

О БАССЕЙНАХ, ПОРОЖДАЕМЫХ ДВУМЕРНЫМИ НЕОБРАТИМЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

Кристиан Мира

Эта статья подводит итог работам, посвященным свойствам бассейнов в необратимых отображениях плоскости. Эти результаты были опубликованы либо в относительно старых работах на французском языке, либо совсем недавно. Свойства бассейнов получены с использованием метода критических кривых, естественного обобщения понятия критической точки одномерного эндоморфизма. Частные случаи бифуркаций, ведущих к фрактализации границы, проиллюстрированы простыми примерами.

Введение

Основная цель этой статьи состоит в том, чтобы представить обзор некоторых результатов, относящихся к структуре бассейнов в необратимых отображениях плоскости (двумерных эндоморфизмах) и их бифуркациям. Особое внимание уделяется таким последовательностям бифуркаций, в результате которых регулярная граница превращается во фрактальную, то есть явление *фрактализации*. Некоторые из аспектов этого явления были недавно описаны для квадратичных необратимых отображений, принадлежащих классу $(Z_0 - Z_2)$ [1,2]. Напомним, что такие отображения имеют кривую LC , которая делит плоскость на две открытые области Z_0 и Z_2 такие, что точка X , принадлежащая Z_2 , имеет два разных прообраза (предшественника, антецедента) ранга один, а точка X из Z_0 - ни одного. Кривая LC является геометрическим местом точек X , имеющих два совпадающих прообраза, $T^{-1}(X)$, расположенных на кривой LC_{-1} . Напомним также, что множество точек $T^{-n}(X)$ состоит из *прообразов ранга n* для данной точки X . Кривая LC , для которой $T^{-1}(LC) \supseteq LC_{-1}$ и $T(LC_{-1})=LC$, называется *критической кривой*. Это двумерное обобщение понятия критической точки (в смысле Жюлиа - Фато) для одномерного эндоморфизма.

Следует подчеркнуть, что $(Z_0 - Z_2)$ отображения составляют класс, обладающий простейшими свойствами. Поэтому отображения, обладающие кривой LC , разделяющей области с более чем двумя различными прообразами ранга один, могут иметь иные свойства, кроме тех, что справедливы для $(Z_0 - Z_2)$ типа. В частности, в последнее время стали популярными двумерные квадратичные необратимые отображения вида $(Z_0 - Z_2 - Z_4)$, где Z_4 - область R^2 , имеющая четыре различных прообраза ранга один, или $(Z_2 - Z_4)$, причем подразумевается, что это простейшие типы. Однако это не лучший первый шаг в таком

исследовании, поскольку тип $(Z_0 - Z_2)$ содержит на своем уровне очень сложные ситуации, которые должны быть выявлены в первую очередь. Если отображение является непрерывным и непрерывно дифференцируемым (класса C^1), то LC_{-1} включена в множество, определяемое условием $J=0$, где J обозначает якобиан отображения T . Условие $J=0$ может также описывать такие точки X , для которых $J(X)=0$, однако T локально обратимо в X ; тогда X эквивалентна точке перегиба для одномерного случая. Кривая LC_{-1} является двумерным аналогом точки локального экстремума одномерного дифференцируемого отображения. Если T недифференцируемо, то роль LC_{-1} (геометрическое место точек, являющихся двумя совпадающими прообразами ранга один) обычно играет кривая недифференцируемости [3, с. 369-371]. Образ ранга k кривой LC - критическая кривая ранга $k+1$, $LC_k = T^k(LC)$. Необратимые отображения могут принадлежать к классам, которые не связаны с существованием критической кривой. Это имеет место в ситуациях, когда кривая LC вырождается в точку.

Насколько нам известно, понятие критической кривой при изучении двумерных эндоморфизмов было впервые введено в 1964 году в связи с его ролью в определении границ бассейнов [4-6]. Начиная с 1969 года в нескольких работах была исследована роль критических кривых при бифуркациях типа «односвязный бассейн ↔ несвязный бассейн» [3,7] и «односвязный бассейн ↔ многосвязный бассейн» [8-10]. Эти основные бифуркации всегда являются результатом касания границы бассейна и сегмента критической кривой и порождаются единым фундаментальным механизмом. Очевидно, что при наличии двух аттракторов (один из них может быть на бесконечности) дыры в многосвязном бассейне одного аттрактора являются несвязными компонентами бассейна другого аттрактора. Кроме того, с 1977 года исследовалась роль критических кривых при определении *поглощающих областей, хаотических областей* (то есть поглощающих областей, точки которых обладают положительной устойчивостью по Пуассону и чувствительностью к начальным условиям) и в бифуркациях, приводящих либо к разрушению, либо к внезапной и значительной перестройке этих областей [3,11-21].

Заслуживает упоминания тот факт, что многие системы, в частности, в теории управления и электронике, приводят к моделям в виде необратимых отображений. Это имеет место в некоторых системах управления, использующих выборки из данных, или переключающие элементы, или импульсную модуляцию, а также при некоторых видах адаптивного контроля [3,7,13,22-25]. При моделировании в экономике и биологии также часто возникают необратимые отображения [26-29].

Во втором разделе статьи для иллюстрации четырех основных теорем, доказанных в [1], приводятся репрезентативные модельные отображения. Четыре из них имеют исторический интерес, поскольку, по-видимому, это первые примеры, демонстрирующие ситуации, приводящие к несвязным и многосвязным бассейнам [7,8,12,30]. Эти результаты оставались относительно малоизвестными из-за того, что были опубликованы на французском языке; здесь они приводятся вследствие своей значимости. Остальные примеры являются более свежими. Они относятся к необратимым квадратичным отображениям типа $(Z_0 - Z_2)$, которые уже рассматривались ранее [1,2], и к кубическим отображениям типа $(Z_1 < Z_3 >)$. Такое кубическое отображение характеризуется замкнутой критической кривой LC с двумя точками сборки (LC имеет форму губ, что символизируется знаком «<...>»), которая ограничивает область с тремя прообразами первого ранга, окруженную неограниченной областью с единственным прообразом. Эти примеры демонстрируют:

- различные случаи несвязных бассейнов, состоящих либо только из двух несвязанных областей (область, не содержащая аттрактор, называется «остров»), либо из бесконечного множества таких областей;
- различные случаи многосвязных бассейнов;
- различные типы фрактализации границы бассейна, часть из которых возникает

вследствие явления объединения (aggregation) островов в случае несвязных бассейнов, или объединения «озер» (то есть дырок в многосвязном бассейне), а также различные бифуркации, относящиеся к этим ситуациям.

Более подробно эти вопросы рассмотрены в [31] (случай хаотического поведения рассмотрен в [32]).

Следует отметить, что результаты, представленные в статье, получены численным способом (с необходимыми предосторожностями, предполагаемыми этим методом), но **на основе фундаментального исследования**, краткому изложению которого посвящен раздел 1 (см. также [1]). Некоторые склонные к абстракциям читатели могут оспаривать такой «modus operandi» при решении проблем подобного рода. К сожалению, принимая во внимание сложность предмета исследования и его природе, даже в простейшем случае (а это отображение типа $(Z_0 - Z_2)$), по-видимому, маловероятно, что удастся провести успешное исследование каким-либо другим способом. С другой стороны, без доступа к основным фундаментальным положениям, упомянутым выше, простые численные исследования не позволили бы получить результаты, описанные в этой статье. Только связка «фундаментальные исследования - численные методы» дает возможность прийти к решению проблемы.

Вслед за этим введением, в разделе 1, рассматриваются некоторые основные элементы, необходимые для понимания содержания представленных здесь проблем (определения, свойства и четыре основные теоремы). Раздел 2 посвящен четырем примерам, имеющим «исторический» интерес, на основании которых много позже была проведена формализация свойств бассейнов [1]. В разделах 3 и 4 рассматриваются необратимые квадратичные отображения типа $(Z_0 - Z_2)$, описанные в [1,2], и кубическое отображение типа $(Z_1 < Z_3 >)$.

1. Общая часть

1.1. Основные определения и некоторые свойства. Как уже упоминалось выше, в этой статье рассматривается семейство двумерных эндоморфизмов $(X \rightarrow T(X))$ таких, что критическая кривая LC состоит только из одной ветви, разделяющей плоскость R^2 на две области Z_0 и Z_2 , точки которых имеют соответственно 0 или 2 прообраза (или антецедента, предшественника, или обратной итерации) ранга один. Такие эндоморфизмы называются отображениями $(Z_0 - Z_2)$ типа. Представляется совершенно необходимым исследовать их перед тем, как перейти к более сложным типам, которые локально могут иметь свойства $(Z_0 - Z_2)$ плюс другие качества, проистекающие из того, что некоторые области R^2 могут иметь более двух прообразов ранга один.

Обозначим через R_1 и R_2 две открытые области такие, что $LC_{-1} = \overline{R_1} \cap \overline{R_2}$, и для каждой $X \in Z_2$ пусть $T_1^{-1}(X) \in R_1$, $T_2^{-1}(X) \in R_2$ будут прообразами ранга один точки X . Если $X \in LC$, то $T_1^{-1}(X) = T_2^{-1}(X) \in LC_{-1}$. Обозначим также $T_1^{-1}(X) = X_{-1}^1$, $T_2^{-1}(X) = X_{-1}^2$.

Замкнутое и инвариантное множество A называется *притягивающим множеством*, если существует некоторая окрестность U такая, что $T(U) \subset U$ и $T^n(U) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$, $\forall X \in U$. Притягивающее множество A может содержать один или несколько аттракторов, сосуществующих с множеством отталкивающих (repulsive) точек, которые порождают хаотические переходные процессы при «намотке» на эти аттракторы или «пушистые» (неясные) границы их бассейнов [33]. В простейшем случае A содержит лишь один аттрактор, например, неподвижную точку. Множество $D = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(U)$ является *полным бассейном* (или

просто: бассейном притяжения, или областью влияния) притягивающего множества A . Таким образом D - это множество точек, для которых траектории при итерации вперед (то есть множество образов X) сходятся к A . *Граница D*

обозначается ∂D . Она определяется геометрическим равенством $\partial D = \bar{D} \cap \overline{C(D)}$, где $C(D)$ означает множество, дополнительное к D . Область D инвариантна относительно обратных итераций T^{-1} , но необязательно инвариантна относительно T :

$$T^{-1}(\partial D) = \partial D, \quad T^{-1}(D) = D, \quad T(D) \subseteq D. \quad (1)$$

В уравнениях (1) строгое включение справедливо, только если D содержит точки Z_0 , то есть точки без прообразов. Соотношения (1) справедливы также для замыкания \bar{D} . Заметим, что $T^{-1}(\partial D) = \partial D$ предполагает, что ∂D должна содержать множество прообразов любого из своих циклов (то есть, ∂D должна содержать устойчивое многообразие - или устойчивое множество в том случае, если многообразия не существует - W^s любого из циклов T , принадлежащего ∂D), в то время как соотношение

$$T(\partial D) \subseteq \partial D \quad (2)$$

означает, что прямые итерации любой из ее точек принадлежат $\partial D \cap Z_0$.

Стоит заметить, что в случае циклов, представляющих собой неустойчивый узел или фокус, устойчивое многообразие (или устойчивое множество) W^s состоит из множества прообразов возрастающего ранга точек цикла и предельных точек этого множества. В случае обратимых отображений такого множества не существует. Для седлового цикла W^s включает сегмент, представляющий собой устойчивое многообразие W^s , связанное с таким определением обратного отображения, для которого точки цикла являются неподвижными, а также прообразы возрастающего ранга этого сегмента.

Бассейн D может быть *связным* либо *несвязным*. Связный бассейн может быть *односвязным* либо *многосвязным* (это означает, что он содержит дырки). Несвязный бассейн состоит из конечного или бесконечного числа связных компонент (которые могут быть одно- или многосвязными). Свойства и бифуркации, относящиеся к этим различным ситуациям, будут рассмотрены в следующем разделе. Если A - связный аттрактор (например, A - неподвижная точка), то *непосредственный (ближайший) бассейн* D_0 (*immediate basin*) можно определить как наибольшую связанную компоненту D , содержащую A .

Если A является максимальным притягивающим множеством отображения T , то его бассейн D является полным бассейном (*total basin*), то есть это откры-

тое множество D , содержащее A такое, что \bar{D} - геометрическое место точек плоскости, имеющих ограниченные траектории. Множество, дополнительное к нему, обозначаемое D' ($\bar{D} \cup D' = R^2$), если оно непустое, является бассейном притяжения бесконечно удаленного притягивающего множества, экватора Пуанкаре, то есть это геометрическое место точек плоскости с расходящимися траекториями. В этом случае два бассейна имеют общую границу (разделяющее множество), $\partial D = \partial D'$.

Отображение T может не обладать конечноудаленным притягивающим множеством (если на конечном расстоянии существуют только репеллеры, хаотические либо нехаотические). В этом случае геометрическое место точек плоскости, имеющих ограниченные траектории, принадлежит границе $\partial D'$ (и $R^2 = \bar{D}'$). Тогда $\partial D'$ может быть странным репеллером, порождающим хаотические переходные орбиты, уходящие к экватору Пуанкаре. Эти ограниченные траектории не имеют «физического» смысла, так как они предполагают бесконечную точность данных и отсутствие возмущений в системе, моделью которой является отображение.

Если существует полный бассейн на конечном расстоянии, то его свойства

могут быть выведены из свойств непосредственного бассейна D_0 (поскольку $D = \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(D_0)$).

Структура множеств \bar{D}, \bar{D}' часто напоминает географическую карту. По этой причине в статье будут использоваться следующие географические аналогии: D' - море; D_0 - континент; сегменты ∂D - берег; дыры внутри D_0 (когда оно многосвязно) - озера; несвязные части D , отличные от D_0 , - острова; точка сборки, принадлежащая ∂D , - мыс. Два мыса могут ограничивать сегмент ∂D , образуя *рейд* [1]. Необратимые отображения могут также иметь озера внутри островов и острова внутри озер.

Если D_0 многосвязно, то его *внешняя граница* обозначается F_{0e} . Это граница односвязного множества, обозначаемого D_0^* , которое получается при выбрасывании из D_0 всех дыр (озер). Таким образом $\partial D_0^* = F_{0e}$, а $D_0^* \setminus D_0$ состоит из всех дыр, которые являются несвязными частями D' (бассейн экватора Пуанкаре). F_{0i} обозначает *внутреннюю границу* D_0 , то есть, иными словами, объединение границ всех дыр, принадлежащих $D_0^* \setminus D_0$.

Отображения типа $(Z_0 - Z_2)$ характеризуются тем, что они могут иметь одну или две неподвижные точки, либо же не иметь их вовсе. Если T имеет простой вид $(x \rightarrow ax + by, y \rightarrow g(x, y))$, где g - квадратичная форма от (x, y) , то она может либо не обладать ни одной, либо иметь две неподвижные точки, скажем P и Q . В таком простом случае оба обратные к T отображения, T_1^{-1} и T_2^{-1} , а также неподвижные точки P и Q можно найти явно, в виде корней полинома второй степени.

Пусть X - точка плоскости (x, y) . Для любого $n \geq 1$, $T^{-n}(X)$ содержит не более 2^n различных точек (прообразов X ранга n). $T^{-n}(X)$ содержит 2^n тогда и только тогда, когда ни один из прообразов ранга i точки X , $i=1, \dots, n$, не принадлежит Z_0

или LC . Множество $\bigcup_{i=1}^n T^{-i}(X)$ называется *последовательностью прообразов точки* X . Множество $\bigcup_{i \geq 1} T^{-i}(X)$ может не быть конечным. В случае бесконечного

множества его называют *древовидной последовательностью прообразов* (*arborescent sequence of preimages*), если оно включает бесконечное количество точек, подмножество которых порождает конечные или бесконечные последовательности из 2^q прообразов ранга q , $q=1, 2, 3, \dots$. В работе [1] приведены примеры ситуаций, когда точка X или множество озер, или островов обладают либо конечной последовательностью прообразов, $\bigcup_{i \geq 1} T^{-i}(X)$, либо бесконечной, но не

древовидной, либо древовидной.

Если неподвижная точка, например P , принадлежащая внешней границе бассейна, $P \in F_{0e}$, является неустойчивым узлом и ее собственные числа (мультипликаторы) удовлетворяют соотношениям $S_1 > 1$, $S_2 < -1$ и $|S_2| > S_1$, то она называется *точкой сборки*, потому что выходящие из P инвариантные кривые образуют геометрическую конфигурацию, характерную для точки сборки. В этом случае прообразы P также являются точками сборки внешней границы F_{0e} (детали см. в [1]).

Граница $\partial D_0 = F_{0e} \cup F_{0i}$ называется *слабо фрактальной границей*, если F_{0e} содержит только конечное число точек сборки, и если внутренняя граница F_{0i} состоит из дуг, имеющих фрактальную структуру, причем F_{0e} может быть фрактальной. Будем называть ∂D_0 *сильно фрактальной границей*, если F_{0e} состоит из дуг, имеющих фрактальную структуру, содержащую древовидную последовательность прообразов точки сборки (и, таким образом, ∂D_0 имеет бесконечное количество точек сборки). F_{0i} также может быть сильно фрактальной границей. Эти две фрактальные структуры были обнаружены при изучении

отображения $l(x \rightarrow ax+y, y \rightarrow x^2+b)$ при $a < 0$ [1]. Это отображение типа $(Z_0 - Z_2)$, и оно, так же как и квадратичное отображение, рассматриваемое ниже, таково, что $D_0 \cap Z_0 \neq \emptyset$, если существует максимальное конечноудаленное притягивающее множество. Тогда мы имеем $T(\partial D) \subset \partial D$.

