься, что эти сильнейшие за последнее столетие Эль-Ниньо являются вполне ординарными событиями. Несмотря на то, что 500-летние данные не содержат информации об интенсивности процесса и усреднены по 12 месяцам, детали картин хорошо согласуются. Можно считать, что 500-летняя хронология Эль-Ниньо динамику Южного Колебания на больших временах описывает.

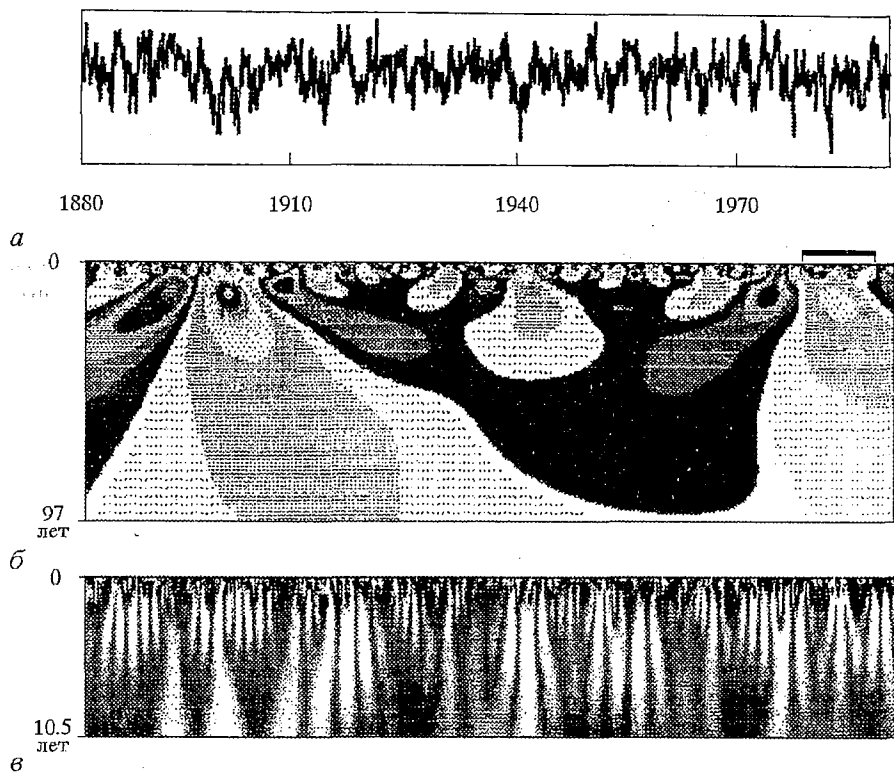


Рис. 25. Среднемесячные значения индекса Южного Колебания (а), картина коэффициентов (б) и распределения плотности энергии (в)

Более подробно ветви дерева показаны на рис. 26, а - здесь масштаб растёт до 29 лет. На рис. 26, б показаны соответствующие линии локальных максимумов. Картины коэффициентов и линий локальных максимумов демонстрируют

