



ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИЕЙ СЕДЛОВОГО СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Л.А. Бакалейников

В работе решается задача построения по данной динамической системе с седловым состоянием равновесия такой системы, которая обладает гомоклинической траекторией и совпадает с исходной в некоторой окрестности состояния равновесия. Приведен конкретный конструктивный путь построения модифицированной системы.

Изучение хаотических явлений в нелинейных динамических системах в последние годы привлекает большое внимание. Как известно [1], одной из возможных причин возникновения хаоса является наличие у системы орбит, гомоклинических к инвариантным многообразиям гиперболического типа. Проблемы, связанные с существованием и нахождением гомоклинических траекторий данных динамических систем, являются весьма сложными даже в простейших случаях, когда инвариантное многообразие представляет собой точку покоя [2,3]. В ряде случаев интерес представляет и обратная задача - построение динамической системы, заведомо обладающей гомоклинической траекторией. В настоящей работе приводится конструкция, позволяющая по данной динамической системе построить систему, которая совпадает с исходной в некоторой окрестности состояния равновесия и имеет к нему гомоклиническую траекторию.

Итак, рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in R^n \quad (1)$$

где $F: V \rightarrow R^n$ - гладкое (класса C^r , $r \geq 1$) отображение открытой окрестности V начала координат в R^n . Будем предполагать, что $x=0$ является гиперболической точкой покоя системы. Целью дальнейших построений является определение гладких (класса C^r , $r \geq 1$) вектор-функций $G(x)$ таких, что $F(x)=G(x)$ в некоторой окрестности точки $x=0$, а динамическая система $\dot{x}=G(x)$ обладает гомоклинической траекторией.

Выберем одну из устойчивых и одну из неустойчивых траекторий, стремящихся к точке покоя при $t \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow -\infty$, соответственно. Построим сферу $S_\varepsilon = \{x \in R^n \mid \|x\| = \varepsilon\}$ радиуса ε с центром в начале координат так, чтобы она лежала в области V , и обозначим точки пересечения выбранных траекторий с этой сферой через x_s, x_u . Введем единичные векторы $\Omega = x/\|x\|$, $\Omega_s = x_s/\|x_s\|$, $\Omega_u = x_u/\|x_u\|$ и определим конусы

$$K_{\Omega_s}^\gamma = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid \|\Omega - \Omega_s\| < \gamma \},$$

$$K_{\Omega_u}^\gamma = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid \|\Omega - \Omega_u\| < \gamma \}.$$

Рассмотрим $(n-1)$ -мерные множества $U^l(\mathbf{x}_s)$, $U^l(\mathbf{x}_u)$, являющиеся пересечениями сферы S_ε с конусами $K_{\Omega_s}^\gamma$, $K_{\Omega_u}^\gamma$.

Вследствие непрерывности правых частей при достаточно малых ε найдется такое значение γ , что

$$(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) < 0, \quad \mathbf{x} \in U^l(\mathbf{x}_s),$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) > 0, \quad \mathbf{x} \in U^l(\mathbf{x}_u),$$

то есть множества $U^l(\mathbf{x}_s)$, $U^l(\mathbf{x}_u)$ являются сечениями векторного поля, причем поток на $U^l(\mathbf{x}_s)$ направлен внутрь области, ограниченной S_ε , а на $U^l(\mathbf{x}_u)$ - наружу.

С целью построения гомоклинической траектории изменим правые части системы (1) в области $\|\mathbf{x}\| > \varepsilon$. Выберем некоторое значение κ так, чтобы сфера $S_{\varepsilon+4\kappa}$ лежала в области V , и рассмотрим вектор-функцию

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x}) = & \mathbf{F}(\mathbf{x})\eta^{\gamma/4}(\|\Omega - \Omega_s\| - \gamma/2)\eta^{\gamma/4}(\|\Omega - \Omega_u\| - \gamma/2) + \\ & + (1 - \eta^{\gamma/4}(\|\Omega - \Omega_s\| - \gamma/2))[-\Omega\eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta) + \mathbf{F}(\varepsilon\Omega)(1 - \eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta))] + \\ & + (1 - \eta^{\gamma/4}(\|\Omega - \Omega_u\| - \gamma/2))[\Omega\eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta) + \mathbf{F}(\varepsilon\Omega)(1 - \eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta))] \end{aligned} \quad (3)$$