1.2. Фундаментальные теоремы о несвязных и многосвязных бассейнах.

Пусть T - отображение типа $(Z_0 - Z_2)$. Пусть D_0 - непосредственный бассейн конечноудаленного притягивающего множества, а D - полный бассейн. Цель этого раздела - напомнить две первые основные теоремы из [1], которые определяют условия существования несвязного и многосвязного бассейнов. Предполагается, что

A - притягивающее множество периода $k=1$. Если $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ - притягивающее множество периода $k>1$, то каждое A_i может рассматриваться по отношению к отображению T^k и его непосредственному бассейну D_0 . Таким образом, нижеследующие теоремы остаются справедливыми при замене A, T и D_0 на A_i, T^k и D_0 . Доказательства теорем 1 и 2 приведены в [1].

Теорема 1. Пусть T - отображение типа $(Z_0 - Z_2)$ и D_0 - непосредственный бассейн притягивающего множества A такой, что $D_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$, тогда:

(а) D связно $\Leftrightarrow D_0 \cap \bar{Z}_2$ связно $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) = D_0 \cap LC$;

(б) D несвязно $\Leftrightarrow D_0 \cap \bar{Z}_2$ несвязно $\Leftrightarrow T(D_0 \cap LC_{-1}) \subset D_0 \cap LC$.

Каждая одномерная максимальная связная компонента множества $(D_0 \cap LC) \setminus T(D_0 \cap LC_{-1})$ принадлежит границе двумерной максимальной связной компоненты

множества $D_0 \cap \bar{Z}_2$, которая представляет собой «полуостров», обозначаемый Δ_0^i , $i=1,2,\dots,m$, где m - конечное или бесконечное целое, и которая не содержит A .

Области Δ_0^i не содержат других неблуждающих точек, принадлежащих \bar{D} . Прообразы ранга один полуостровов Δ_0^i , $D_1^{(i)} = T^{-1}(\Delta_0^i)$, являются отдельными связными компонентами, или островами, множества D такими, что $D_1^{(i)} \cap LC_{-1} \neq \emptyset$. Полный бассейн $D = D_0 \cup \bigcup_{i \geq 0} \bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(D_1^{(i)})$, где $\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}(D_1^{(i)})$ конечная, бесконечная или древовидная последовательность прообразов D_0 .

Эта теорема представляет собой формализацию результатов, приведенных в [7] (см. также [3, с. 243-245]).

Рис. 1, а, б подтверждают содержание части (б) теоремы в простейшем случае ($m = 1$). Пусть $\overline{\alpha\beta}$ обозначает сегмент, ограниченный двумя точками α и β .

$D_0 \cap LC = \overline{ca} \cup \overline{bd}$ имеет две несвязные компоненты \overline{ca} и \overline{bd} , которые являются сегментами критической кривой LC . Каждый из них обладает двумя слившимися прообразами ранга один $\overline{c_{-1}a_{-1}}$, $\overline{b_{-1}d_{-1}}$ на LC_{-1} . Относительно T^{-1} область Z_2 должна рассматриваться как состоящая из двух листов, соединяющихся по LC . Один из них ассоциируется с T_1^{-1} , другой - с T_2^{-1} , $T^{-1}(X) = T_1^{-1}(X) \cup T_2^{-1}(X)$.

Рис. 1, а относится к случаю $D_1 \subset Z_0$. Область $D_0 \cap Z_2$ состоит из двух несвязных компонент $(bPdb)$ и $\Delta_0 = (aP_{-1}ca)$, первая из которых содержит конечноудаленное притягивающее множество. Здесь $(bPdb)$ обозначает область, ограниченную объединением сегментов \overline{dP} , \overline{Pd} , \overline{db} . В случае квадратичного отображения T или эквивалентного ему, P - неподвижная точка, принадлежащая

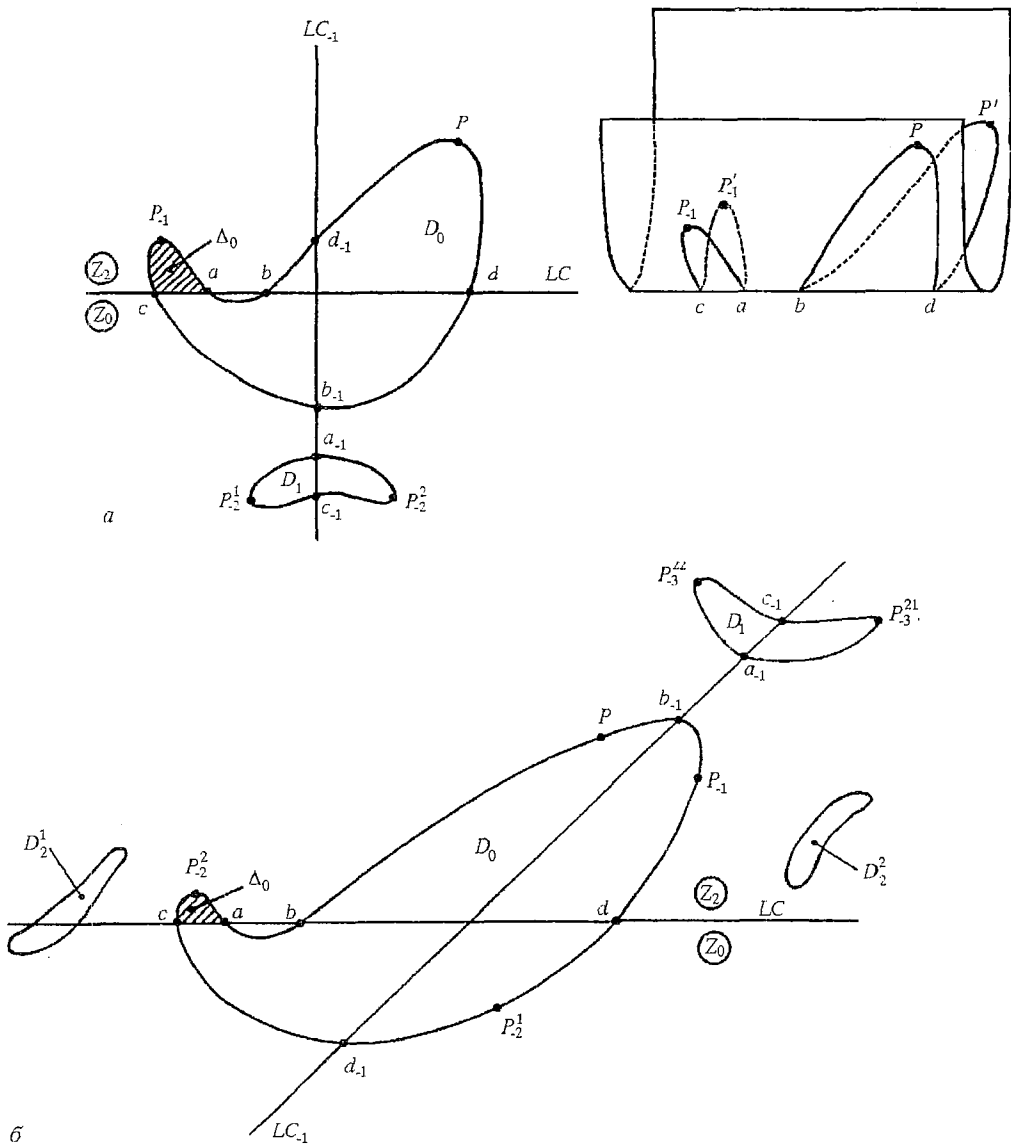


Рис. 1. Несвязный бассейн: а) - случай, когда есть только один остров D_1 ; б) - бесконечное множество островов [1]

F_{0e} (см. раздел 1.1), $T^{-1}(P) = P \cup P_{-1}$. По отношению к T^{-1} каждая из этих двух компонент должна рассматриваться как находящаяся на двух вышеупомянутых листах с одной и той же «проекцией». При раздвижении листов они образуют области $(PbP'dP)$ и $(P_{-1}cP_{-1}'aP_{-1})$. Здесь P, P' (соответственно P_{-1}, P_{-1}') относятся к одной и той же точке P (соответственно P_{-1}). В результате имеем

$$T_2^{-1}(bPdb) = (b_{-1}dPd_{-1}b_{-1}), \quad T_1^{-1}(bPdb) = (b_{-1}cP_{-1}abd_{-1}b_{-1}),$$

$$T_1^{-1}(\Delta_0) = (a_{-1}P_{-2}^1c_{-1}a_{-1}), \quad T_2^{-1}(\Delta_0) = (a_{-1}P_{-2}^2c_{-1}a_{-1}),$$

$$T^{-1}(bPdb) = D_0, \quad T^{-1}(\Delta_0) = (a_{-1}P_{-2}^1c_{-1}P_{-2}^2a_{-1}) = D_1, \quad T^{-1}(P_{-1}) = P_{-2}^1 \cup P_{-2}^2.$$

Здесь D_1 принадлежит к полному бассейну D , для которого D_0, D_1 - две

несвязанные компоненты. Это приводит к тому, что $\overline{c_{.1}a_{.1}}$, $\overline{b_{.1}d_{.1}}$ являются двумя несвязанными сегментами $LC_{.1}$, причем $\overline{c_{.1}a_{.1}} \cap Z_2 = 0$, $\overline{b_{.1}d_{.1}} \cap Z_2 \neq 0$.

Рис. 1, б иллюстрирует содержание теоремы для случая $D_1 \subset Z_2$, с одним только полуостровом ($i=1$) $\Delta_0 = (aP_{.2}^2ca)$, где P рассматривается как неподвижная точка. Здесь имеем:

$$T^{-1}(P) = P \cup P_{.1}, \quad T^{-1}(P_{.1}) = P_{.2}^1 \cup P_{.2}^2, \quad P_{.2}^2 \in Z_2,$$

$$T^{-1}(P_{.2}^2) = P_{.3}^{21} \cup P_{.3}^{22} \subset \partial D_1, \dots, \quad T^{-1}(P_{.-(i+1)}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i}) \subset \partial D_i,$$

$$\alpha_j = 1 \text{ или } 2; \quad j = 1, 2, \dots, i; \quad i = 2, 3, \dots$$

В результате получаем древовидную последовательность островов $D_{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}}$, $\beta_j = 1$ или 2 , $j = 1, 2, \dots, i-1$, $i = 1, 2, \dots$. Если один из этих островов принадлежит Z_0 , то соответствующая ветвь древовидной последовательности прообразов обрывается.

Если $D_i \cap LC \neq 0$, то $D_{i+1} = T^{-1}(D_i \cap \bar{Z}_2)$ пересекается с $LC_{.1}$ и порождает другие прообразы, то есть древовидную последовательность островов. Если существуют такие древовидные последовательности, то предельное множество Ω_i всех островов, при возрастании ранга прообразов, состоит из неустойчивых циклов (периодических точек), принадлежащих ∂D , плюс предельные точки этих циклов при стремлении порядка (периода) к бесконечности, плюс все древовидные последовательности прообразов всех этих особых точек. При наличии такого предельного множества полный бассейн D становится фрактальным.

Как указывается в разделе 1.1, непосредственный бассейн может быть одно- или многосвязным. Пусть D_0^* - односвязная область такая, что $\partial D_0^* = F_{0e} = \partial_e D_0$. Рассмотрим случай связного бассейна $D = D_0$.

Теорема 2. Пусть T - отображение типа $(Z_0 - Z_2)$ и D_0 - непосредственный бассейн притягивающего множества A такой, что $D_0 \cap LC_{.1} \neq 0$ и $D_0 \cap \bar{Z}_2$ - связное множество, тогда:

$$(a) \quad T^{-1}(D_0^*) = D_0^* \Leftrightarrow D = D_0 \text{ односвязно} \Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{.1}) = D_0^* \cap LC;$$

$$(б) \quad T^{-1}(D_0^*) \subset D_0^* \Leftrightarrow D = D_0 \text{ многосвязно} \Leftrightarrow T(D_0^* \cap LC_{.1}) \supset D_0^* \cap LC.$$

Каждая одномерная максимальная компонента множества $T(D_0^* \cap LC_{.1}) \setminus (D_0^* \cap LC)$

принадлежит границе двумерного замкнутого множества $C(D) \cap \bar{Z}_2$, которое представляет собой залив, обозначаемый $H_0^{(i)}$, $i=1, 2, \dots, m$, где m - конечное целое или бесконечность. Области $H_0^{(i)}$ не содержат неблуждающих точек, принадлежащих ∂D или $C(D)$. Прообразы ранга один залива $H_0^{(i)}$, $H_1^{(i)} = T^{-1}(H_0^{(i)})$, являются отдельными замкнутыми связными множествами, или озерами (дырами),

множества D такими, что $H_1^{(i)} \cap LC_{.1} \neq 0$, а само $D = D_0^* \bigcup_{i \geq 0} (\bigcup_{n \geq 0} UT^{-n}(H_1^{(i)}))$, где $\bigcup_{n \geq 0} UT^{-n}(H_1^{(i)})$

- конечная, бесконечная или древовидная последовательность прообразов D_0 .

Эта теорема представляет собой формализацию результатов, приведенных в [8]. Она характеризует многосвязный бассейн D , если D является связным. Комбинация условий теорем 1 и 2 может привести к ситуации, когда бассейн D одновременно является несвязным и многосвязным, а также к ситуациям озер внутри островов и островов внутри озер. Таким образом выявляется двойственность острова - озера, «континент - море» и «теор.1 - теор.2».

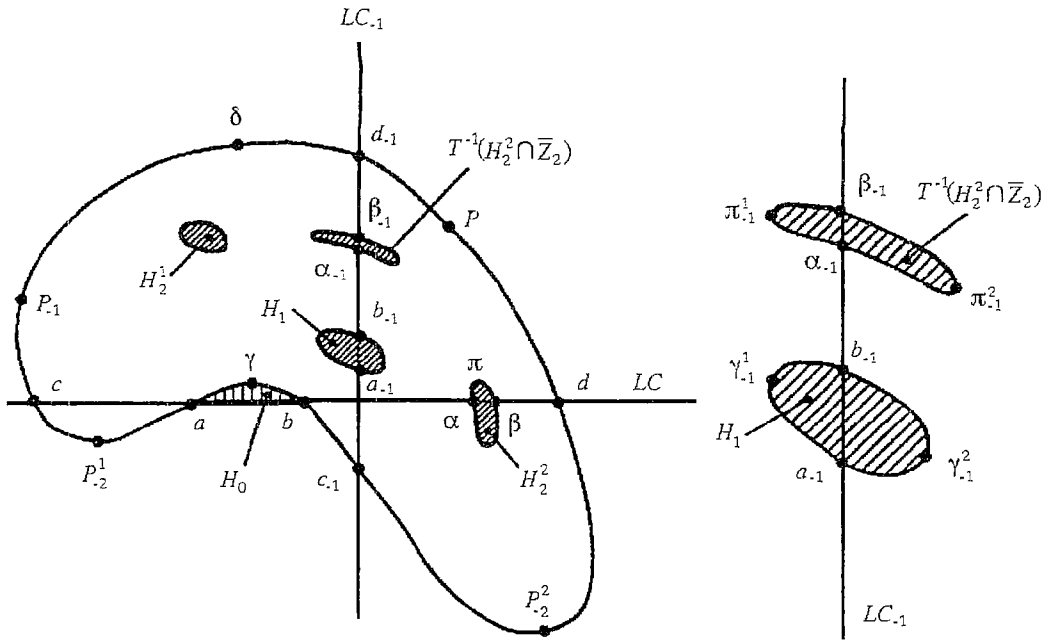


Рис. 2. Многосвязный бассейн. Область Z_2 расположена выше критической кривой LC , а Z_0 - ниже [1]

Рис. 2 иллюстрирует содержание теоремы 2. Множество $D_0^* \cap Z_2$ представляет собой связную область, ограниченную контуром $(\alpha\gamma b d \delta c a)$, точки a, b, c, d принадлежат LC , а сегменты $\overline{c\delta d}$ и $\overline{a\gamma b}$ таковы, что

$$\overline{c\delta d} \cup \overline{a\gamma b} = F_{0e} \cap Z_2, \quad D_0^* \cap Z_2 = (\alpha\gamma b d \delta c a).$$

Пусть неустойчивая неподвижная точка $P \in F_{0e}$ реализуется в ситуации, изображенной на рис.2, а $P_{-1}, P_{-2}^1, P_{-2}^2$ - ее прообразы первого и второго ранга. Прообразы первого ранга c_{-1}, d_{-1} от c, d принадлежат $F_{0e} \cap LC_{-1}$. На LC_{-1} имеем $\overline{a_{-1}b_{-1}} \subset \overline{c_{-1}d_{-1}}$, и прообраз первого ранга открытой области $(\alpha\gamma b a) \equiv H_0$, принадлежащей к области разбегания D' , является дырой (озером)

$$(a_{-1}\gamma_{-1}^1 b_{-1}\gamma_{-1}^2 a_{-1}) \equiv H_1,$$

$$T_1^{-1}(H_0) = (a_{-1}\gamma_{-1}^1 b_{-1} a_{-1}), \quad T_2^{-1}(H_0) = (a_{-1}\gamma_{-1}^2 b_{-1} a_{-1}),$$

$$T^{-1}(H_0) = T_1^{-1}(H_0) \cup T_2^{-1}(H_0) = H_1.$$

Это озеро и все последовательности (древовидные или нет) его прообразов H_n ранга $n=1,2,\dots$, приводят к многосвязности непосредственного бассейна D_0 . Первое описание этого случая было дано в [8].