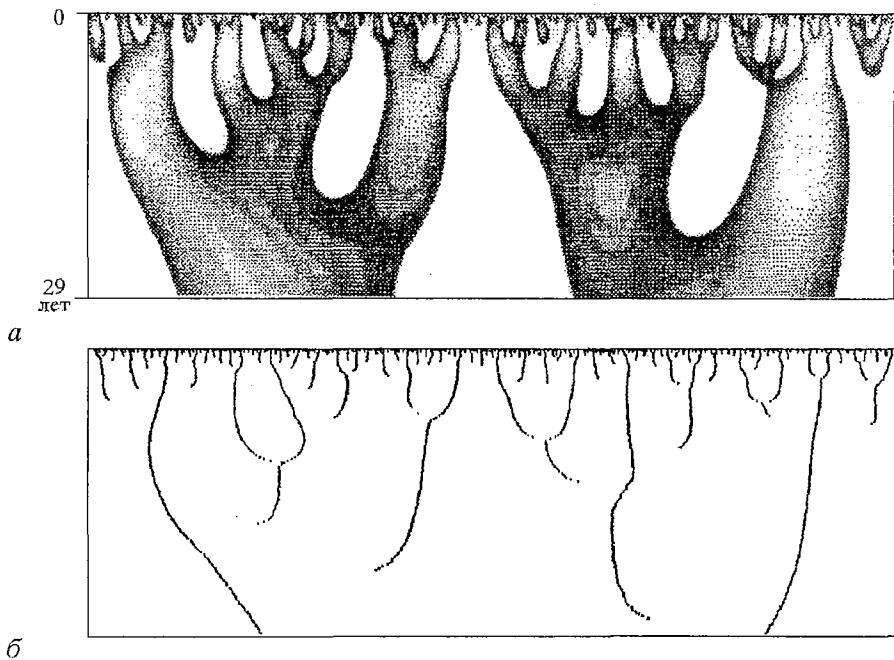


Рис. 26. Отмеченная на рис. 25, б часть картины коэффициентов (а) и соответствующая картина линий локальных максимумов (б)

непростую иерархическую структуру. Если в основании дерева мы отметили укрупнение масштаба в виде удвоения периода, то уже две главные ветви дерева ветвятся по-разному - левая на три, а правая на две ветви. На более мелких масштабах продолжается, как кажется, нерегулярное чередование удвоения и утроения линий локальных максимумов. Встречаются и ветвления типа водораздела, когда в главную линию локальных максимумов по мере роста масштаба вливаются последовательно несколько побочных.

Внешне похожие ветвления можно смоделировать канторовским множеством, когда из единичного отрезка (у нас это примерно 80 лет) удаляется средняя треть, из оставшихся частей также удаляются средние трети и т.д. (модель удвоения линий локальных максимумов); или удаляются две из пяти частей единичного отрезка и т.д. в каждом следующем поколении из каждой части (модель утроения).

В нашем случае процесс сложнее по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, встречаются чередующиеся нерегулярным образом ветвления двух (или даже более) типов - так устроены неоднородные или мультифрактальные множества. Во-вторых, в отличие от стандартной процедуры построения канторовского множества, где раз удаленная часть отрезка не восстанавливается ни в какой своей части, здесь продолжают ветвления линий локальных экстремумов обоих знаков, то есть в удаленном отрезке на следующих этапах как бы восстанавливаются некоторые его части. Будет ли результатом такого каскадного процесса канторовская пыль или иное фрактальное множество, зависит от совокупности правил ветвления, выяснить которые по ограниченному ряду данных затруднительно.

Таким образом, вейвлет-анализ ряда среднемесячных значений индекса Южного Колебания выявил автомодельную структуру данных и наличие процесса, подобного каскадному, на масштабах от месяца до нескольких десятилетий (до 70-80 лет). Является ли полученная древовидная картина линий локальных максимумов свидетельством того, что система демонстрирует каскад увеличений (удвоений, утроений и т.п.) периода, квазипериодическое или иное поведение, является ли продолжающееся на малых временных масштабах ветвление линий локальных экстремумов обоих знаков свидетельством наличия каскадного процесса на масштабах порядка месяца и менее, покажут дальнейшие исследования. Для этого необходимо, в частности, анализ рядов с более мелким разрешением.

2.2.4. Суточные значения индекса Южного Колебания. Анализируемый ряд суточных значений индекса $C(t)$ охватывает десятилетний отрезок времени (к сожалению, не принадлежащий дереву, описанному в предыдущем разделе). На рис. 27, в, г представлены ряд суточных значений индекса $C(t)$ и картина коэффициентов его вейвлет-преобразования (масштаб растет до 3 лет). Для сравнения на рисунке (рис. 27, а, б) представлены те же характеристики и для соответствующей части ряда среднемесячных значений (на рис. 25, б она помечена горизонтальной чертой).

Сравнение показывает, что среднемесячные значения очень хорошо описывают межгодовую изменчивость процесса и достаточно хорошо - годовой ход. Внутригодовая изменчивость гораздо лучше описывается подробным рядом, однако наиболее характерные детали прослеживаются на обеих картинах.