при $0 < \delta < \kappa$. Здесь $r = \|\mathbf{x}\|$, $\eta_q(\vartheta)$ - бесконечно гладкая неубывающая функция, принимающая значение 0 при $\vartheta < -q$ и значение 1 при $\vartheta > q$. Второе и третье слагаемые в формуле для $\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})$ описывают переход от $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ к значениям $(-\Omega)$ и Ω внутри конусов $K_{\Omega_s}^{\gamma/4}$ и $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$, соответственно, при росте r от $\varepsilon + \delta/2$ до $\varepsilon + 3\delta/2$ (области I и II на рисунке). Поэтому на сфере S_ε вектор-функция $\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})$ совпадает с заданной правой частью $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, а на пересечении сферы $S_{\varepsilon+2\delta}$ с конусами $K_{\Omega_s}^{\gamma/4}$ и $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$ - с единичными векторами $(-\Omega)$ и Ω .

Покажем, что значение δ можно выбрать таким образом, чтобы траектории, проходящие через \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_s , пересекали сферу $S_{\varepsilon+2\delta}$ внутри конусов $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$, $K_{\Omega_s}^{\gamma/4}$. Для этого рассмотрим систему с правой частью

$$\mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{x}), & \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon, \\ \mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x}), & \varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon + 4\kappa. \end{cases} \quad (4)$$

Поскольку $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ непрерывна в шаре $W_{\varepsilon+4\kappa} = \{ \mathbf{x} \in R^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon + 4\kappa \}$, то существует константа M_1 такая, что

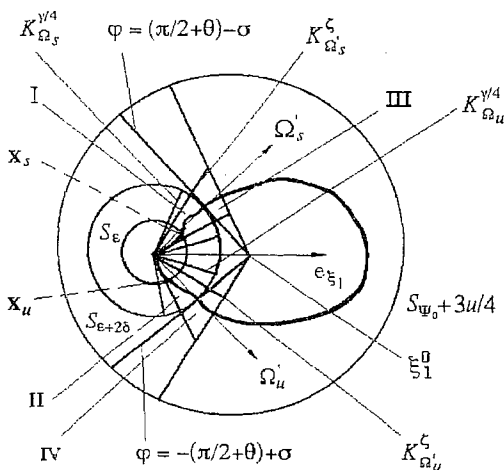
$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leq M_1, \quad \mathbf{x} \in W_{\varepsilon+4\kappa}.$$

Тогда для $\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})$ в шаровом слое $\varepsilon \leq \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon + 4\kappa$ согласно (3) имеем

$$\|\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})\| \leq M_1 + (1 + M_1) + (1 + M_1) = L_1,$$

и, следовательно, вектор-функция $\mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x})$ ограничена в шаре $W_{\varepsilon+4\kappa}$

$$\|\mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x})\| \leq L_1, \quad \mathbf{x} \in W_{\varepsilon+4\kappa}. \quad (5)$$



Структура окрестности точки покоя сконструированной системы с гомоклинической траекторией

Согласно оценке (5) можно утверждать, что траектория системы с правой частью $G_1^\delta(x)$, выпущенная из произвольной точки шара $W_{\varepsilon+2\kappa}$, за время $t < 2\kappa/L_1$ не уходит на расстояние большее, чем $L_1 t$. Пусть l - минимальное расстояние от x_u до точек границы конуса $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$. Тогда при $t < t^* = \min\{2\kappa/L_1, l/L_1\}$ траектория, выпущенная из x_u , остается внутри $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$. Оценим \dot{r} для таких времен. Для системы с правой частью (4) найдем

$$\dot{r} = \sum_{i=1}^n x_i \dot{x}_i / r = \sum_{i=1}^n \Omega_i \dot{x}_i = (\Omega, G_1^\delta(x)).$$

Для x из конуса $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$ в соответствии с (3) имеем

$$\dot{r} = \eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta) + (\Omega, F(\varepsilon\Omega)) (1 - \eta_{\delta/2}(r - \varepsilon - \delta)). \quad (6)$$

Согласно оценке (2) скалярное произведение $(\Omega, F(\varepsilon\Omega))$ положительно для $\Omega \in K_{\Omega_u}^\gamma$, поэтому существует константа $m_1 > 0$ такая, что

$$m_1 < (\Omega, F(\varepsilon\Omega)), \quad \Omega \in K_{\Omega_u}^{\gamma/4}.$$

Пусть $l_1 = \min\{1, m_1\}$. Тогда, согласно (6),

$$\dot{r} > l_1$$

и для траектории, начинающейся на сфере S_ε и не выходящей из конуса $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$, выполняется неравенство

$$r(t) > \varepsilon + l_1 t.$$

Выберем δ_u из интервала $[0, \kappa]$ так, чтобы выполнялось неравенство $2\delta_u < l_1 t^*$. Тогда за время $t < t^*$ траектория, выпущенная из x_u , достигнет сферы $S_{\varepsilon+2\delta_u}$, оставаясь внутри конуса $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$.