Если образующиеся таким образом дыры $H_i, i>1$, пересекаются с LC , то это приводит к новой несвязной компоненте $D_0 \cap LC$. Затем две компоненты $T^{-1}[H_i \cap Z_2]$ дают новую дыру (озеро), пересекающуюся с LC_{-1} (см. рис.2 для $i=2$), прообразы которой образуют новую последовательность озер. Предположим, что существует бесконечное множество древовидных последовательностей прообразов ранга $n=1,2,\dots$ от дыр, пересекаемых LC_{-1} . Тогда предельное множество Ω_i всех дыр (озер), при возрастании ранга прообразов, состоит из неустойчивых циклов (периодических точек), принадлежащих ∂D , плюс предельные точки этих циклов

при стремлении порядка (периода) к бесконечности, плюс все древовидные последовательности прообразов всех этих особых точек. Это приводит к фрактализации внутренней границы F_{0i} области D_0 .

Замечание 1. Если бесконечное множество неустойчивых циклов существует в качестве предельного множества древовидной последовательности островов или озер, то есть в качестве точек границы бассейна, то они образуют «хаотический репеллер». Его следует отличать от бесконечного множества неустойчивых циклов, приводящих к появлению «хаотического аттрактора», который образует хаотическую область, если такая область существует.

Замечание 2 (обобщение теорем 1, 2): Теоремы 1, 2 могут быть переформулированы для необратимых отображений, имеющих тип отличный от (Z_0-Z_2) путем добавления некоторых дополнительных условий, касающихся того факта, что ситуацию (Z_0-Z_2) можно встретить локально. Это возможно, если области (D_0, H_0) на рис.1,2, приводящие к появлению островов или озер, относятся к двум листам отображения T^{-1} , соединенным только одной складкой. Пусть W - такая область. Рассмотрим отображение типа (Z_1, Z_3, Z_1) , для которого два сегмента критических кривых первого ранга LC и LC' ограничивают множество Z_3 точек, имеющих три прообраза первого ранга, а множество Z_1 , дополнительное к его

замыканию \bar{Z}_3 , соответствует точкам, у которых только один прообраз первого ранга. Тогда листы T^{-1} устроены так, как показано на рис.3 [3, с.240].

Рис. 3, а относится к случаю, когда теоремы 1 и 2 справедливы для двух верхних листов, то есть W - это связанное множество, пересекающее только один критический сегмент кривой LC . По отношению к T^{-1} W следует рассматривать как состоящую из компоненты W' , сложенной вдоль LC на двух верхних листах, и компоненты W'' , расположенной на нижнем листе. Тогда $T^{-1}(W)$ состоит из двух несвязанных компонент: W'_{-1} , пересекающей LC_{-1} - геометрическим местом точек, представляющих два слившихся прообраза ранга один точек LC , и W''_{-1} , пересекающей LC_{-1}^e , которая является третьим прообразом LC ранга один, то есть $T^{-1}(LC) = LC_{-1} \cup LC_{-1}^e$. Область W'_{-1} - компонента, ассоциируемая с поведением типа (Z_0-Z_2) . W''_{-1} порождает бесконечную древовидную или недревовидную последовательность прообразов, в зависимости от того, заходят ли прообразы области W''_{-1} в Z_3 или нет.

Рис. 3, б относится к случаю, для которого теоремы 1, 2 неприменимы локально, если W является либо областью D_0 , либо H_0 . Здесь W пересекает LC и LC' , и относительно T^{-1} она должна рассматриваться как состоящая из одной только компоненты W' , сложенной вдоль LC и LC' и лежащей на трех листах.

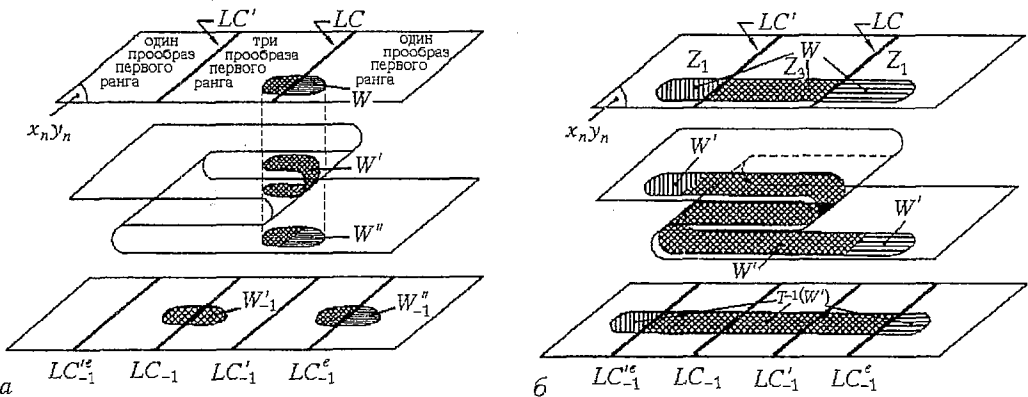


Рис.3. [1]

Тогда $T^{-1}(W)$ - односвязная область, пересекающая LC_{-1}, LC'_{-1} - местоположение двух слившихся прообразов первого ранга от LC, LC' и LC_{-1}^e, LC'^e_{-1} соответствующих третьему прообразу первого порядка от LC, LC' .

1.3. Некоторые бифуркации бассейнов. Следующая теорема была впервые приведена в [1].

Теорема 3. Рассмотрим необратимое отображение T , зависящее от векторного параметра Λ . Если число связных компонент множества $D \cap LC$ изменяется при переходе параметра Λ через бифуркационное значение Λ_b , то бассейн D может претерпеть качественное изменение одного из следующих типов:

(а) связный бассейн \leftrightarrow несвязный бассейн (когда меняется число связных компонент $D \cap LC$),

(б) односвязный бассейн \leftrightarrow многосвязный бассейн (когда меняется число связных компонент $D \cap LC$),

(в) изменение числа островов D или новая древовидная последовательность таких компонент,

(г) изменение числа дыр (озер) в D или новая древовидная последовательность дыр,

(д) переход озеро \leftrightarrow рейд,

(е) переход слабо фрактальная внешняя граница \leftrightarrow сильно фрактальная внешняя граница.

Каждая из таких бифуркаций соответствует касанию двух особых множеств различной природы: границы бассейна ∂D и критической кривой LC .

Эта теорема основывается на результатах, приведенных в [3,7-10,34]. Часть (а) этой теоремы следует из теоремы 1(а) и рис.1 при изменении параметра Λ . На рис. 4 показаны две возможные бифуркации. Первая бифуркация $\Lambda = \Lambda_{1b}$, соответствующая касанию между ∂D_0 и LC , происходит при $a \equiv c$ (рис.4,б), причем $T^{-n}(a)$ порождает древовидную последовательность из N точек (на рис.4,б эта порождаемая последовательность представлена одной только точкой $a_{-1} \equiv c_{-1}$). Эти N точек являются зародышами древовидной последовательности из N островов, $N=1,2,\dots$ (на рис.4,в $N=1$, потому что $D_1 \subset Z_0$). Эта ситуация иллюстрируется также рис.1,а,б. Вторая бифуркация $\Lambda = \Lambda_{2b}$ соответствует тангенциальному касанию между ∂D и LC такому, что $a \equiv b$, приводя к нетрансверсальному, но нетангенциальному касанию между ∂D_0 и границей ∂D_1 области D_1 (см. рис.4,г). После бифуркации (см. рис.4,д) D становится связным.

Часть (б) теоремы 3 иллюстрируется рис.5, а, б, в для различных значений Λ и является следствием теоремы 1(б) и рис. 2. Бифуркация $\Lambda = \Lambda_{3b}$ (см. рис. 5, б) происходит в момент касания между ∂D_0 и LC ($a \equiv b$). После бифуркации древовидная последовательность точек $T^{-n}(a \equiv b)$, $n=1,2,\dots$, показанная на рис. 5, б,

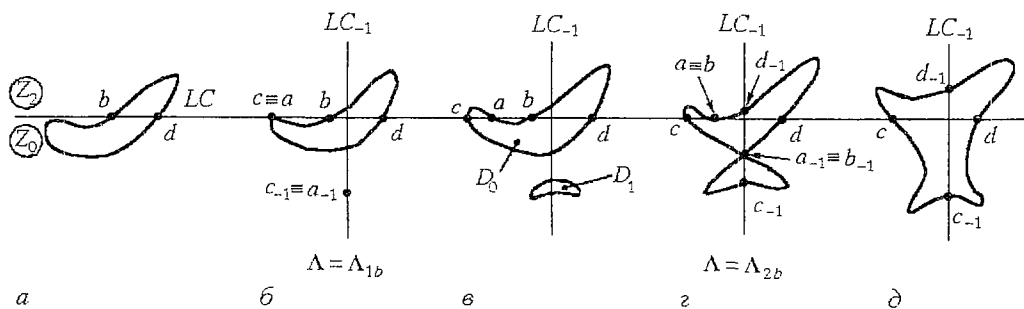


Рис. 4. [1]

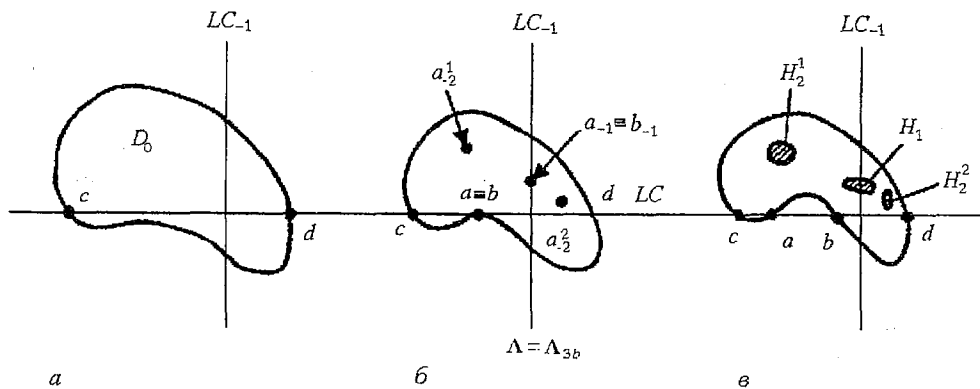


Рис. 5. [1]

становится зародышем древовидной последовательности озер $T^{-p}(H_1) = \cup H_{p+1}^{i, \dots, r, s}$, $p=1, 2, \dots$

Часть (в) иллюстрируется рис.6, где D_0 не представлено во избежание загромождения рисунка. Возможны две различные бифуркации. Первая показана на рис. 6, а и происходит из ситуации, когда есть остров $D_i \subset Z_0$, $D_i \cap LC = 0$. При

$\Lambda = \Lambda_{4b}$, $\bar{D}_i \cap LC = a$ и $T^{-n}(a)$, $n=1, 2, \dots$ ($T^{-1}(a) = a_{-1} \in LC_{-1}$) - древовидная последовательность точек, которая порождает после бифуркации древовидную последовательность островов D_{i+n} $D_{i+1} \cap LC_{-1} \neq 0$ (см. рис. 6, б).

Вторая бифуркация $\Lambda = \Lambda_{5b}$, соответствует рис. 6, в. $\bar{D}_i \cap LC = \beta$ - новая точка касания между островом D_i и LC . $T^{-1}(\beta) = \beta_{-1} \in LC_{-1}$ - предельная точка касания, $D_{i+1} \cap LC_{-1} = \beta_{-1}$, по которой в результате бифуркации происходит разрыв перемычки и остров D_{i+1} делится на два острова $D_{i+1}^1 \subset R_1, D_{i+1}^2 \subset R_2$ (см. рис.6, г), $D_{i+1} = D_{i+1}^1 \cup D_{i+1}^2, D_{i+1} \cap LC_{-1} = 0$.

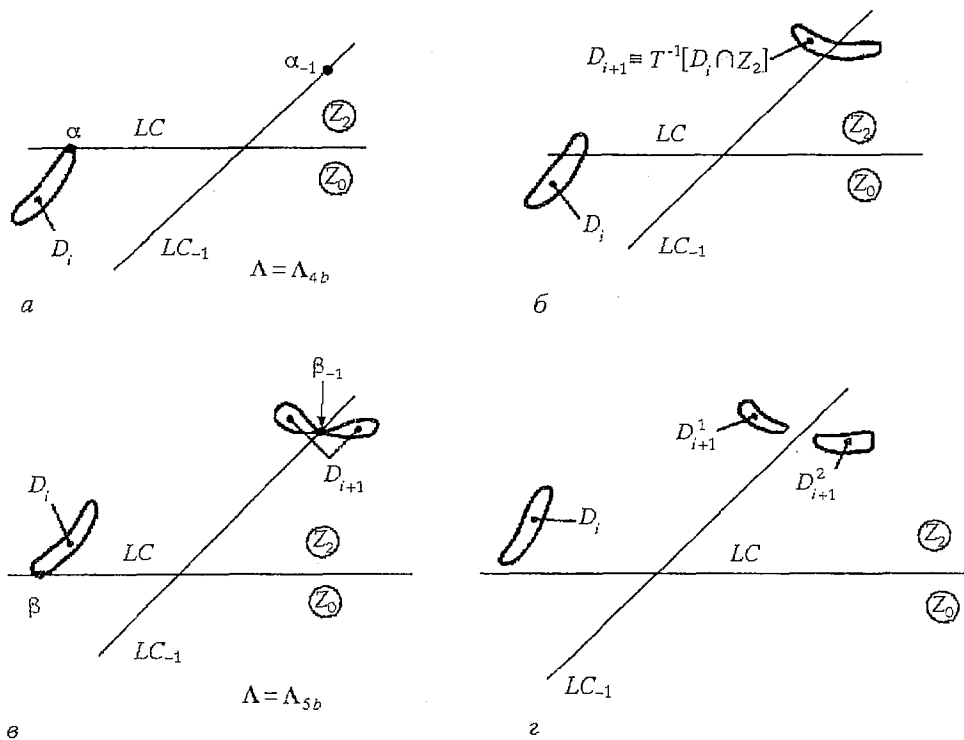


Рис. 6. [1]

Часть (г) теоремы 3 иллюстрируется рис.7, где ω - локальный минимум F_{0e} . На рис. 7, а озеро H_i - одна из составляющих древовидной последовательности, возникающей из H_1 (как показано на рис.2), $H_i \subset T^{-(i-1)}(H_1)$, $i > 2$. Континент D_0 не показан полностью на рис.7. Возможны две различные бифуркации для $\Lambda = \Lambda_{6b}$ и $\Lambda = \Lambda_{7b}$. Они проиллюстрированы на рис.7, а-д. Ситуация на рис.7 является дуальной по отношению к той, что изображена на рис.6 при замене «моря» на

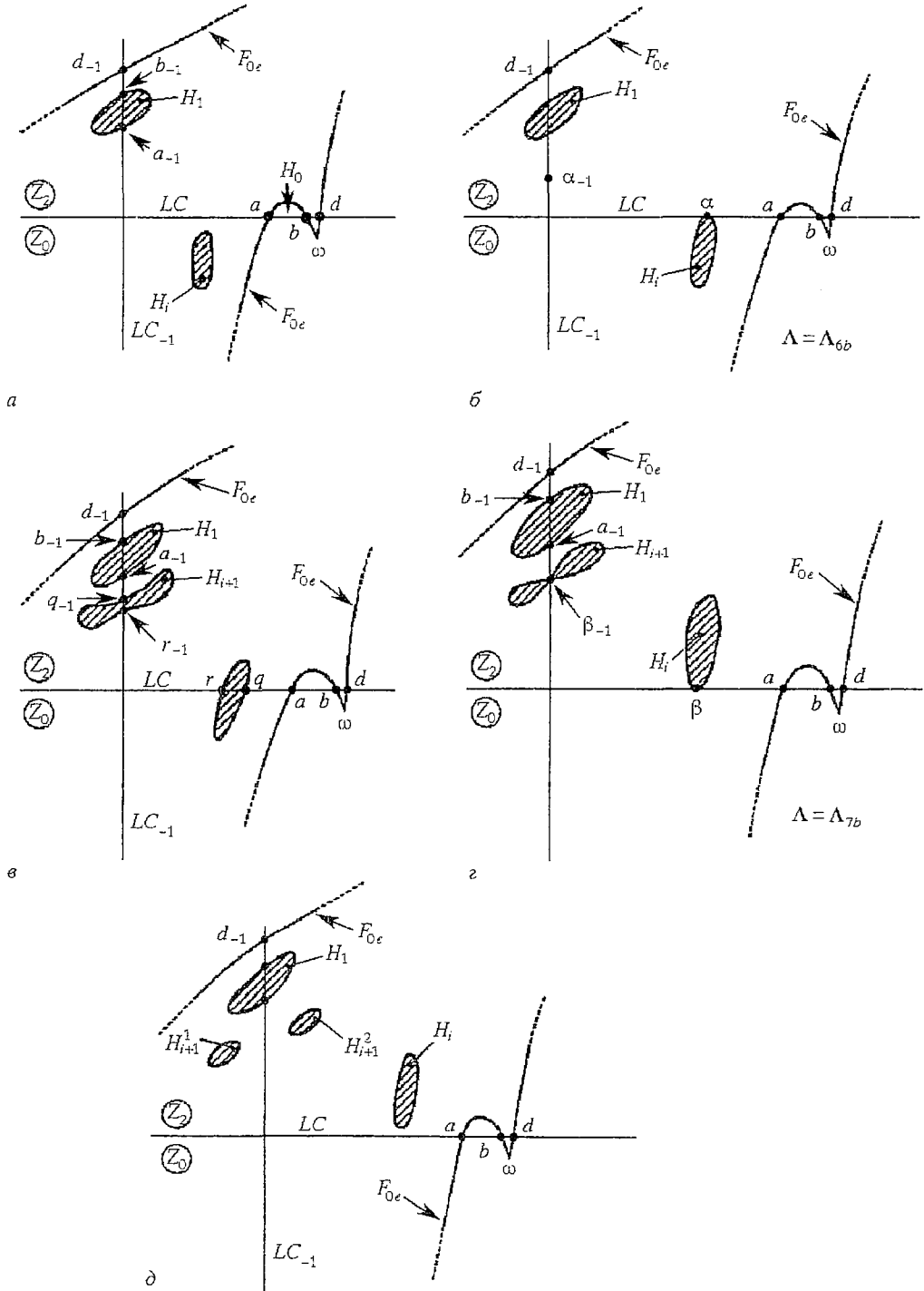


Рис. 7. [1]

«континент», «островов» на «озера». Видно также, что при изменении Λ новые острова и новые озера могут порождаться в том числе и *новыми осцилляциями* (изменениями кривизны) границы F_{0e} , пересекающей LC .