Интересно, что характер межгодовой изменчивости глобального тропического циклогенеза полностью совпадает с изменчивостью Южного Колебания - см. рис. 4, б, на котором представлены результаты анализа интенсивности циклогенеза в 1983-1992 годах.

Картина распределения плотности энергии индекса Южного Колебания (рис. 27, д, здесь масштаб меняется до 0.5 года) показывает ярко выраженный годовой ход и существенно нестационарную структуру процесса на меньших временных масштабах. Подробный анализ выявляет в этой нестационарной структуре диапазоны локальных периодичностей процесса с масштабами около

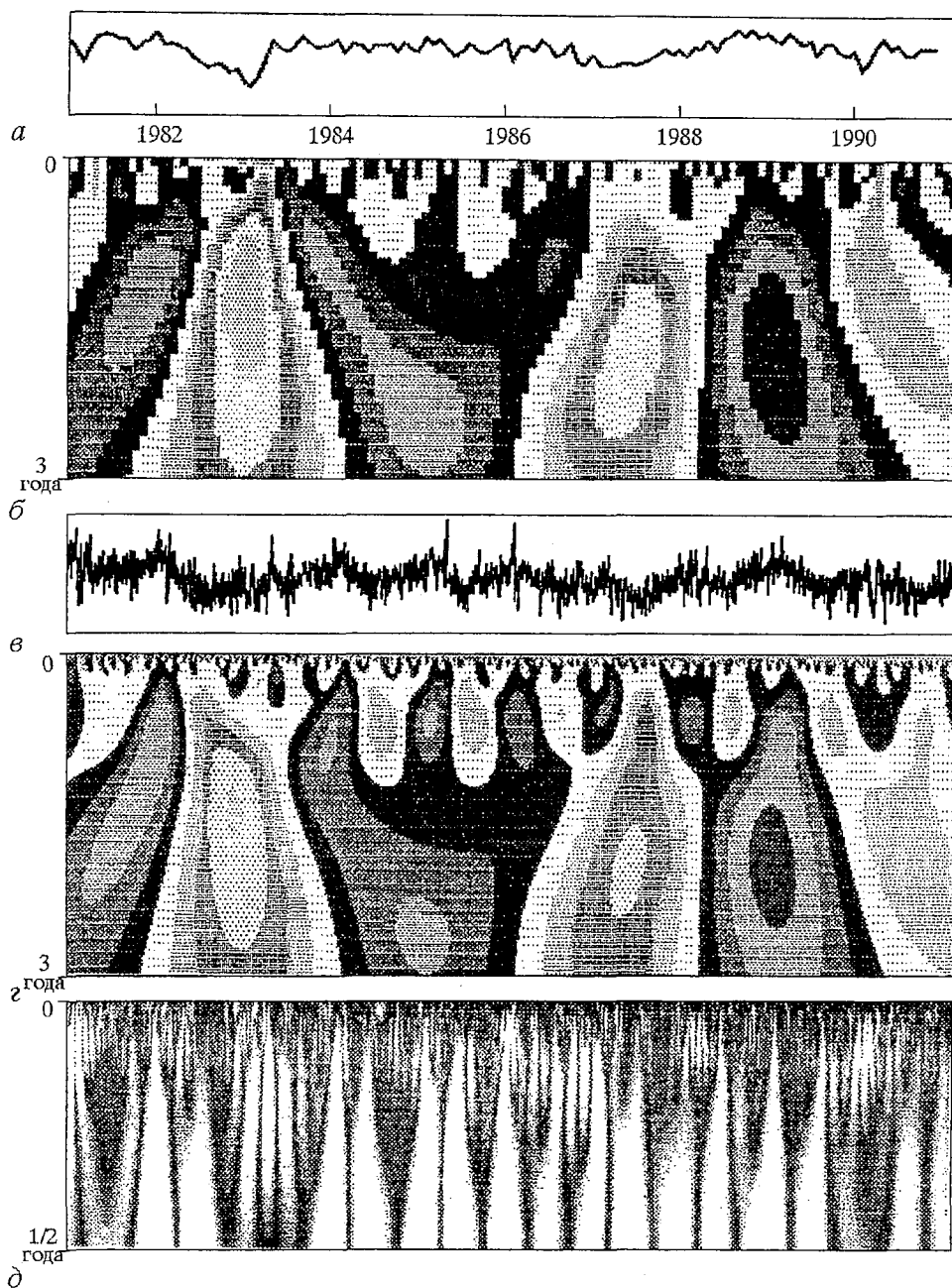


Рис. 27. Часть ряда среднемесячных значений $C(t)$ и картина коэффициентов (а,б); суточные значения индекса Южного Колебания за тот же период, картина коэффициентов и распределение плотности энергии (в-д)

недели (большинство максимумов наблюдается на масштабах примерно 5 и 9 дней), месяца (примерно 25 дней), 8-9 месяцев и около 2 лет (примерно 22 месяца).