Обращая время и проводя аналогичные рассуждения в окрестности точки x_s , найдем $\delta_s \in [0, \kappa]$ такое, что траектория, выпущенная из x_s , пересекает сферу $S_{\varepsilon+2\delta_s}$, оставаясь внутри $K_{\Omega_s}^{\gamma/4}$.

Полагая в (3) $\delta = \min\{\delta_u, \delta_s\}$, можно утверждать, что точки x'_u и x'_s , по которым траектории, проходящие через точки x_u и x_s , пересекают сферу $S_{\varepsilon+2\delta}$, лежат внутри конусов $K_{\Omega_u}^{\gamma/4}$ и $K_{\Omega_s}^{\gamma/4}$, соответственно. Это, в свою очередь, означает, что векторное поле в точках x'_u и x'_s совпадает с векторами $\Omega'_u = x'_u / \|x'_u\|$ и $-\Omega'_s = -x'_s / \|x'_s\|$.

Сконструируем теперь правые части системы вне шара $W_{\varepsilon+2\delta}$ так, чтобы существовала траектория, соединяющая точки x'_u , x'_s . С этой целью выберем новую координатную систему следующим образом. Поскольку при достаточно малых ε и δ точки x'_u и x'_s не совпадают и не лежат на концах одного диаметра, то векторы x'_u и x'_s линейно независимы. Это позволяет выбрать орты $e_{\xi 1}$, $e_{\xi 2}$ новой координатной системы в линейной оболочке $\mathcal{L}(x'_u, x'_s)$ векторов x'_u , x'_s . Положим

$$e_{\xi 1} = \Omega_0 = (\Omega'_u + \Omega'_s) / \|\Omega'_u + \Omega'_s\|, \quad (e_{\xi 1}, e_{\xi 2}) = 0, \quad (e_{\xi 2}, \Omega'_s) > 0.$$

В качестве ортов $e_{\xi 3}, \dots, e_{\xi n}$ используем произвольный ортонормированный базис ортогонального дополнения к $\mathcal{L}(x'_u, x'_s)$. Пусть переход между старым и новым ортонормальными базисами задается матрицей A

$$x = A \xi, \quad \xi = A^{-1} x.$$

Построение гомоклинической траектории, соединяющей точки x'_u , x'_s будем осуществлять с помощью системы $\dot{\xi} = \mathbf{H}(\xi)$, вектор-функция \mathbf{H} в правой части которой задается равенствами

$$\begin{aligned}
H_1(\xi) &= -\omega(\xi_2 - \xi_2^0) - \beta(\xi_1 - \xi_1^0)((\xi_1 - \xi_1^0)^2 + (\xi_2 - \xi_2^0)^2)^{1/2} - \alpha/((\xi_1 - \xi_1^0)^2 + (\xi_2 - \xi_2^0)^2)^{1/2}, \\
H_2(\xi) &= \omega(\xi_1 - \xi_1^0) - \beta(\xi_2 - \xi_2^0)((\xi_1 - \xi_1^0)^2 + (\xi_2 - \xi_2^0)^2)^{1/2} - \alpha/((\xi_1 - \xi_1^0)^2 + (\xi_2 - \xi_2^0)^2)^{1/2}, \\
H_i(\xi) &= 0, \quad 3 \leq i \leq n.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$\xi_1^0 = (\varepsilon + 2\delta)/\cos\theta, \quad \cos 2\theta = (\Omega'_u, \Omega'_s), \quad \xi_2^0 = 0. \tag{8}$$

Эта система описывает движения, параллельные плоскости ξ_1, ξ_2 . В этой плоскости в полярных координатах

$$\rho = ((\xi_1 - \xi_1^0)^2 + (\xi_2 - \xi_2^0)^2)^{1/2}, \quad \varphi = \arctg((\xi_2 - \xi_2^0)/(\xi_1 - \xi_1^0))$$