Рис.8 относится к части (д), причем граница бассейна может быть либо гладкой в точке ω , либо негладкой. Ситуация до бифуркации та же, что на рис.7, д. В момент бифуркации (рис. 8, а) $b=d\equiv\omega$, и $\omega_{-1}\in LC_{-1}$ - точка касания между F_{0e} и границей ∂H_1 озера H_1 , $\omega_{-1}=F_{0e}\cap\partial H_1$. Тогда, учитывая (1) и (2), имеем $e_i=F_{0e}\cap\partial H_i$, $e_i\in T^{-(i-1)}(\omega_{-1})$, $e_i\in Z_2$, что приводит к появлению двух точек касания e_{-1}^1, e_{-1}^2 между ∂H_1 и ∂H_{i+1} , $e_{-1}^1\cup e_{-1}^2=\partial H_1\cap\partial H_2$. После бифуркации (рис. 8, б) эти озера открываются в море. $T^{-1}(\omega)=\omega_{-1}^1\cup\omega_{-1}^2$, $\omega_{-1}^1\cup\omega_{-1}^2\subset T^{-(i-1)}(\omega_{-1}^1\cup\omega_{-1}^2)$, $T^{-1}(\omega_{-1}^2)=\omega_{-(i+1)}^{221}\cup\omega_{-(i+1)}^{222}$. В соответствии с теоремой 1(а), $T^{-1}(p\omega_{-1}^{12}qp)=(p_{-1}\omega_{-(i+1)}^{121}q_{-1}\omega_{-(i+1)}^{122}p_{-1})$ - остров. Озера H_1, H_i, H_{i+1} превращаются в рейды B_1, B_i, B_{i+1} . В общем случае такая бифуркация происходит, когда F имеет фрактальную структуру, поэтому рис.8 можно рассматривать как локальное изображение ситуации, которая повторяется по всей границе вследствие самоподобия. Тогда если ω - точка сборки (прообраз некоторого ранга неподвижной точки P , принадлежащей F_{0e} , когда P - точка сборки), то до бифуркации только конечное число сборок (мысов) существует на F_{0e} , которая является *слабо фрактальной границей* (см. рис. 7, д). После бифуркации $\omega\in Z_2$ порождает бесконечную древовидную последовательность мысов. Вследствие вышеуказанного самоподобия это приводит к *сильно фрактальной границе*, часть(е) теоремы 3.

Замечание. Принимая во внимание замечание из раздела 1.2, условия теоремы 3 не ограничиваются только эндоморфизмами типа (Z_0-Z_2) , если только

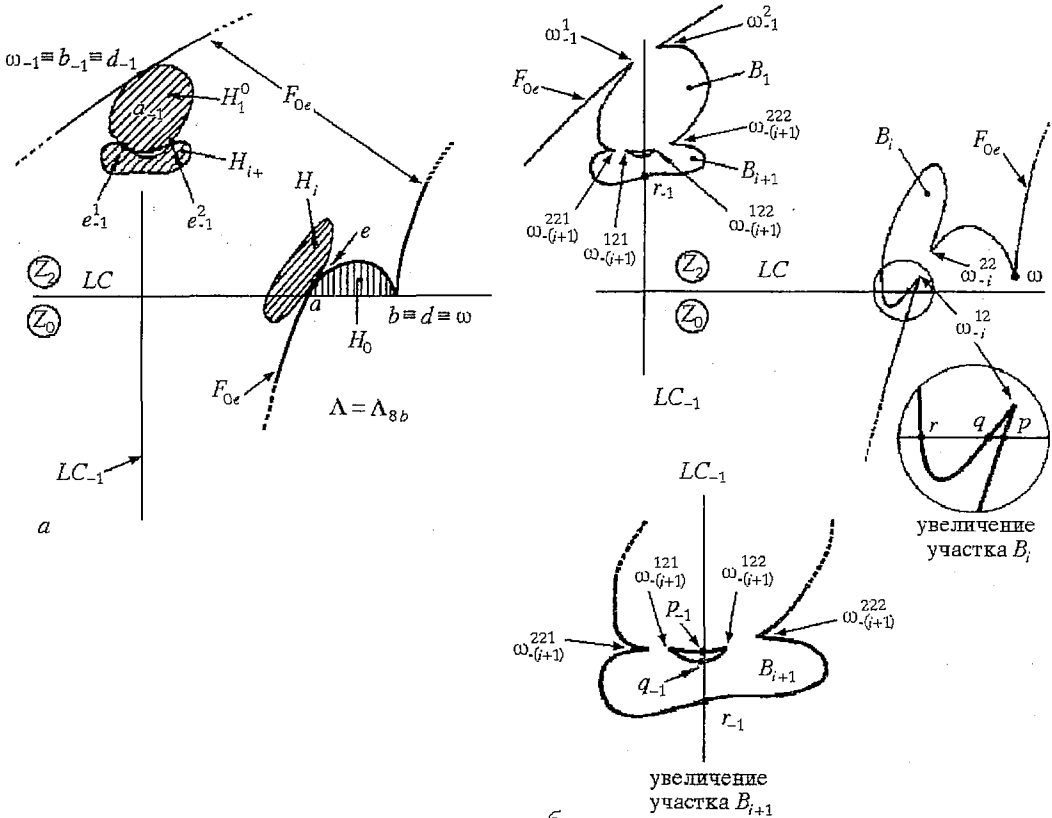


Рис. 8. [1]

связная компонента $D \cap LC$, рассмотренная в теореме 3, не соответствует ситуации на рис. 3, б. В этом последнем случае, если число связных компонент $D \cap LC$ меняется локально при переходе от ситуации, когда ∂D пересекает две ветви точки сборки, к ситуации, когда такое локальное пересечение исчезает, качественные изменения, описанные в теореме 3, не имеют места (см. [3, с.255-259] и кубическое отображение в [8]). В этом случае сборка соответствует двум листам, представленным на рис.3, которые соединяются в точке сборки, причем между ветвями сборки локально присутствуют три листа, а вне этой области - один лист.

Теорема 4. Хаотическая область (d) претерпевает бифуркацию при значении параметра $\Lambda = \Lambda^*$, которое соответствует касанию между ее границей ∂d и границей ее непосредственного бассейна ∂D_0 . Прохождение через $\Lambda = \Lambda^*$ приводит либо к разрушению (d) и возникновению странного репеллера, либо к качественному изменению свойств (d), либо к непритягивающему (repulsive) множеству Ω , Ω_1 (см. раздел 1.2).

Эта теорема была сформулирована в [12]. Когда (d) существует, её граница ∂d в общем случае состоит из конечного числа сегментов критической кривой. При $\Lambda = \Lambda^*$ граница ∂d состоит из сегментов критических кривых LC_i , где $i=0,1,\dots,m$, $LC_0 \equiv LC$, причем m является конечным целым лишь в исключительных случаях (см. [3, с.368-371]), в общем случае $m=\infty$ (см., например, [35]). В случае «смешанной хаотической области» [17], граница состоит из сегментов LC_i , перемежающихся с сегментами неустойчивого инвариантного многообразия $W^u(S)$ некоторого седлового цикла. ∂D_0 может либо быть фрактальной (см. разделы 5.2 и 5.3 в [1]), либо нет. Разрушение области (d) после прохождения значения Λ^* было показано в [12, 3]. Оно приводит к непритягивающему множеству Ω , состоящему из неустойчивых циклов вместе с их предельными точками и древовидных последовательностей прообразов этого множества точек, которые принадлежали (d) до бифуркации. Такое множество приводит к появлению хаотических переходных траекторий, уходящих либо на бесконечность, либо к другому конечноточечному аттрактору (одномерный эквивалент см. в [33, с.74-77]).

Качественные изменения (d) могут быть различных типов. Два из них относятся к трансформациям кольцевидной хаотической области (двусвязная область) либо в односвязную область (d) (Λ^* соответствует касанию с изолированным неустойчивым фокусом, принадлежащим ∂D_0), либо в несвязную периодическую (d) с периодом k (∂D_0 определяется через T^k). Эти две бифуркации описаны в [9]; другие два типа перестроек различной природы описаны в [35].

Бифуркации теоремы 4 относятся к *гомоклиническим* и *гетероклиническим бифуркациям*, и критические кривые оказываются полезными при интерпретации проблем такого рода (см. [3, с.395-397]). По отношению к обратимым отображениям эти проблемы представляют новые трудности, поскольку неустойчивое многообразие седла может привести к бесконечному числу самопересечений и пересечений с неустойчивым многообразием другого седла (см. [34, с.217-223]). Таким образом, *бифуркации, приводящие к касанию между устойчивым седловым многообразием и критическим сегментом* (это случай, когда в теореме 4 устойчивое седловое многообразие может принадлежать границе бассейна) могут иметь *гомоклинический* или *гетероклинический* тип. В самом деле, в общем случае критические кривые содержат бесконечное количество складок, пересекающихся с неустойчивыми многообразиями различных циклов, и которые не позволяют этим многообразиям пересекаться на рассматриваемых сегментах критических кривых.

2. Четыре старые модели, иллюстрирующие некоторые свойства бассейнов

Теоремы из раздела 1, относящиеся к несвязным или многосвязным бассейнам, являются формальными обобщениями относительно старых результатов, касающихся четырех примеров, демонстрирующих фундаментальные свойства.

Первый пример относится к бифуркации «односвязный бассейн ↔ несвязный бассейн» [7] (см. также [3, с. 243-244]) в квадратичном отображении T типа $(Z_0 - Z_2)$:

$$x' = y, \quad y' = -ax - y - x^2, \quad (3)$$

где a - параметр, $0.04 < a < 0.31$. Область Z_0 (прообразы отсутствуют) определяется соотношением $y > -x + a^2/4$. T имеет две неподвижные точки: $O(x=y=0)$ - устойчивый узел и A - неустойчивый узел, являющийся мысом (точкой сборки) границы непосредственного бассейна ∂D_0 аттрактора O , то есть его мультипликаторы $S_1 > 1$, $S_2 < -1$ и $|S_2| > S_1$. ∂D_0 также содержит седловой цикл (B_1, B'_1) периода два, $S_1 > 1$, $-1 < S_2 < 0$. При $a=0.05$ бассейн аттрактора O несвязный и состоит из непосредственного бассейна D_0 и одного острова $D_1 = T^{-1}(\Delta_0)$, причем область $\Delta_0 = (T, A_{-1}, S, T)$. Эта ситуация представлена на рис. 9, а, где буква с отрицательным нижним индексом означает прообраз ранга n точки, обозначенной этой буквой. Это иллюстрация части (б) теоремы 1, когда $D_1 \subset Z_0$. Рис. 9, б относится к части (а) теоремы 1 для односвязного бассейна O . Бифуркация, показанная на рис. 4, 2, которая разделяет эти две ситуации, соответствует тангенциальному касанию критической кривой (обозначенной на рисунках LC) и границы ∂D_0 , то есть когда $T \equiv Q$.

Второй пример [30] (см. также [3, с.244-247]) представляет собой отображение (3) с введенным возмущением в виде кубического члена:

$$x' = y, \quad y' = -ax - y - x^2 - 0.1x^3, \quad a=0.1. \quad (4)$$

При этом получается отображение типа $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$, то есть критическая кривая ранга один состоит из двух сегментов, ограничивающих область Z_3 , в которой каждая точка имеет три прообраза первого ранга. В двух дополнительных областях (Z_1) точки обладают только одним прообразом ранга один. Здесь две неподвижные точки O и A $(-3, -3)$ имеют те же характеристики, что и для (3), однако появляется новая устойчивая точка A_1 $(-7, -7)$ - устойчивый фокус, полный бассейн которой

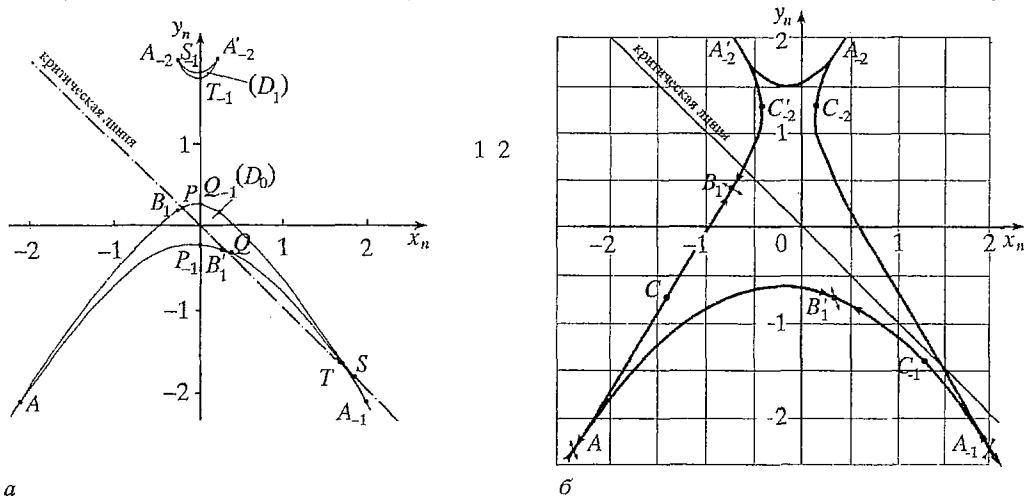


Рис. 9. Отображение (3). а) - $a=0.05$; б) - $a=0.3$. Первый опубликованный (1969) пример бифуркации «связный бассейн - несвязный бассейн» [7]