Эти и описанные в двух предыдущих разделах масштабы можно обнаружить на спектрах мощности, представленных на рис. 28. Здесь показаны спектры мощности, рассчитанные по коэффициентам преобразования Фурье E_F (рис. 28, а) и вейвлет-преобразования E_W (рис. 28, б) рядов среднемесячных и суточных значений $C(t)$. Спектр мощности E_W (см. формулы (8) и (9)) соответствует сглаженному на каждом масштабе спектру Фурье. Оба спектра имеют довольно большие отрезки со степенным поведением.

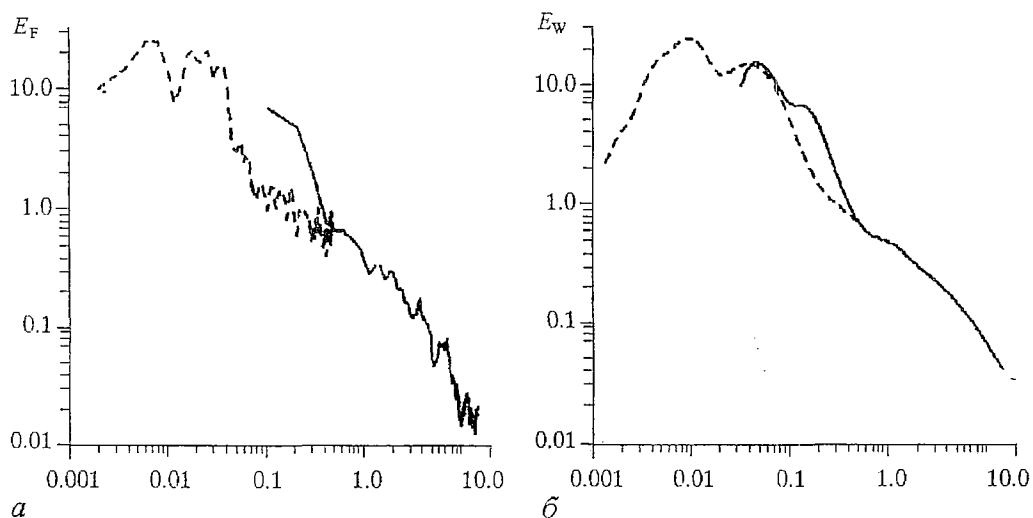


Рис. 28. Спектры мощности для среднемесячных (пунктир) и суточных (сплошные линии) данных

Таким образом, описываемый временным рядом $C(t)$ процесс, как и большинство процессов в природе, происходит в очень широком диапазоне временных масштабов. Спектры Фурье анализируемого ряда достаточно зашумлены, однако, на них выделяются пики вблизи выделенных характерных периодов (практически тех же, что и на спектрах мощности, полученных по коэффициентам вейвлет-преобразования). Картины распределения плотности энергии $E_W(a,b)$, представленные выше, демонстрируют сложное нестационарное поведение процесса, наличие периодических и непериодических составляющих на разных масштабах.