с центром в (ξ_1^0, ξ_2^0) она имеет вид

$$\dot{\rho} = -\beta(\rho - \alpha), \quad \dot{\varphi} = \omega. \tag{9}$$

Гладкое сращивание векторных полей $\mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x})$ и $\mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})$ проведем следующим образом. Выберем число ζ так, чтобы конус $K_{\Omega_s^\zeta}$ лежал внутри $K_{\Omega_u}^{\zeta/4}$, а конус $K_{\Omega_u}^\zeta$ - внутри $K_{\Omega_s}^{\zeta/4}$. Для $\mathbf{x} \in S_{\varepsilon+2\delta} \cap K_{\Omega_s^\zeta}$ векторное поле совпадает с $-\Omega$, а для $\mathbf{x} \in S_{\varepsilon+2\delta} \cap K_{\Omega_u}^\zeta$ - с Ω . Поскольку конусы $K_{\Omega_s^\zeta}, K_{\Omega_u}^\zeta$ не пересекаются, то существует ν такое, что $K_{\Omega_0}^\nu \cap K_{\Omega_s^\zeta} = \emptyset, K_{\Omega_0}^\nu \cap K_{\Omega_u}^\zeta = \emptyset$. Обозначим разность $\xi_1^0 - \varepsilon - 2\delta$ через ν и определим правые части системы вне шара $W_{\varepsilon+2\delta}$ формулой

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x}) &= \eta_{\lambda/4}(\psi_0 - \psi(\mathbf{x}) + \lambda/2)\{\eta_{\nu/4}(\|\Omega - \Omega_0\| - \nu/2)[\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})(\eta_{\sigma/4}(\varphi(\mathbf{x}) - \\
&- (\pi/2 + \theta) + \sigma/2) + \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)) + (1 - \eta_{\sigma/4}(\varphi(\mathbf{x}) - \\
&- (\pi/2 + \theta) + \sigma/2))(1 - \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2))\mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})] + \\
&+ (1 - \eta_{\nu/4}(\|\Omega - \Omega_0\| - \nu/2))[\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})\eta_{\mu/4}(\varepsilon + \delta + \mu/2 - r) + \\
&+ \mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})(1 - \eta_{\mu/4}(\varepsilon + 2\delta + \mu/2 - r))]\} + \mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})(1 - \eta_{\lambda/4}(\psi_0 - \psi(\mathbf{x}) + \lambda/2)).
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $\psi_0 = 2(\varepsilon + 2\delta) + \nu$; $\psi(\mathbf{x}) = \|\xi(\mathbf{x}) - \xi^0\|$, $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0, 0, \dots, 0)^T$; $\mu = \xi^0 \cos\theta / \cos(\theta - \tau) - \varepsilon - 2\delta$, $\tau = 2\arccos(\nu/2)$; λ - произвольное положительное число. Согласно этому выражению вектор-функция $\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x})$ совпадает с $\mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})$ вне шара с радиусом $\psi_0 + 3\lambda/4$ и центром в точке $A^{-1}\xi^0$; первый член в фигурных скобках описывает переход от $\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})$ к $\mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})$ в областях III и IV (см. рисунок) вне конуса $K_{\Omega_0}^{3\nu/4}$, а второй - переход от $\mathbf{F}_1^\delta(\mathbf{x})$ к $\mathbf{A}\mathbf{H}(A^{-1}\mathbf{x})$ внутри $K_{\Omega_0}^{3\nu/4}$.

Покажем теперь, что для значений параметра ω из некоторого интервала величину σ можно выбрать так, чтобы траектория, выпущенная из \mathbf{x}'_u , пересекла гиперплоскость $\varphi = -(\pi/2 + \theta) + \sigma$, оставаясь внутри $K_{\Omega_u}^\zeta$. Для этого прежде всего оценим максимальное расстояние, на которое может уйти траектория из точки \mathbf{x}'_u за время t . Зафиксируем некоторое $\chi > 0$ и рассмотрим систему с правой частью (10) на множестве $K_{\Omega_u}^\zeta \cap D^\chi$, где

$$D^\chi = \{\mathbf{x} \in R^n \mid -(\pi/2 + \theta) < \varphi(\mathbf{x}) < -(\pi/2 + \theta) + \chi\}.$$

При $\sigma < \chi$ вектор-функция $\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x})$ на этом множестве имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x}) &= \Omega \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)) + \\ &+ (1 - \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)) \mathbf{A} \mathbf{H}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (11)$$

В силу непрерывности $\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x})$ в замыкании множества $K_{\Omega'_u \zeta} \cap D^\chi$, имеем

$$\|\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x})\| \leq 1 + M_2^u = L_2^u, \quad (12)$$

$$M_2^u = \max_{\mathbf{x} \in K_{\Omega'_u \zeta} \cap D^\chi} \|\mathbf{A} \mathbf{H}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{x})\|.$$