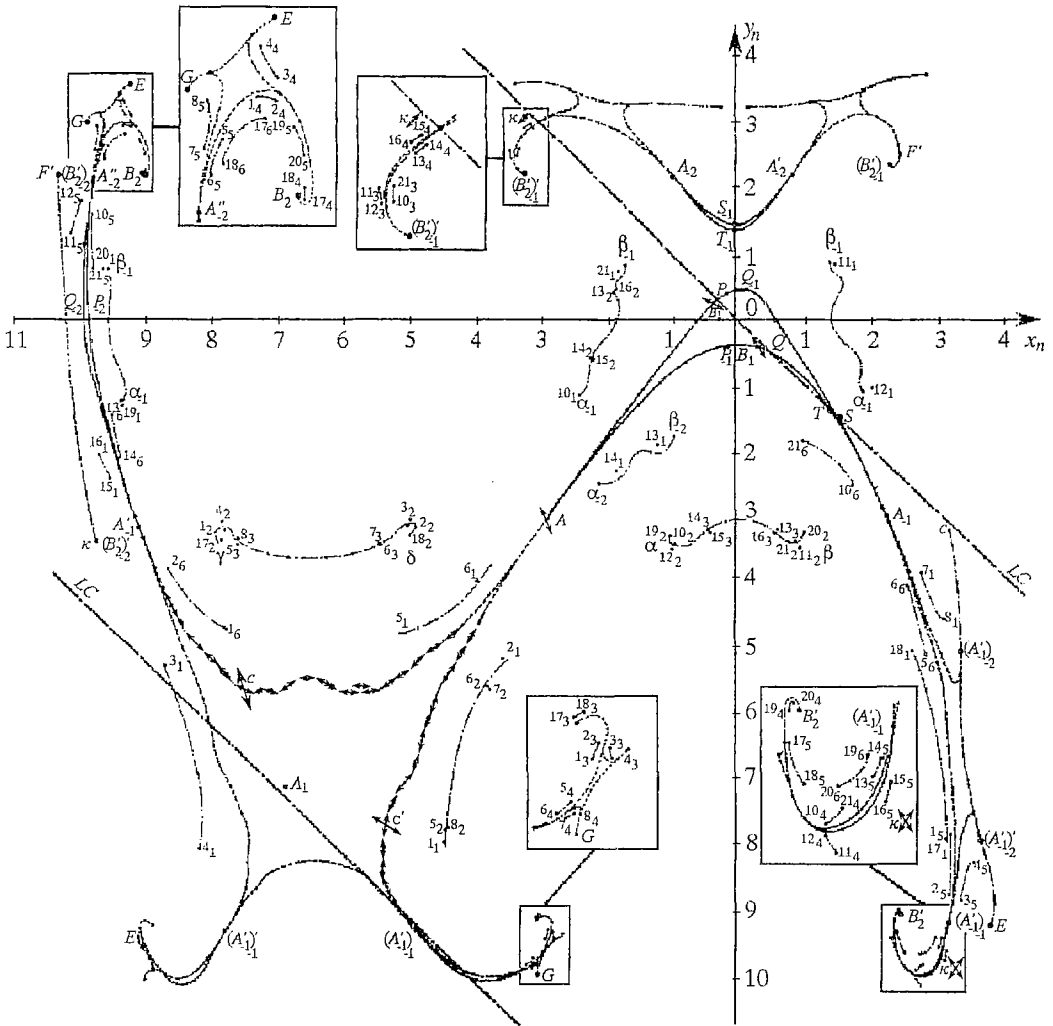


Рис. 10. Отображение (4), $a=0.1$. Первый пример (1969) фрактального бассейна. Бассейны двух притягивающих неподвижных точек O и A_1 - несвязные. Предельное множество островов принадлежит к Ω , типу [30]

также является несвязным (рис.10). Этот пример иллюстрирует замечание 2 раздела 1.2 по отношению к части (б) теоремы 1. Здесь возникают древовидные последовательности из бесконечного количества островов, относящихся к бассейнам O и A_1 , предельными точками которых (множество Ω_i , определенное в разделе 1.2) являются точки бесконечного множества отталкивающих циклов возрастающего периода, их прообразы возрастающего ранга и их точки накопления. Отображение (4), по-видимому, было первым примером фрактального бассейна. В то время слова «фрактал» еще не существовало, но описание, данное в [30], и увеличенная часть рис.11 ясно указывают на самоподобные свойства структуры бассейна.

Третий пример относится к бифуркации «односвязный бассейн \leftrightarrow многосвязный бассейн» [8] в кубическом отображении T типа $(Z_1 < Z_3)$:

$$x' = \rho(x \cos \varphi - y \sin \varphi) + xy, \quad y' = \rho(x \cos \varphi + y \sin \varphi) + x^2 + y^3, \quad \varphi = 2\pi/3. \quad (5)$$

Критическая кривая LC для этого отображения содержит точку сборки (символ «<<» в $(Z_1 < Z_3)$) и ограничивает область с тремя прообразами ранга один от областей с одним только прообразом ранга один. Это иллюстрация к части (б) теоремы 2 и частям (б) и (г) теоремы 3.

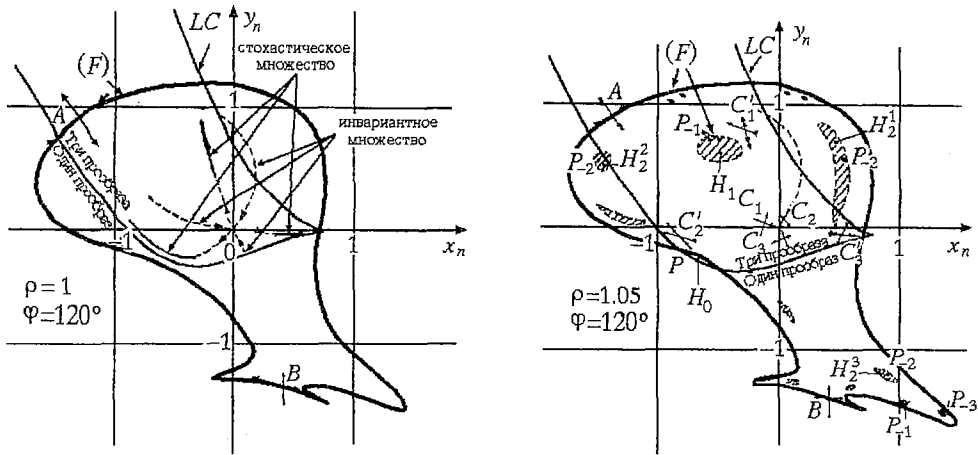


Рис. 11. Отображение (5). Первый пример (1976) бифуркации «односвязный бассейн - многосвязный бассейн», которая объясняется расположением критической кривой относительно границы бассейна [8]. P - точка, принадлежащая заливу H_0 , а все её прообразы принадлежат озерам (заштрихованные области)

Рис.11, на котором $(F) \equiv \partial D$, демонстрирует границу многосвязного бассейна хаотического аттрактора, располагающегося в Z_3 .

Четвертый пример иллюстрирует бифуркацию теоремы 4. Он был опубликован в [12] и [3, с.369-371] как, по-видимому, наипростейший пример, демонстрирующий эту фундаментальную гомоклиническую бифуркацию. Здесь T - непрерывное линейное отображение:

$$x' = y, \quad y' = y - \lambda x \quad \text{при } x \leq 6, \quad y' = y + 2x - 6(2 + \lambda) \quad \text{при } x \geq 6. \quad (6)$$

На рис.12 представлена ситуация в момент бифуркации, $\lambda = \lambda^* = 1.2$.

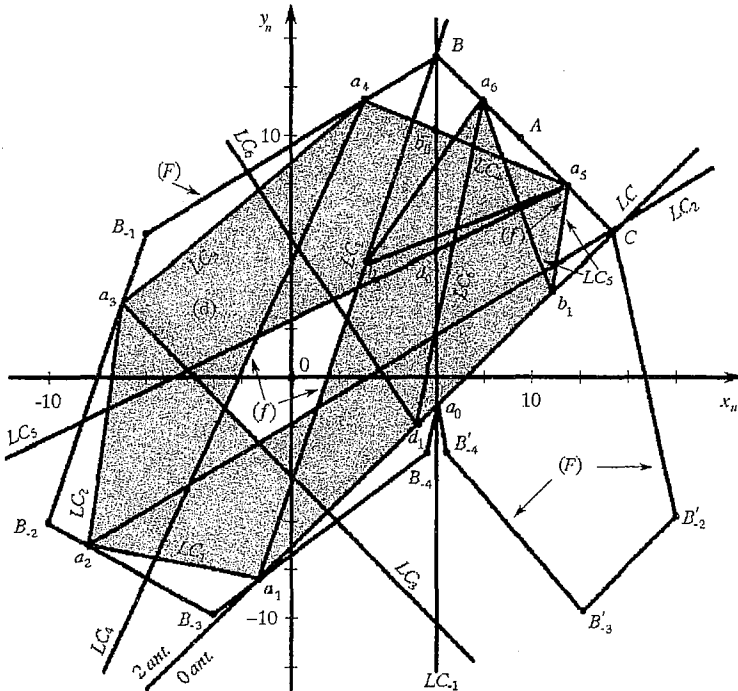


Рис. 12. Отображение (6), $\lambda = 1.2$. Бифуркационная ситуация, соответствующая теореме 1. $(F) \equiv \partial D$ - граница бассейна, $f \equiv \partial d$ - граница хаотической области (d) (серый цвет), $LC_k = T^k(LC)$, B_{-i} - прообразы точки B ранга i . Область «2 ant.» (два прообраза) соответствует Z_2 , область «0 ant.» (прообразы отсутствуют) - Z_0 . Этот рисунок, взятый из [12] (1978), похоже, является первым примером такой бифуркации

Хаотическая область (d) - кольцеобразная (двусвязная) и ограничена сегментами критических кривых LC_k , $k=0,1,\dots,6$; $LC_0=LC$. Граница бассейна (обозначенная (F) на рисунке) состоит из отрезков прямых линий, точками которых являются: (B,C) - неустойчивые циклы периода два ($S_1=1$, $S_2=4$), A - неподвижная точка ($S_1=-1$, $S_2=2$) и прообразы ранга n точек (B,C), $n=1,2,3,4$.

При $\lambda=\lambda^*$ имеем $(F)\cap\partial d=U_{i=0}^{i=6}a_i$, где ∂d - граница области (d).

При $1.1<\lambda\leq\lambda^*$, (d) - хаотический аттрактор. При $\lambda>\lambda^*$, (d) превращается в странный репеллер (repulsor), приводя к появлению в этой области переходных траекторий, уходящих на бесконечность.

3. Фундаментальные бифуркации на примере квадратичных ($Z_0 - Z_2$) отображений

В этом разделе представлены основные результаты подробного исследования, проведенного в [1] для квадратичного отображения T:

$$x' = ax + y, \quad y' = x^2 + b. \quad (7)$$

Здесь также рассматривается другое квадратичное отображение, исследованное в [2],

$$x' = y + ex, \quad y' = 0.5x + gy + 0.1x^2 + hxy \quad (8)$$

с единственной целью проиллюстрировать содержание теорем из первого раздела. Эти два отображения имеют тип ($Z_0 - Z_2$). Детали и доказательства представленных ниже результатов можно найти в работах, ссылки на которые указаны для каждого отображения. Для всех рисунков, рассматриваемых ниже, значения параметров указаны в подписях к рисункам.

3.1. Бифуркации отображения (7)

3.1.1. Положительные значения параметра a. Если существует конечноудаленное притягивающее множество A, то его бассейн является односвязным, $D\equiv D_0$ и это отображение имеет неподвижную точку P на границе бассейна ∂D_0 аттрактора A, причем P - седловая точка или неустойчивый узел, который не является мысом для ∂D_0 , то есть $S_1>1$, $S_2<-1$ и $|S_2|<S_1$ при $a>0$. T имеет вторую неподвижную точку Q, которая является неустойчивым фокусом, окруженным кольцевой хаотической областью [3] при $a=1$ и $0.59<b<0.59873$.

Рис.13, а, б, в иллюстрируют теорему 2 и части (б)+(г) теоремы 3. Здесь озера появляются в результате бифуркации (б) теоремы 3 ($\Lambda=\Lambda_{3b}$, рис. 5, б) и затем серии бифуркаций (г) теоремы 3 ($\Lambda=\Lambda_{6b}$, $\Lambda=\Lambda_{7b}$, рис.7, б, в, г, д). Отображение (7) представляет простой пример ситуации, в которой бесконечное множество озер имеет только две предельные точки: Q и ее прообраз первого ранга $Q_{-1}\in Z_0$. Следовательно, эти озера не имеют фрактальной структуры.

В отличие от отображения (б) здесь бифуркация $\lambda=\lambda^*$ теоремы 4 приводит к бесконечному множеству нетрансверсальных точек касания $\partial d\cap\partial D_0$, причем P является их предельной точкой, если она седловая и принадлежит ∂D_0 (случай рис.13, г).

3.1.2. Отрицательные значения параметра a. Если существует конечноудаленное притягивающее множество A, то это отображение имеет неподвижную точку P на границе бассейна ∂D_0 аттрактора A, причем P - неустойчивый узел, мыс (точка сборки) границы ∂D_0 , то есть $S_1>1$, $S_2<-1$ и $|S_2|>S_1$, при $a<0$.

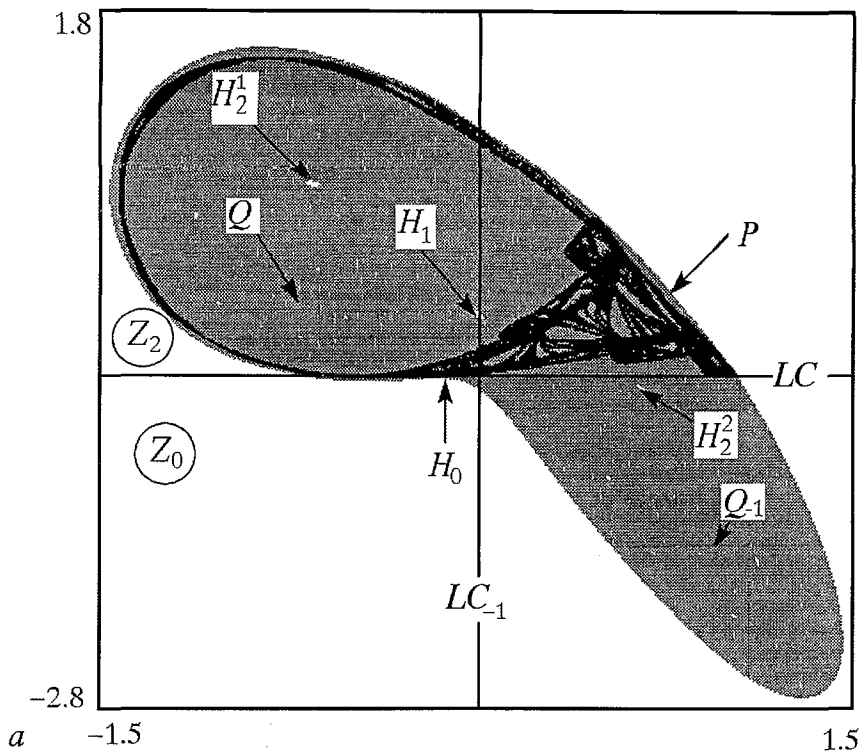


Рис. 13, а. Отображение (7), $a=1$, $b=-0.5952$. Черный цвет соответствует хаотическому аттрактору (d). Ситуация соответствует рис. 5, в [1]

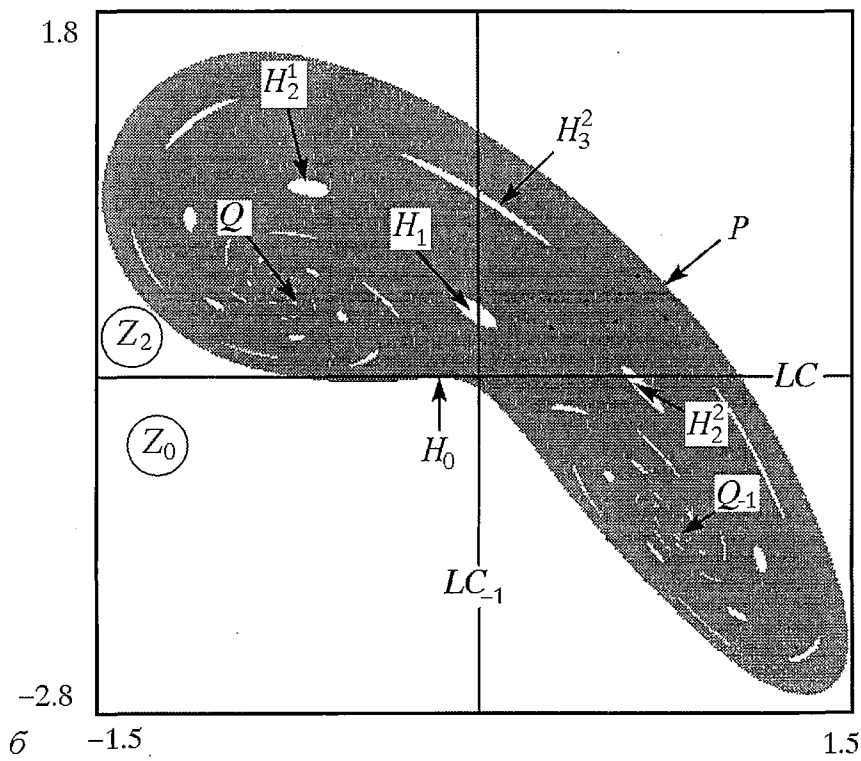


Рис. 13, б. Отображение (7), $a=1$, $b=-0.597$. Новые озера образуются из $H_2^2 \cap LC$ (ситуация рис. 7, в) [1]