Такой процесс может быть композицией стохастической компоненты и нескольких регулярных компонент. Воспользуемся процедурой Такенса (теорией вложения нелинейных динамических систем [27]) для конструирования фазового пространства по временной реализации и построения возможного аттрактора.

Следуя Такенсу, сконструируем из $C(t)$ m -компонентные вектора состояния

$$X_i = \{x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_m(t_i)\}.$$

Здесь $x_k(t_i) = x[t_i + (k-1)\tau]$ и τ - временная задержка. Распределение векторов состояния составляет реконструированное фазовое пространство.

Двумерные проекции полученных траекторий показаны на рис. 29 для разных значений параметра временной задержки τ . Первые три портрета получены на основе ряда суточных значений, два последние - из ряда среднемесячных значений. Все траектории ограничены, однако не показывают явно периодической структуры. Характерные петельки видны на двух первых портретах, пропадают при задержке в один месяц и снова появляются при $\tau=3$ месяцам. В остальных портретах с задержкой, равной одному и трем месяцам, практически повторяют друг друга.

Последний из приведенных портретов построен на пределе или уж совсем за пределами возможностей длины имеющейся у нас реализации. Он отличается от предыдущих и интересен тем, что траектория этого аттрактора имеет три оси (можно представить себе динамическую систему с тремя стационарными решениями).

Ограниченность траекторий и не слишком большая размерность системы говорят о возможности построения модели процесса и хотя бы о принципиальной возможности предсказания его поведения по крайней мере на не слишком больших временах. Ясно, однако, что длина имеющихся реализаций не позволяет делать

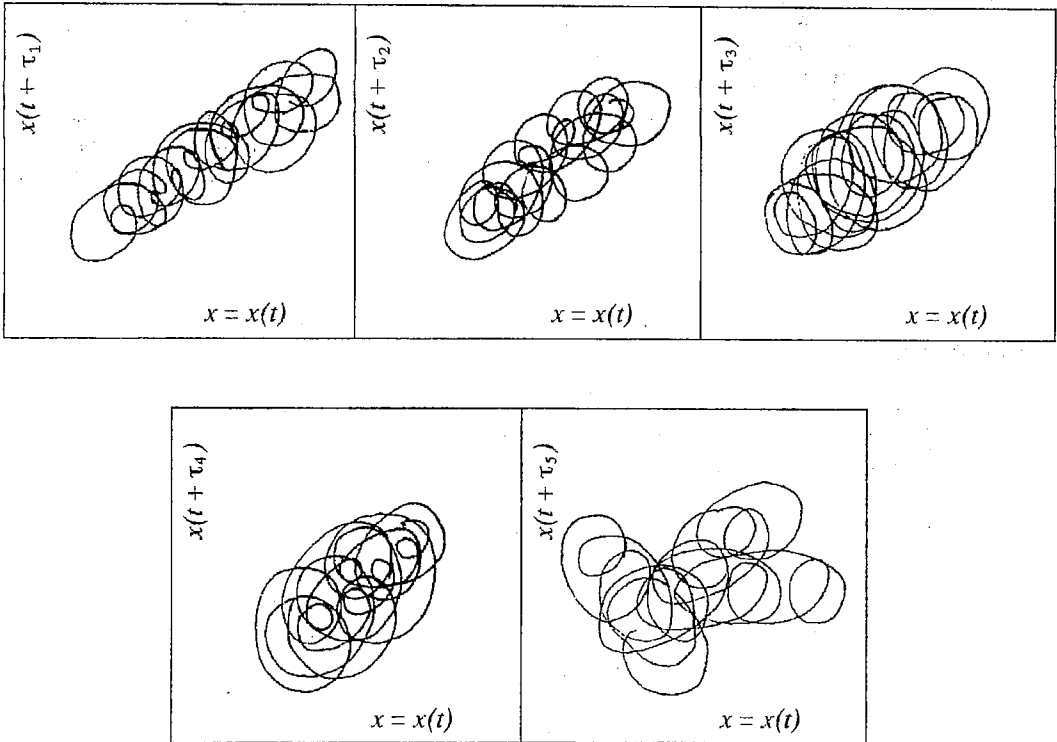


Рис. 29. Проекция фазового пространства, полученные из $C(t)$: $\tau_1=1$, $\tau_2=3$, $\tau_3=30$ дней; $\tau_4=3$, $\tau_5=12$ месяцев

категорических выводов, а форма последней проекции говорит по крайней мере о необходимости анализа более представительных данных.