Пусть l_ζ - минимальное расстояние от \mathbf{x}'_u до точек границы конуса $K_{\Omega'_u \zeta}$. Тогда траектория, выпущенная из \mathbf{x}'_u , не выйдет из конуса $K_{\Omega'_u \zeta}$ в течение времени $t < l_\zeta / L_2^u$. Заметим, что для точек из $K_{\Omega'_u \zeta} \cap D^\chi$, принадлежащих плоскости векторов $\mathbf{x}'_s, \mathbf{x}'_u$, правая часть (11) лежит в $\mathcal{L}(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_s)$. Вследствие этого движение указанных точек под действием дифференциального потока $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x})$ будет плоским и его можно описать во введенных ранее полярных координатах ρ, φ . При этом

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= (\mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x}), \mathbf{e}_\varphi) / \rho = (\Omega, \mathbf{e}_\varphi) \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2) / \rho + \\ &+ \omega(1 - \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)), \end{aligned}$$

где \mathbf{e}_φ - орт полярной системы координат. Как легко видеть (см. рисунок), вектор \mathbf{e}_φ совпадает с Ω в точке \mathbf{x}'_u и, следовательно, при достаточно малых ζ и χ можно считать, что

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_u^{\sigma, \chi}} (\Omega, \mathbf{e}_\varphi(\mathbf{x})) > 1/2,$$

где $\mathcal{M}_u^{\sigma, \chi} = \mathcal{L}(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_s) \cap K_{\Omega'_u \zeta} \cap D^\chi$. Пусть

$$\rho_u = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}_u^{\sigma, \chi}} \rho(\mathbf{x}).$$

Тогда для всех $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_u^{\sigma, \chi}$ справедлива оценка

$$\dot{\varphi} > \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2) / (2\rho_u) + \omega(1 - \eta_{\sigma/4}(-\varphi(\mathbf{x}) - (\pi/2 + \theta) + \sigma/2)),$$

При $0 < \omega < 1/(2\rho_u)$ имеем

$$\dot{\varphi} > \omega,$$

откуда

$$-(\pi/2 + \theta) + \omega t < \varphi(\mathbf{x}(t)).$$

Если величина σ такова, что $\sigma < \omega l_\zeta / L_2^u$, то траектория, выпущенная из \mathbf{x}'_u , достигнет гиперплоскости $\varphi = -(\pi/2 + \theta) + \sigma$ за время $t < l_\zeta / L_2^u$, не выходя за пределы $K_{\Omega'_u \zeta}$. Аналогичные рассуждения можно провести и для окрестности точки \mathbf{x}'_s . Выбирая ω из интервала $(0, \min\{1/2\rho_u, 1/2\rho_s\})$ и $\sigma < \min\{\omega l_\zeta / L_2^u, \omega l_\zeta / L_2^s\}$, можно добиться того, чтобы траектории, проходящие через \mathbf{x}'_u и \mathbf{x}'_s , пересекали гиперплоскости $\varphi = -(\pi/2 + \theta) + \sigma$, $\varphi = (\pi/2 + \theta) - \sigma$ в точках, принадлежащих конусам $K_{\Omega'_u \zeta}$ и $K_{\Omega'_s \zeta}$. Будем полагать, что выбранное значение σ достаточно мало, так что выполняется неравенство $\sigma < \theta$.

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x}), & \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon + 2\delta, \\ \mathbf{F}_2^\sigma(\mathbf{x}), & \|\mathbf{x}\| > \varepsilon + 2\delta. \end{cases} \quad (13)$$

Для точек из множества $P_\sigma = \{\mathbf{x} \in R^n \mid -(\pi/2+\theta)+\sigma \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq (\pi/2+\theta)-\sigma\}$ правые части (10) совпадают с $\mathbf{A}\mathbf{H}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})$, поэтому для $\mathbf{x} \in P_\sigma \cap \mathcal{L}(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_s)$ система (13) сводится к системе (9), решение которой имеет вид

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \quad \rho = \alpha + (\rho_0 - \alpha)\exp(-\beta t) = \alpha + (\rho_0 - \alpha)\exp(-\beta(\varphi - \varphi_0)/\omega).$$