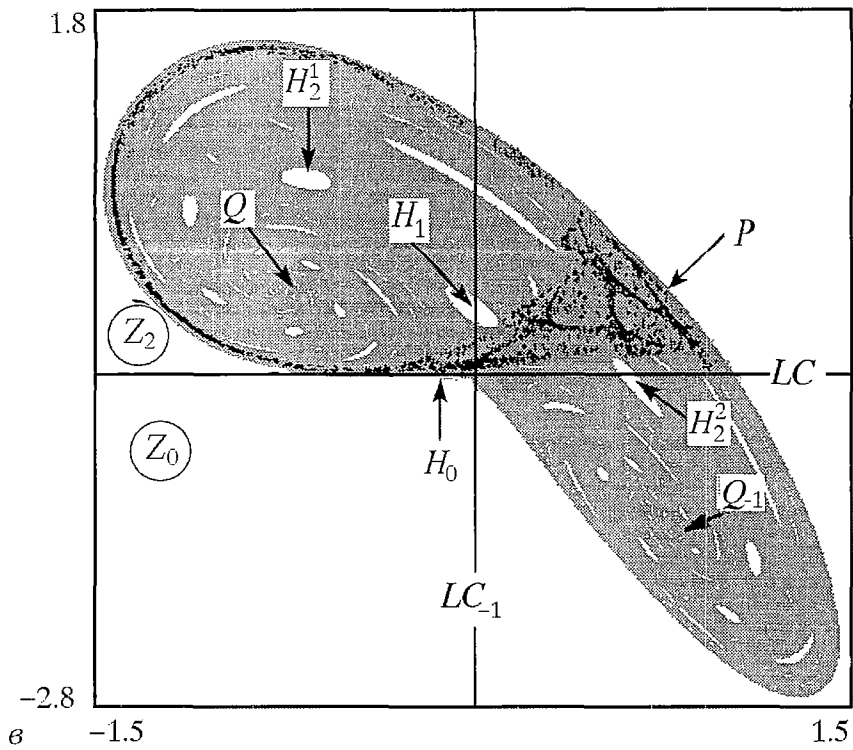


Рис. 13, в. Отображение (7), $a=1$, $b=-0.598$. Новые последовательности озер возникают при переходе озер из Z_0 в Z_2 [1]

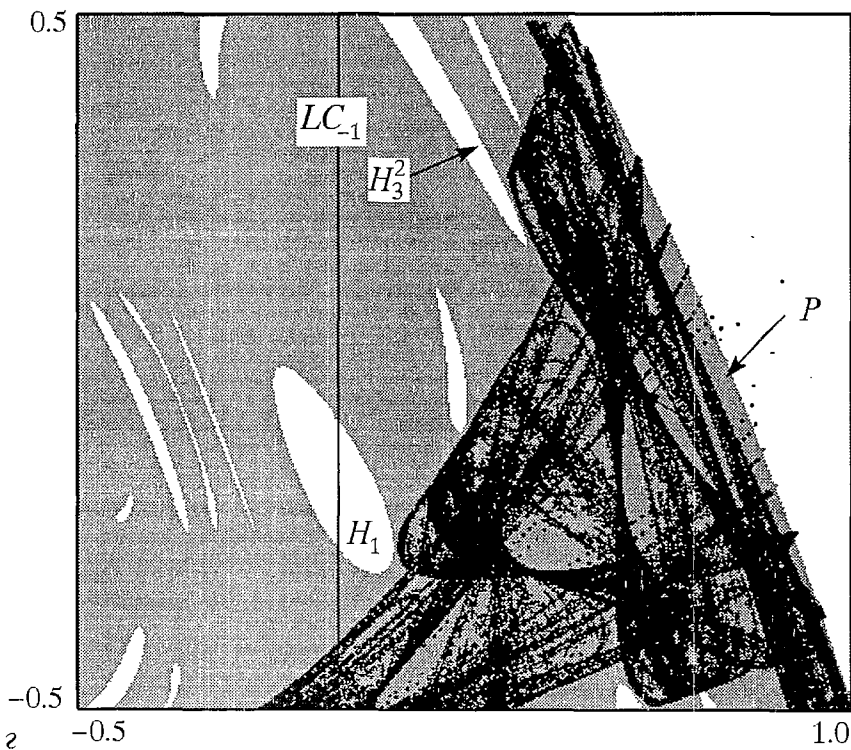


Рис. 13, г. Отображение (7), $a=1$, $b=-0.59873$. Языки хаотического аттрактора имеют бесконечно много точек касания с границей бассейна ∂D (устойчивым многообразием седла P) [1]

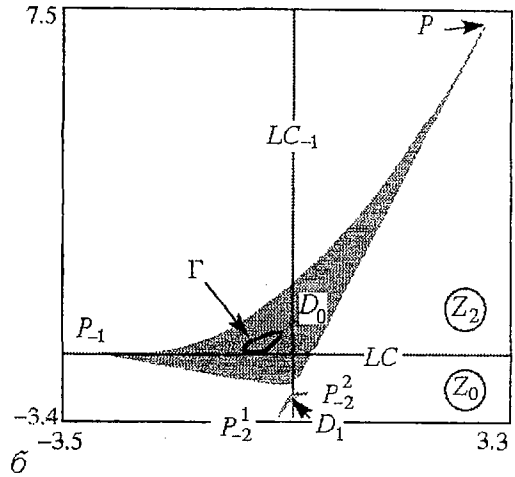
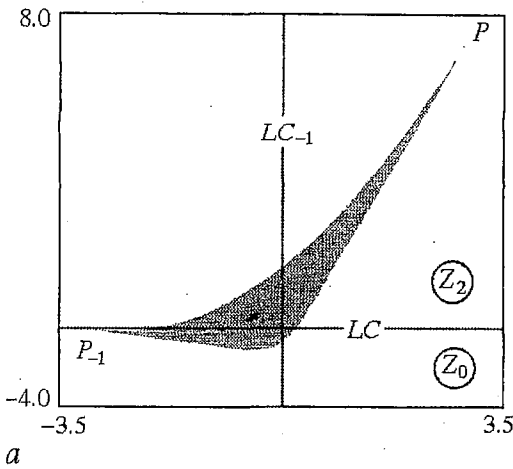


Рис. 14, а. Отображение (7), $a=-1.5$, $b=-1.5$. Односвязный бассейн ограниченных итерационных последовательностей, $P_{-1} \in Z_0$, $T^{-1}(P) = P \cup P_{-1}$ [1]

Рис. 14, б. Отображение (7), $a=-1.5$, $b=-1.59$. Несвязный бассейн, $D = D_0 \cup D_1$, $P_{-1} \in Z_2$, после бифуркации соответствующей $\Lambda = \Lambda_{1b}$ на рис. 4, б. $T^{-1}(P_{-1}) = T_1^{-1}(P_{-1}) \cup T_2^{-1}(P_{-1}) = P_{-2}^1 \cup P_{-2}^2$ [1]

Рис. 14, а, б иллюстрируют часть (а) теоремы 3 при прохождении через первую бифуркацию $\Lambda = \Lambda_{1b}$ (см. рис. 4), что соответствует касанию между ∂D_0 и LC , при этом $a = c$ (см. рис. 4, б). Здесь последовательность $T^{-n}(a)$ вырождена и состоит из одной только точки $a_{-1} \equiv c_{-1}$. Рис. 14, в, г иллюстрируют вторую бифуркацию $\Lambda = \Lambda_{2b}$ (см. рис. 4, г), которая соответствует тангенциальному касанию между ∂D_0 и LC , такому, что $a = b$, и приводит к возникновению нетрансверсального, но нетангенциального касания между ∂D_0 и границей ∂D_1 области D_1 . После бифуркации (см. рис. 4, д или 22, з) бассейн D становится связным. Отображения на рис. 14 получены для $a = -1.5$ при изменении b .

Часть (б) теоремы 3 (см. рис. 5, а, б, в) проиллюстрирована рис. 15, а, б, в, г, полученными для значения $b = -0.42$ при изменении a . Бифуркация ($\Lambda = \Lambda_{3b}$, см. рис. 5, б) происходит в момент контакта между ∂D_0 и LC ($a = b$), в ситуации,

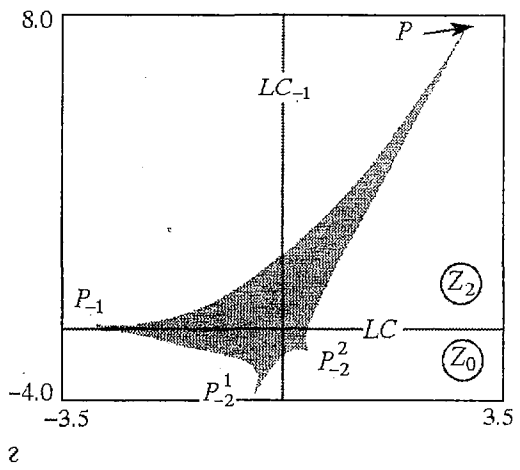
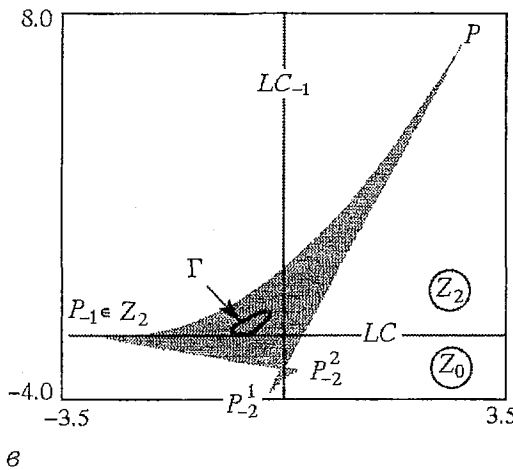


Рис. 14, в. Отображение (7), $a=-1.5$, $b=-1.601$. Бифуркация, соответствующая $\Lambda = \Lambda_{2b}$ на рис. 4, г. Γ - притягивающая замкнутая инвариантная кривая [1]

Рис. 14, г. Отображение (7), $a=-1.5$, $b=-1.75$. Бассейн ограниченных итерационных последовательностей становится односвязным после бифуркации на рис. 6, в [1]

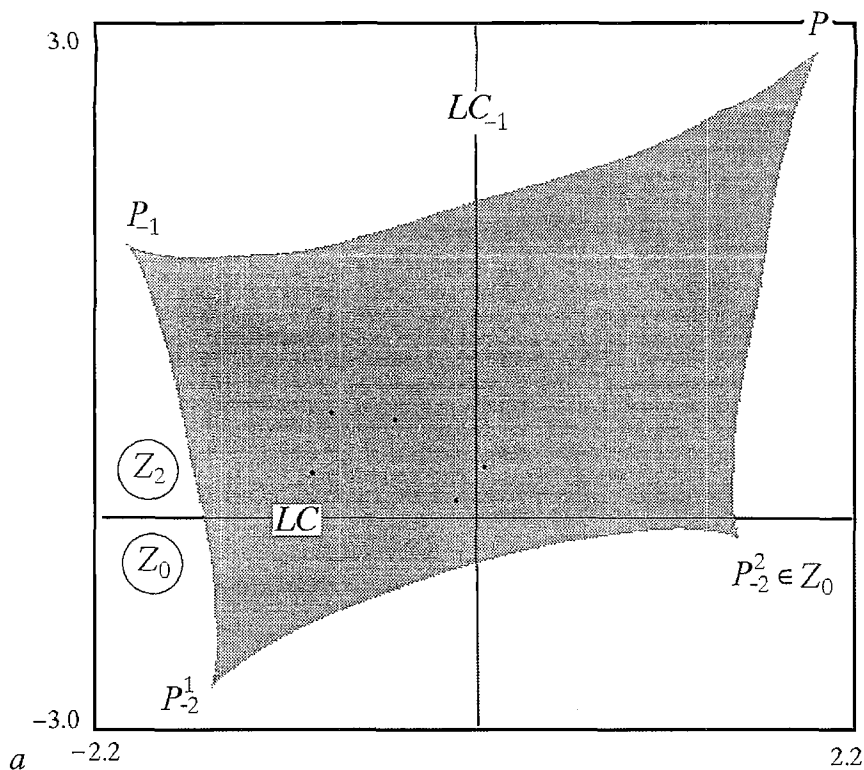


Рис. 15, а. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.2$. Односвязный бассейн ограниченных итерационных последовательностей [1]

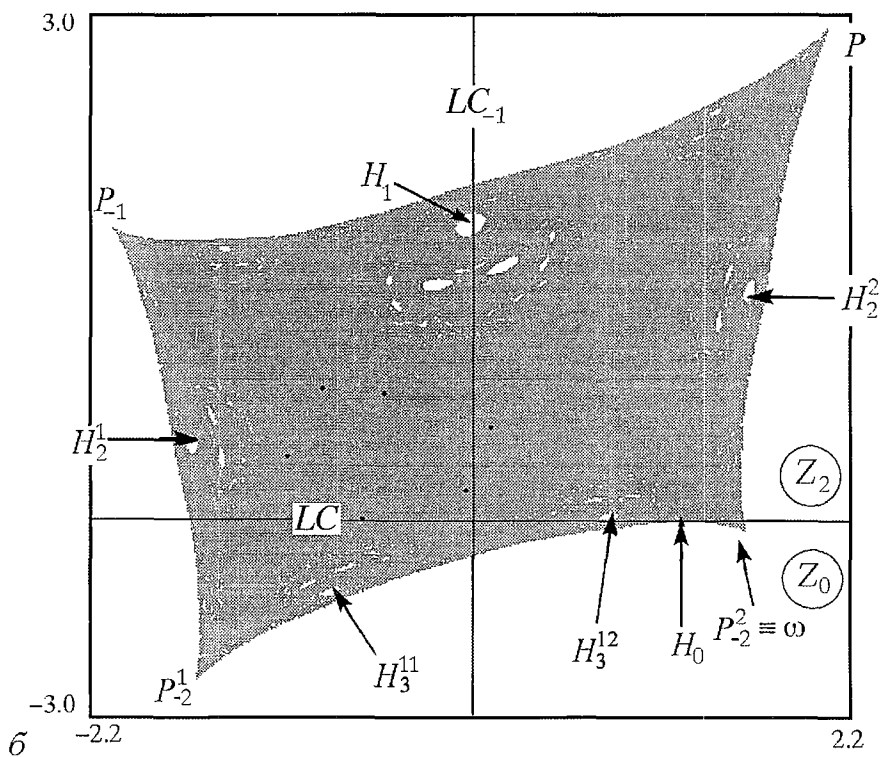


Рис. 15, б. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.30$. Многосвязный бассейн D_0 . $H_1=T^{-1}(H_0)$, $T^{-1}(H_1)=H_2^1 \cup H_2^2$ [1]

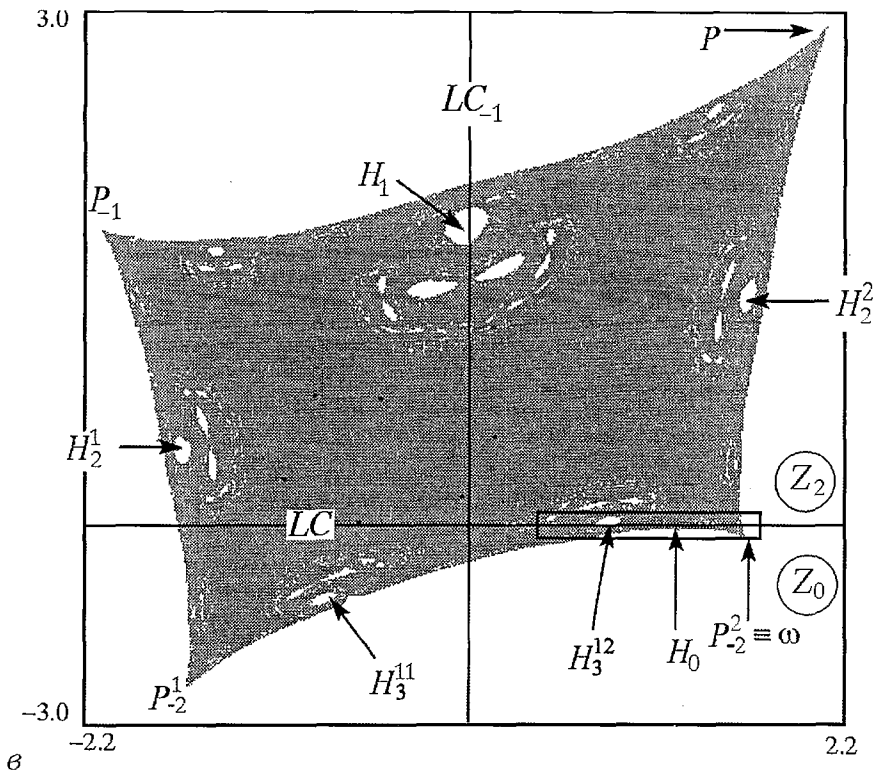


Рис. 15, в. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.31$. Размер озер в D_0 возрастает [1]

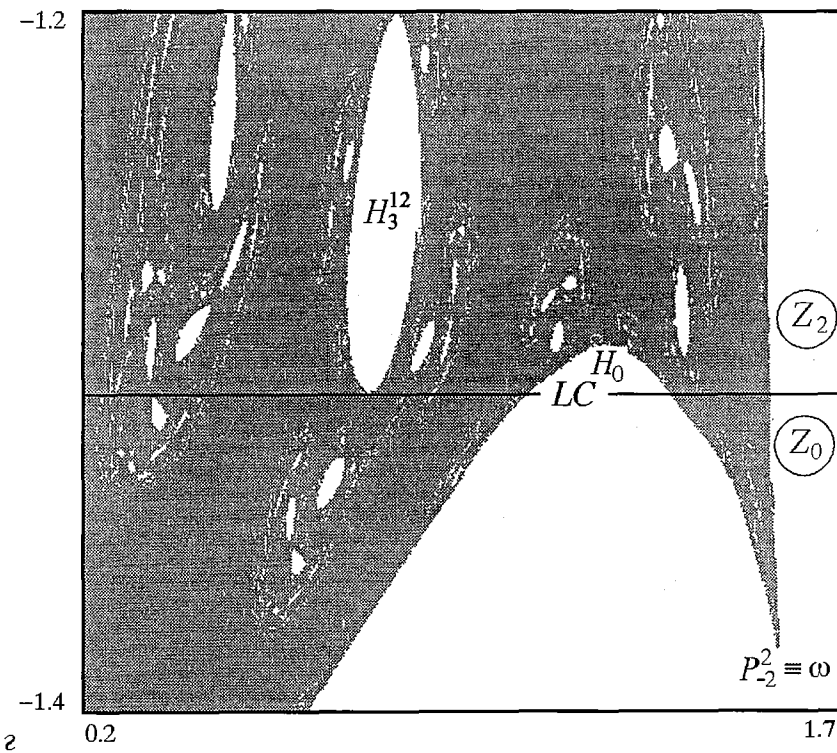


Рис. 15, г. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.31$. Увеличенная часть рис.15,в, выделенная прямоугольником [1]

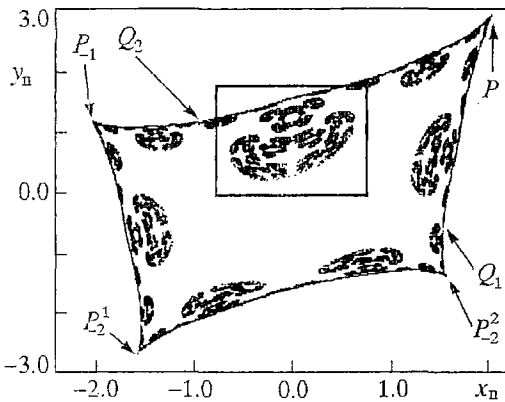


Рис. 16. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.30$. Древоподобная последовательность прообразов цикла периода 2 (Q_1, Q_2). Прообразы принадлежат предельному множеству озер D . Такая последовательность воспроизводит форму непосредственного бассейна D , что подтверждает фрактальную структуру бассейна [1]

что ∂D_0 имеет слабо фрактальную структуру. На рис.16 показаны прообразы ранга $n=1, \dots, 12$ точек P и циклов периода $k=2$, и видно, что это предельное множество ∂D_0 воспроизводит форму ∂D_0 .