Заключение

Итак, на простых модельных примерах и на примере анализа геофизических временных рядов продемонстрированы некоторые возможности вейвлет-преобразования, позволяющего наглядно показать структуру (квазипериодическую, автомодельную,...) анализируемого процесса и дающего информацию о его характерных масштабах.

По коэффициентам вейвлет-преобразования, а также по значениям локальных экстремумов можно вычислить размерность анализируемого множества или спектр размерностей, если оно мультифрактально.

Масштабно-временная развертка, получающаяся в результате вейвлет-преобразования сигнала, позволяет выявить не только осцилляции с хорошо фиксированным периодом, но и нестационарные осцилляции, локализованные периодичности и т.п.

Энергия (или дисперсия) коэффициентов вейвлет-преобразования $E_W(a)$ пропорциональна дисперсии анализируемых данных и дает распределение энергии процесса по масштабам. Возможность получения этой характеристики локально позволяет, например, при анализе турбулентных процессов не только получить набор характерных масштабов, но и объективно определить масштабы, связанные с когерентными структурами, и исследовать перемежаемость процесса.

Фильтрационные и реконструкционные свойства преобразования позволяют оперировать информацией (сглаживание, разложение на компоненты, свертка и т.п.) без потери значимых деталей. Разрывы непрерывности, скачки и другие

особенности, возникающие из-за вариаций измеряемой характеристики и сбоев или шума инструментов измерения, легко детектируются, локализируются и при необходимости могут быть устранены или скорректированы.

В заключение следует сказать, что вейвлет-преобразование представляется очень перспективным математическим аппаратом не только для задач, связанных с анализом сигналов различной природы, но и для решения уравнений, описывающих сложные нелинейные процессы с взаимодействиями в широких диапазонах масштабов.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ N 93-01-17342.

Библиографический список

1. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15, № 4. P. 723.
2. Wavelets / Ed. J.M. Combes, A. Grossmann, P. Tchamitchian. Springer-Verlag. Berlin, 1989. 386 p.
3. Wavelets and their applications / Eds. Coifman. Jones and Barlett Publ., 1991. 475 p.
4. Wavelet analysis and its applications, Vol.1. An introduction to wavelets. Charlts K. Chui. Vol.2. Wavelets: A tutorial in theory and applications. Academ. Press, Inc., San Diego, 1992. 237 p.
5. Daubechies I. Orthogonal bases of compactly supported wavelets // Comm. Pure Appl. Math. 1988. Vol. 41, № 7. P. 906.
6. Daubechies I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis // IEEE Trans. Inform. Theory. 1990. Vol. 36. P. 961.
7. Daubechies I. Ten lectures on wavelets // CBMS Lecture Notes Series. SIAM. Philadelphia, 1991. 136 p.
8. Farge M. Wavelet transforms and their applications to turbulence // Annu. Rev. Fluid Mech. 1992. Vol. 24. P. 395.
9. Фрик П.Г. // Препринт. Пермь: ИМСС УрО РАН, 1992. 40 с.
10. Paul T. Function analitic on half-plane as quantum mechanical states // J. Math. Phys. 1984. Vol. 25, № 11. P. 136.
11. Mallat S. G. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 315. P. 69.
12. Mallat S.G. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation // IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Int. 1989. Vol. 31(7). P. 674.
13. Lemarie P.G., Meyer Y. Ondelettes et bases hilbertinennes // Rev. Math. Ibero-Americana. 1986. Vol. 2. P. 1.
14. Battle G. A block spin construction of ondelettes. Part 1. Lemarie functions // Commun. Math. Phys. 1987. Vol. 110. P. 607.
15. Астафьева Н.М., Покровская И.В., Шарков Е.А. Иерархическая структура глобального тропического циклогенеза // Исследования Земли из Космоса. 1994. № 2. С. 14.
16. Астафьева Н.М., Покровская И.В., Шарков Е.А. Масштабные свойства глобального тропического циклогенеза // Доклады РАН. 1994. Т. 337, № 4. С. 85.
17. Beylkin G., Coifman R., Rokhlin V. Fast wavelet transforms and numerical algorithms // Comm. Pure Appl. Math. 1991. Vol. 44. P. 141.
18. Holschneider M. On wavelet transformation of fractal object // J. Stat. Phys. 1988. Vol. 50. P. 953.
19. Arneodo A., Grasseau G., Holschneider M. Wavelet transform of multifractals // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 61, № 20. P. 2281.
20. Collineau S., Brunet Y. Detection on turbulent coherent motins in a forest canopy. Part 1. Wavelet analysis // Boundary-Layer Meteorology. 1993. Vol. 65. P. 357.
21. Астафьева Н.М. Вейвлет-преобразование; основные свойства и примеры применения // Препринт - 1891 ИКИ РАН, Москва, 1994. 57 с.