Рис.17 демонстрирует образование рейда при прохождении через бифуркацию $\Lambda=\Lambda_{8b}$ (см. рис. 8, а), то есть теперь прообразы ранга два P_{-2}

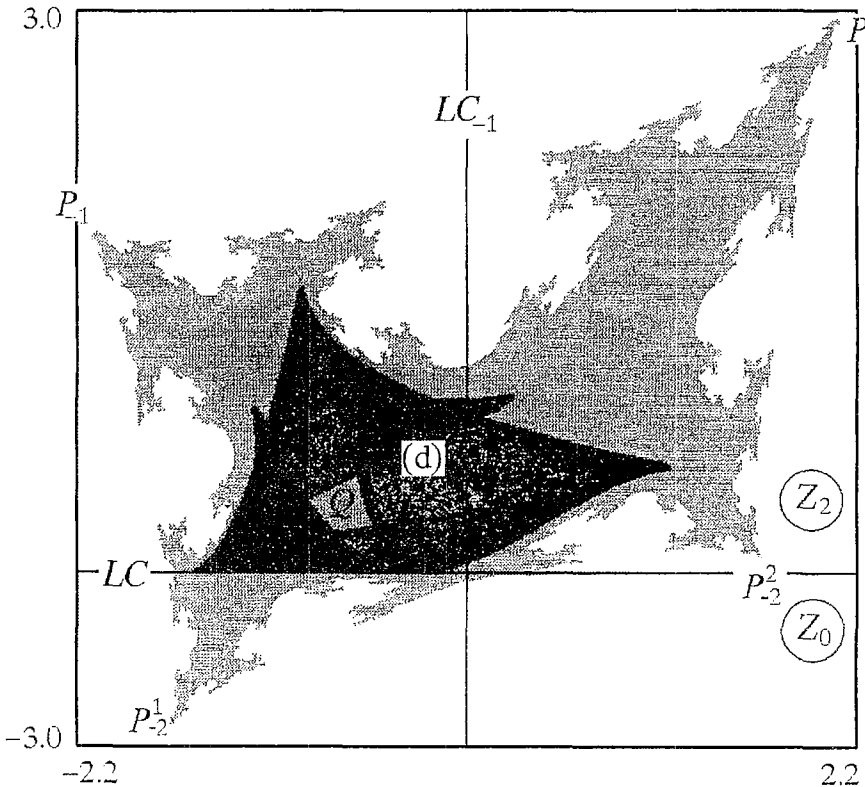


Рис. 17. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.6$. Озера бассейна D открываются в «море» после бифуркации, соответствующей $\Lambda=\Lambda_{8b}$ на рис. 8, а. Внешняя граница D теперь сильно фрактальна. Черная область (d) - хаотический аттрактор [1]

приводящей к возникновению залива H_0 . После бифуркации элементы древоподобной последовательности точек $T^{-n}(a=b)$, $n=1, 2, \dots$ (см.рис. 5, б) становятся зародышами древоподобной последовательности озер $T^{-p}(H_0)=\cup H_p^{i, \dots, r, s}$, $p=1, 2, \dots$

Если ранг этих прообразов стремится к бесконечности, то предельное множество Ω_1 древоподобной последовательности дырок состоит из P , бесконечного множества неустойчивых циклов на ∂D_0 , возникших при бифуркациях удвоения периода из Q_1, Q_2 , и бифуркационной структуры типа ящик-в-ящике (box-within-a-box) [33], существующей для T^2 при $a \neq 0$ (см. раздел 3.2), их точек накопления при стремлении периода циклов к бесконечности, и прообразов любого ранга всех этих точек. Отсюда следует,

неподвижной точки типа «мыс» принадлежат Z_2 , и озера, существовавшие до бифуркации, теперь сообщаются с морем. Здесь граница ∂D_0 имеет сильно фрактальный характер. Этот рисунок также демонстрирует хаотическую область (d) внутри бассейна, который разрушается при прохождении параметра b через бифуркационное значение, соответствующее содержанию теоремы 4 (нетрансверсальное касание ∂D_0 и ∂d). После этой бифуркации (рис.18) остается отталкивающее множество, приводящее к появлению переходных траекторий к бесконечно удаленному аттрактору.

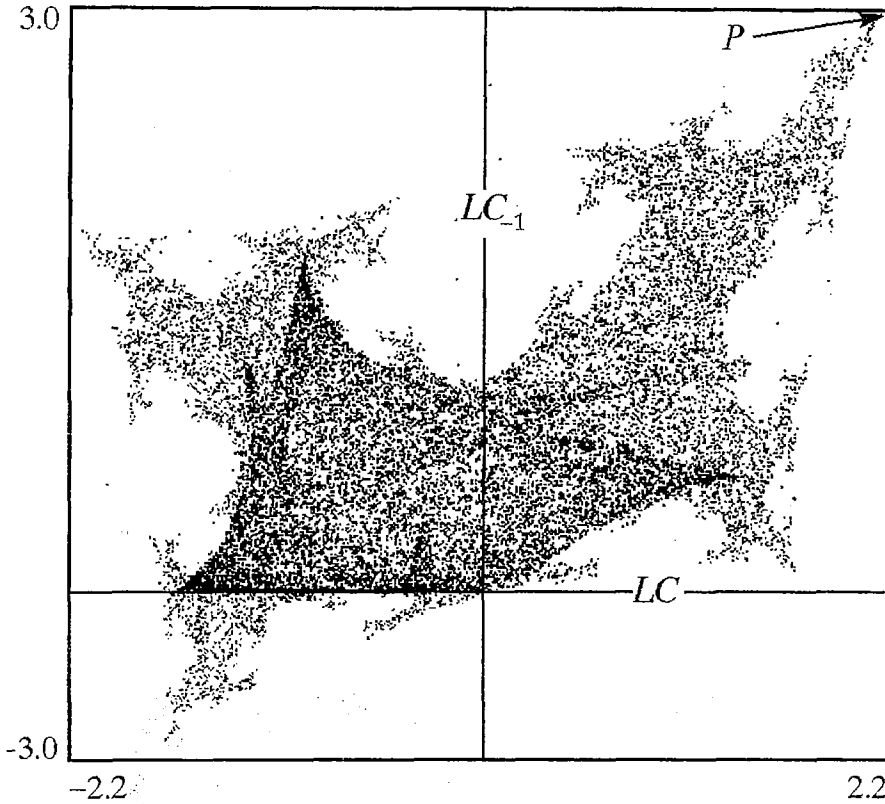


Рис. 18. Отображение (7), $a=-0.42$, $b=-1.65$. Хаотическая переходная траектория неограниченной итерационной последовательности после прохождения через бифуркационное значение $\Lambda=\Lambda^*$, соответствующее теореме 4 [1]

3.2. Некоторые свойства отображения (8)

Это отображение исключительно богато интересными бифуркациями, некоторые из которых детально описаны в [2]. В частности, при $g=0.1$, $h=0.1013$ и $e \approx 0.43754$, происходит бифуркация части (a) теоремы 3, но в отличие от отображения (7), она приводит теперь к образованию бесконечного количества островов, обладающих предельным множеством Ω_i (см. раздел 1.2). Эти острова принадлежат полному бассейну устойчивой неподвижной точки. При возрастании e имеет место бифуркация части (в) теоремы 3. Затем, при $e_{2b}^1 \approx 0.5806668 < e < 0.61$ происходит каскад бифуркаций $e=e_{2b}^n$, $n=2,3,\dots$, типа $\Lambda=\Lambda_{2b}$, приводящий к объединению (aggregation) возрастающего числа островов с непосредственным бассейном. Это приводит к связанному бассейну при $n \rightarrow \infty$.

4. Объединение озер в кубическом отображении

Это отображение типа $(Z_1 < Z_3 >)$, характеризующееся замкнутой критической кривой LC с двумя точками сборки (LC имеет форму губ, что символизируется знаком «<...>»), которая ограничивает область Z_3 с тремя прообразами первого ранга, окруженную неограниченной областью Z_1 с одним только прообразом первого ранга. LC_{-1} является эллипсом. Отображение T имеет вид

$$x' = y, \quad y' = (y/5 - x/2)(x^2 + y^2 - 6x/5 - \lambda y + 1/2) + x. \quad (9)$$

Впервые это отображение было исследовано в [36] и [3] для $1.1 \leq \lambda \leq 1.3$. При $3.72 \leq \lambda \leq 4.7$, T претерпевает бифуркации теорем 3 и 4 в ситуациях, приводящих к бассейнам, имеющим структуру, отличную от рассмотренных выше.

При $3.72 \leq \lambda \leq 3.73775$ это отображение имеет два конечноудаленных аттрактора: устойчивую неподвижную точку O ($x=y=0$) и хаотическую область (d) , бассейн которой представлен на рис. 19 для $\lambda=3.73$. Белая часть рисунка соответствует неограниченным итерационным последовательностям. Область, окрашенная в темно-серый цвет, относится к (многосвязному) бассейну точки O , дополнительная к ним область - (несвязный) бассейн (d) . При $\lambda=\lambda^*=3.73775$ происходит бифуркация теоремы 4. При $\lambda > \lambda^*$ бассейн (d) разрушается и остается единственный конечноудаленный аттрактор - O . Остается отталкивающее (repulsive) множество Ω_i (см. раздел 1.2), рождающееся из сингулярных точек области (d) и их прообразов.

Если образуется залив H_0 (рис. 20, $\lambda=4$), его прообразы порождают древовидную последовательность озер, предельными точками которой являются точки множества Ω_i . Тогда его озерная структура фрактальна. Существует интервал параметров, при котором **имеются два залива** $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$,

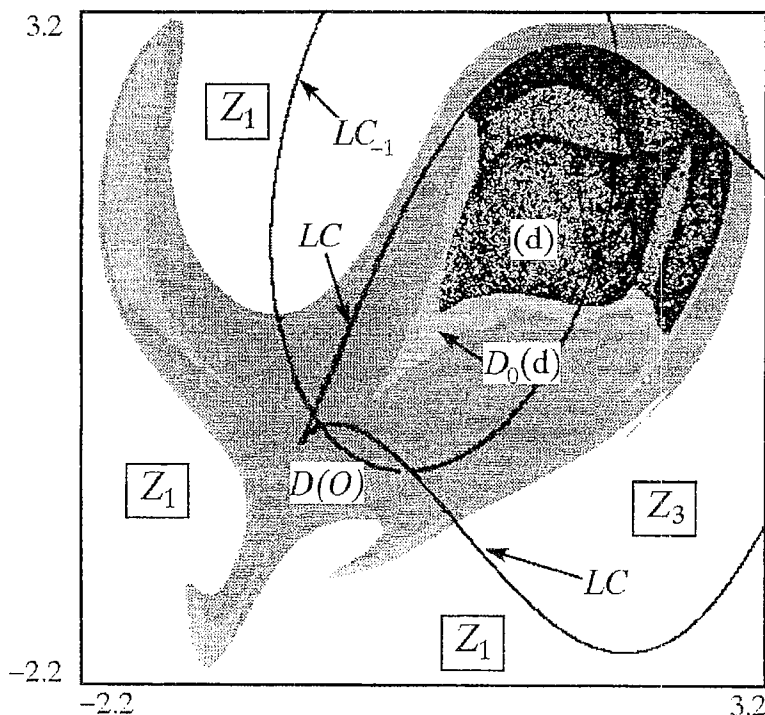


Рис. 19. Отображение (9), $\lambda=3.73$. Многосвязный бассейн $D(O)$ притягивающей неподвижной точки O (темно-серый цвет), и несвязный бассейн $D(d)$ хаотической области (d) (светло-серый)

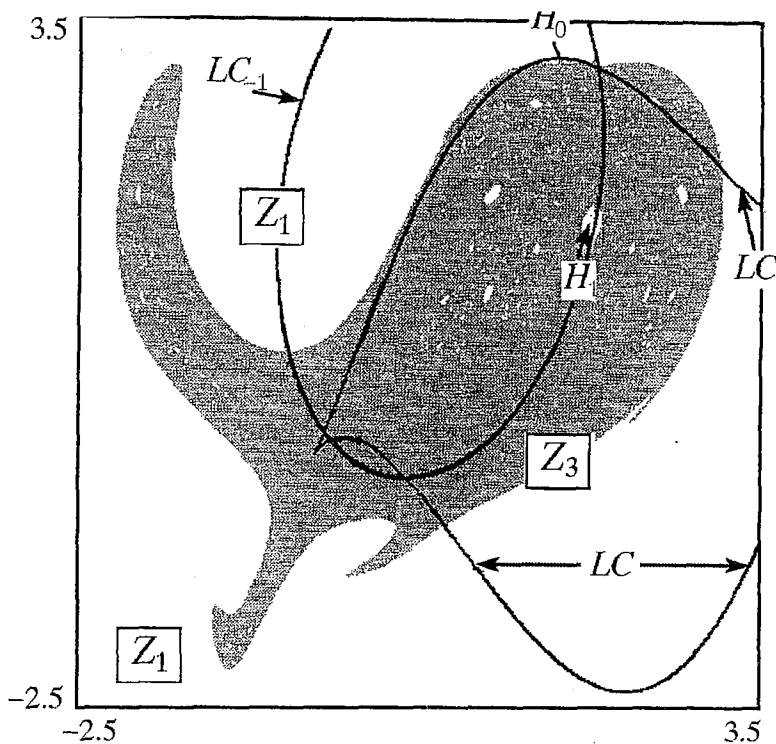


Рис. 20. Отображение (9), $\lambda=4$. Хаотическая область (d) разрушилась в результате бифуркации $\lambda=\lambda^*$ теоремы 4, породив отгалкивающее множество Ω_i , которое является предельным для множества озер многосвязного бассейна $D(O)$ (темно-серый)

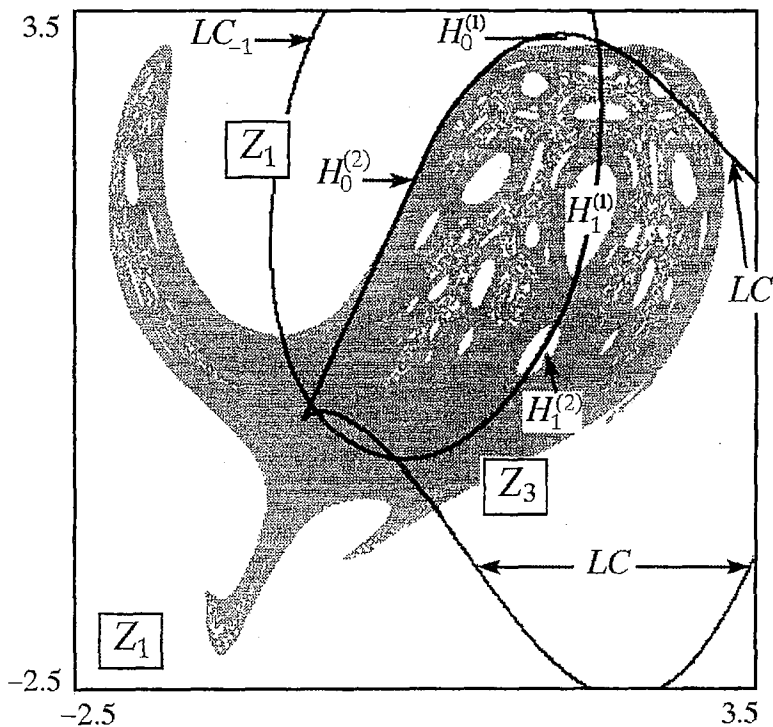


Рис. 21. Отображение (9), $\lambda=4.1$. Новая древовидная последовательность озер образовалась из нового залива $H_0^{(2)}$. $H_0^{(1)}$ соответствует заливу H_0 на рис. 20

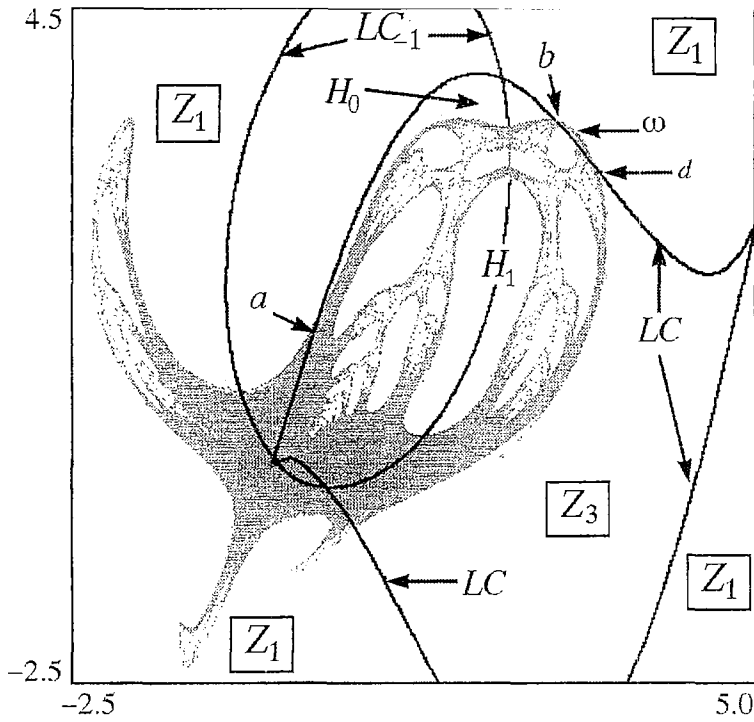


Рис. 22. Отображение (9), $\lambda=4.5$. Два залива $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ слились, приводя к слиянию озер

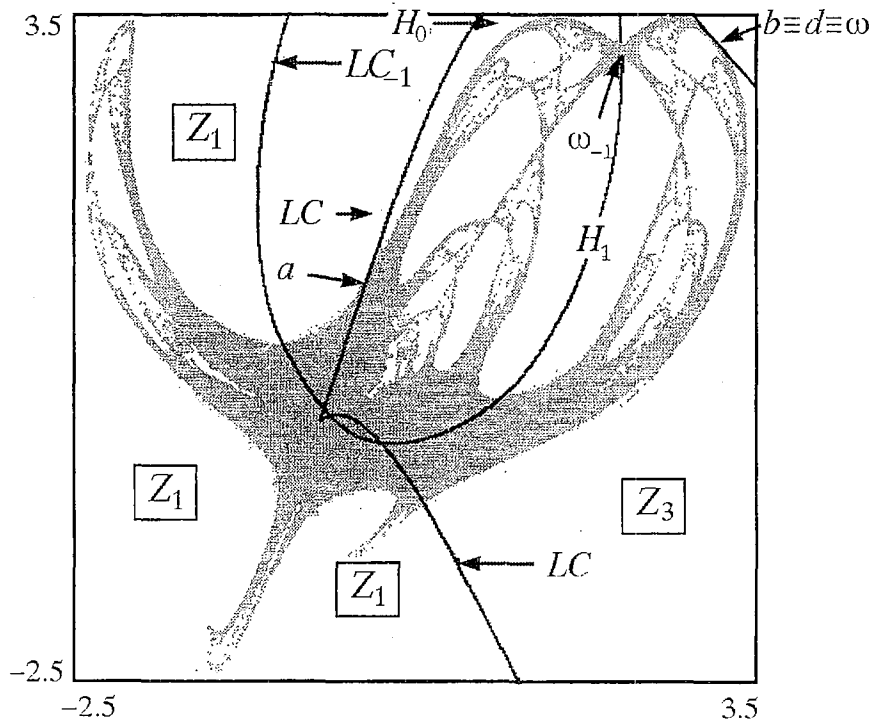


Рис. 23. Отображение (9), $\lambda=4.6985$. Ситуация эквивалентна изображенной на рис.8,a , то есть $\Lambda=\Lambda_{sb}$. При больших значениях λ озера превращаются в рейды и бассейн $D(O)$ становится односвязным

пересекающиеся с LC_{-1} , как показано на рис. 21 ($\lambda=41$). Рис. 22 ($\lambda=4.5$) показывает, что происходит бифуркация типа (г) теоремы 3 (см. рис.5 и 7), приводящая к объединению озер. Рис. 23 соответствует бифуркации типа (д) теоремы 3 (см. рис. 8, а), однако две крайние точки возникающих «рейдов» не являются мысами (сборками), поскольку точка нетрансверсального касания $\omega=\partial D \cap LC$ - не является мысом. После этой бифуркации бассейн аттрактора O становится односвязным.

Заключение

Эта статья, также как и различные работы, упомянутые здесь и более подробно в [1], выявляет фундаментальное значение, которое имеют критические кривые двумерных необратимых отображений (эндоморфизмов) для определения природы бассейнов притяжения и при изучении их бифуркаций. Оказывается, что возможны новые, по сравнению с [1], типы фрактализации границы. Более того, необходимо отметить, что возможны другие типы объединения островов, чем те, что описаны в [2], например, в случае отображения (8) при $h=0.1013$ в интервале значений параметра $0.61 < e < 1.6$. Интервал $1.468 < e < 1.495$ вообще чрезвычайно богат различными сложными объединениями элементов структур и возникновением «озер внутри островов», которые могут быть объяснены с помощью теорем из раздела 1.

С другой точки зрения, интересно отметить, что отображения (8) и (9) приводят к неклассической бифуркации, при которой возникает целая особая кривая, состоящая из неподвижных или периодических точек, и которая существует только при бифуркационном значении параметра (см. [3, с.161-162, 175-177] и [33, с.202-203]). Для отображений (8) и (9) эта бифуркация приводит к внезапному изменению формы бассейна [36,37 и 3, с.252-260,].

Понятие критической кривой обобщается на n -мерные необратимые отображения, $n > 2$, путем введения понятия *критического многообразия* [38]. Критические многообразия имеют столь же фундаментальное значение, что и критические кривые, для определения свойств бассейнов и их бифуркаций.

Библиографический список

1. Mira C., Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H., Cathala J.C. **1994**, «Basin bifurcations of two-dimensional noninvertible maps. Fractalization of basins», Int.J.of Bif. and Chaos. Vol. 4, № 2. P. 343.
2. Mira C., Rauzy, **1995**, should be published in Int.J.of Bif. and Chaos.
3. Gumowski I., Mira C., **1980**, «Dynamique chaotique», Ed. Cépadués, Toulouse.
4. Mira C., **1964**, «Détermination pratique du domaine de stabilité d'un point d'équilibre d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles», Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A, 261, groupe 2. P. 5314.
5. Gumowski I., Mira C. **1965**, «Sur un algorithme de détermination du domaine de stabilité d'un point double d'une récurrence non linéaire du deuxième ordre à variables réelles», Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A, 260. P. 6524.
6. Mira C. **1966**, «Sur quelques propriétés de la frontière du domaine de stabilité d'un point double d'une récurrence d'ordre 2, et sur un cas de bifurcation de cette frontière», C.R.A.S. (Comptes Rendus Acad. Sc.), Serie A, 262. P. 951.
7. Mira C., Roubellat J.C., **1969**, «Cas où le domaine de stabilité d'un ensemble limite attractif d'une récurrence du deuxième ordre n'est pas simplement connexe», C.R.A.S. T.268, série A. P. 1657.
8. Bernussou J., Liu Hsu, Mira C., **1976**, «Quelques exemples de solutions stochastiques bornées dans les récurrence autonomes du 2 ordre», Transformations ponctuelles et applications, Colloque CNRS, sept.73 Toulouse, Ed.CNRS Paris 1976.
9. Barugola A., Cathala J.C., Mira C., **1986**, «Annular chaotic areas», Non Linear Analysis T.M.A., 10(11), P. 1223.
10. Cathala J.C., **1989**, «On some properties of absorptive areas in 2 order endo-

11. Gumowski I., Mira C., 1977, «Solutions chaotiques bornées d'une récurrence ou transformation ponctuelle du second ordre à inverse non unique», Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A, 285, série A, P. 477.
12. Gumowski I., Mira C., 1978, «Bifurcation déstabilisant une solution chaotique d'un endomorphisme du 2^e ordre», Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A, 286, série A, P. 427.
13. Mira C., 1990, «Systèmes asservis non linéaires», Ed. Hermès, Paris.
14. Kawakami H., Kobayashi K., 1979, «Computer experiments on chaotic solutions of $x(t+1) - ax(t+1) - x^2(t) = b$ », Bull. Fac. of Engin., Tokushima University, 16, P. 29.
15. Cathala J.C., 1990, «Multi connected chaotic areas in second order endomorphisms», Int.J. Systems Sci. Vol. 21, № 5, P. 863.
16. Gardini L., 1991, «On the global bifurcation of two-dimensional endomorphisms by use of critical lines», Non Linear Analysis T., M.A., 18, 4, P. 361.
17. Barugola A., Cathala J.C., 1992, «An extension of the notion of chaotic area in two-dimensional endomorphisms», ECIT (European conference on Iteration Theory) Batschuns, Austria, sept. 92.
18. Gardini L., 1991, «Global analysis and bifurcations in two-dimensional endomorphisms by use of critical lines», Proceedings of ECIT (European Conference on Iteration Theory) Batschuns, Austria, sept. 91, World Scientific Ed., Singapore. P. 112.
19. Gardini L., 1992, «Homoclinic orbits of saddles in two-dimensional endomorphisms», Proceedings of ECIT (European Conference on Iteration Theory) Batschuns, Austria, sept. 92.
20. Gardini L., 1994, «Homoclinic bifurcations in n-dimensional endomorphisms due to expanding periodic point», Non Linear Analysis T., M.A., (23) 8, P. 1039.
21. Gardini L., Abraham R., Fournier-Prunaret D. and Record R.J., 1994, «A double logistic map», Int.J. of Bif. and Chaos. Vol. 4, № 1, P. 145.
22. Adomaitis R.A., Kevrekidis I.G., 1991, «Noninvertibility and the structure of basins of attraction in a model control system», J.Non.Sci. Vol. 1, P. 95.
23. Frouzakis C.E., Adomaitis R.A., Kevrekidis I.G., Golden M.P., Ydstie B.E., 1992, «The structure of basin boundaries in simple adaptive control system», Proc. NATO Advanced Summer Institute. T.Bountis ed.
24. Adomaitis R.A., Frouzakis C.E., Kevrekidis I.G., 1992, «Global stability analysis of an adaptively-controlled mixing tank experiment», presented at the 1992 American Control Conference, Chicago.
25. Fournier-Prunaret D., Uhl C., Macchi O., Dinar S., 1993, «Chaotic bifurcations in the DPCM transmission system with order two predictor», Proceedings ECCTD 93 (Davos, Swiss Aug.30-Sept.3, 1993), Elsevier. P. 837.
26. Delli Gatti D., Gallegati M., Gardini L., 1993, «Investment confidence, corporate debt and income fluctuations», Jour. of Economic Behaviour and Organisation, should be published.
27. Gardini L., 1993, «On a model of financial crisis. Critical lines as new tools of global analysis», Nonlinear Dynamics in Economics and Social Sciences, Gori. Geronazzo eds., Springer-Verlag, N-Y.
28. Beddington J.R., C.A. Free Lawton H., 1975, «Dynamics complexity in predator-prey models framed in difference equations», Nature 255, P. 58.
29. Guckenheimer J., Oster G.F., Ipaktchi A., 1977, «The dynamics of density depended population models», J.Math.Biology, Vol. 4, P. 101.
30. Roubellat F., 1969, «Contribution à l'étude des solutions des récurrences non linéaires et applications aux systèmes à données échantillonnées», Thèse de Doctorat ès - Sciences Physiques, n.364, Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse.
31. Mira C., Gardini L., Barugola A., and Cathala J.C., 1996, «Chaotic Dynamics. Two-dimensional endomorphisms (non-invertible maps) problems», Book should be published in «Nonlinear Science», Series A, World Scientific.
32. Mira C., 1980, «Complex dynamics in two-dimensional endomorphisms», Non Linear Analysis T., M.A., Vol. 4, 6, P. 1167.
33. Mira C., 1987, «Chaotic dynamics», World Scientific, Singapour.
34. Gumowski I., Mira C., 1980a, «Recurrences and discrete dynamic systems», Lecture notes in Mathematics, Springer.
35. Mira C., Narayaninsamy T., 1993, «On two behaviours of two-dimensional

35. Mira C., Narayaninsamy T., 1993, «On two behaviours of two-dimensional endomorphisms: role of the critical curves», Int. J. of Bif. and Chaos. Vol. 3, № 1. P. 187.
36. Gumowski I., Mira C., 1969, «Sensitivity problems related to certain bifurcations in nonlinear recurrences relations». Automatica, 5. P. 303.
37. Mira C., Babary J.P., Giraud A., 1968, «Indice de Poincare d'une recurrence autonome du deuxieme ordre», Electronics Letters. Vol.4, № 5. P. 90.
38. Mira C., 1978, «Systèmes à dynamique complexe et bifurcations boîtes emboîtées», 1 partie, RAIRO Automatique. Vol.12, № 1. P. 63, 2 partie. Vol.12, № 2. P. 171.

Работа была представлена на школе - конференции «Дифференциальные уравнения: бифуркации и хаос», Кацевели, Крым, Украина, 3-14 мая, 1994.

GESNLA-LESIA INSA.
Complexe scientifique de Rangueil
Toulouse France

Поступила в редакцию 26.12.94
после переработки 18.07.95

Перевод И.П. Сатаева

SOME RESULTS ON BASINS GENERATED BY TWO-DIMENSIONAL NONINVERTIBLE MAPS

Christian Mira

This paper in summarized presentation of some basin properties related to non-invertible maps of the plane, published either in relatively ancient papers written in french language, or in very recent ones. Such properties are obtained by using the method of critical curves, natural extension of the notion of critical point of one-dimensional endomorphisms. More particularly bifurcations leading to a fractalization of the basin boundary are illustrated by examples having a simple form.



Mira Christian - birthday 6 March 1934 Meknes, Marocco. Engineer diploma Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et d'Hydraulique de Toulouse (June 1957). Doctorat es-sciences Physiques Faculte des Sciences de Toulouse (March 1961). From 1965 Professor of Control Engineering and Nonlinear Dynamics (Institut National des Sciences Appliquees de Toulouse). Research activities: optimization theory (1965-1970); variable structure control (from 1969); nonlinear dynamics (from 1958) in the following fields: complex dynamics and chaotic dynamics (from 1966, at the beginning under the name of «Pulkin phenomenon») and applications to the dynamics of rectifiers with voltage and current feedback (1966-1971 and 1986-1989); dynamics of N -dimensional noninvertible maps models ($N=1,2$ from 1963, $N>2$ sometimes). Author of 206 scientific publications.

Author of the following books:

- Optimization in Control theory and practice. Cambridge: University Press, 1968 (with *I. Gumowski*).
- Problèmes posés par l'optimisation. Dunod, 1970 (with *I. Gumowski*).
- Cours de systhmes asservis non liniaires (pour le certificat C3 Automatique), collection Dunod Universiti, 1969.
- Fascicule B de «Exercices pour le certificat C3 Automatique de la Mantrise E.E.A.», collection Dunod Universiti, 1969 (with co-authors).
- Dynamique chaotique. Transformations ponctuelles. Transition ordre-disordre (with *I. Gumowski*). 480 pages. Cipadues Editions, mars 1980, Toulouse.
- Recurrences and discrete dynamic systems - An introduction (with *I. Gumowski*). 250 pages. Lecture notes in mathematics N 809, Springer, 1980.
- Chaotic Dynamics. From the one-dimensional endomorphism to the two-dimensional diffeomorphism. 450 pages. World Scientific, 1987.
- Systhmes asservis non liniaires. Hermhs, 1990, 425 pages.
- C. Mira, L. Gardini, A. Barugola & J.C. Cathala. Chaotic Dynamics in two-dimensional noninvertible maps. World Scientific, in «Series A on Nonlinear Sciences» (Editor L. Chua), 637 pages, July 1996.
- R. Abraham, L. Gardini, C. Mira. Discrete Dynamical Systems in two-dimensions. TELOS, Electronic Library of Science, Springer-Verlag, Santa Clara. (Book/CD-ROM package), 1996.
- Co-editor of the Proceedings of «European Conference on Iteration Theory» (1989, 1991, 1992);
- Member the Editorial Board of International Journal of Bifurcation and Chaos in Engineering and Applied Sciences (Ed. Prof. L.Chua Berkeley).