18. *Wyrski K.* El-Nino - the dynamic response of the equatorial Pacific ocean to atmospheric forcing // *J.Phys.Oceanogr.* 1975. Vol. 5. P. 572.
19. *MacKenzie D.* How the Pacific drains the Nile//*New Scientist.* 1987, 16 April, P. 16.
20. *Wang Shaowu.* Reconstruction of El-Nino event chronology for the last 600 years period // *Acta Meteorologica Sinica.* 1992. Vol. 6, № 1. P. 47.
21. *Сидоренков И.С.* Характеристики явления Южное Колебание - Эль-Ниньо // *Труды Гидрометеоцентра СССР.* 1991. Вып. 316. С.31.
22. *Астафьева Н.М., Сонечкин Д.М.* Мультимасштабный анализ индекса Южного колебания // *ДАН.* 1995. Т. 344, № 4. С. 539.
23. *Enfield D.B., Cids L.* Statistical analysis of El-Nino/Southern Oscillation over the last 500 year//*TOGA Notes.* 1990. №1. P.1.
24. *Currie R.G.* Periodic (18.6-year) and cyclic (11-year) induced drought and flood in western North America // *J.Geoph.Res.* 1984. Vol. 89, № D5. P.7213.
25. *Quinn W.H., Neal V.T., Antunez de Maylo S.E.* El-Nino occurrences over the last four and a half centuries // *J.Geoph.Res.* 1987. Vol. 92, № C13. P.14449.
26. *Haudler R., Andsager K.* Volcanic aerosol, El-Nino and Southern Oscillation// *Inter.J.Climato.* 1990. Vol. 10. P.413.
27. *Takens F.* Detecting strange attractors in dynamical systems and turbulence // *Warwick 1980, Lecture Notes in Mathematics / Eds. D. Rand and L.-S.Young, N.-Y.:* Springer-Verlag. 1981. P. 366.

*Институт космических исследований
РАН*

Поступила в редакцию 25.12.95

WAVELET ANALYSIS: LOCAL INHOMOGENEITIES SPECTRAL ANALYSIS (fundamental properties and applications)

N.M. Astafyeva

We present the wavelet transform as a mathematical method which is well suited for studying the local scaling and spectral properties of complex natural, experimental and numerical data. Set of examples have been included to illustrate the potential of wavelets for different signals analysing: the model time series (harmonic, with singularities, fractal) and the geophysical natural time series. We have analysed the features of ENSO - global process in ocean-atmosphere system which has direct bearing on climat.



Астафьева Наталья Михайловна родилась в 1944 году в Москве, окончила механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (1967). После окончания МГУ работает в Институте космических исследований. Старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук (1972, ИКИ). Область научных интересов: гидродинамическая устойчивость, пространственно-временной хаос и структурообразование, применение нелинейной динамики в геофизике, численное моделирование.