Определим величины ρ_{\min}, ρ_{\max} :

$$\rho_{\min} = \inf_{\substack{\mathbf{x} \in K_{\Omega'_s} \cap \mathcal{L}(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_s) \\ \varphi(\mathbf{x}) = (\pi/2+\theta) - \sigma}} \rho(\mathbf{x}), \quad \rho_{\max} = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in K_{\Omega'_s} \cap \mathcal{L}(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}'_s) \\ \varphi(\mathbf{x}) = (\pi/2+\theta) - \sigma}} \rho(\mathbf{x}).$$

Пусть траектории системы (13), выпущенные из точек \mathbf{x}'_u и \mathbf{x}'_s , пересекают гиперплоскости $\varphi(\mathbf{x}) = -(\pi/2+\theta)+\sigma$ и $\varphi(\mathbf{x}) = (\pi/2+\theta)-\sigma$ в точках \mathbf{x}''_u и \mathbf{x}''_s , соответственно. Обозначим $\rho_s = \rho(\mathbf{x}''_s)$, $\rho_u = \rho(\mathbf{x}''_u)$, $\Delta = \min\{|\rho_s - \rho_{\min}|, |\rho_s - \rho_{\max}|\}$. Значение ρ^* для образа точки \mathbf{x}''_u на гиперплоскости $\varphi(\mathbf{x}) = (\pi/2+\theta)-\sigma$ при отображении, определяемом (13), будет

$$\rho^*(\alpha, \beta) = \alpha + (\rho_u - \alpha)\exp(-\beta(\pi+2\theta-2\sigma)/\omega).$$

Покажем, что можно найти значения параметров α, β , для которых будет справедливо равенство

$$\rho^*(\alpha, \beta) = \rho_s. \quad (14)$$

Выберем значение β так, чтобы

$$2(\rho_{\max} - \rho_{\min}) \exp(-\beta\pi/\omega) < \Delta/4.$$

Тогда при $\alpha = \alpha_1 = \rho_s - \Delta/2$ имеем

$$\rho^*(\alpha_1, \beta) = \rho_s - \Delta/2 + (\rho_u - \rho_s + \Delta/2) \exp(-\beta(\pi+2\theta-2\sigma)/\omega) < \rho_s - \Delta/4.$$

В то же время подстановка $\alpha = \alpha_2 = \rho_s + \Delta/2$ в $\rho^*(\alpha, \beta)$ дает

$$\rho^*(\alpha_2, \beta) = \rho_s + \Delta/2 + (\rho_u - \rho_s - \Delta/2) \exp(-\beta(\pi+2\theta-2\sigma)/\omega) > \rho_s + \Delta/4.$$

Вследствие непрерывной зависимости ρ^* от параметра α найдется такое значение $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, для которого будет справедливо равенство (14), что и означает существование гомоклинической траектории для системы (13). Поскольку вектор-функция $\mathbf{G}_1^\delta(\mathbf{x})$ совпадает с $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ в шаре $\|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon$, то построенная система (13) решает поставленную задачу.

Предложенный метод построения динамических систем с гомоклинической траекторией справедлив и для более общего случая, когда положение равновесия исходной системы имеет хотя бы одну устойчивую и хотя бы одну неустойчивую траектории.

В заключение автор благодарит А.С. Зильберглейта и Е.В. Галактионова за полезные обсуждения и интерес к работе.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского Фонда
Фундаментальных Исследований по проекту 93-02-2611.

Библиографический список

1. *Wiggins S.* Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods (Applied mathematical science. Vol.73), Springer - Verlag: New York Inc. 1988, 494p.

2. *Бакалейников Л.А., Галактионов Е.В.* Существование гомоклинической траектории в модели связанной спиновой системы электронов и ядер в полупроводниках при условиях оптической ориентации // ЖТФ. 1994. Т. 64, вып.10. С. 8.

3. *Bakaleinikov L.A., Silbergleit A.S.* On the applicability of the approximate Poincare' mapping to the analysis of dynamics induced by ODE systems. I. Proximity of mappings // Physica D. 1995. Vol.83. P.326.

Физико-технический институт
им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт Петербург

Поступила в редакцию 27.12.94
после переработки 30.10.95

ON THE METHOD OF THE CONSTRUCTION OF THE DYNAMIC SYSTEM WITH THE HOMOCLINIC TRAJECTORY OF SADDLE EQUILIBRIUM POINT

L.A. Bakaleinikov

The task of the creation of the system that has the homoclinic trajectory and co-insides with the initial one in some vicinity of equilibrium point from the system with saddle point is solved in the paper. The way of the construction of the right parts of the modified system is given.



Бакалейников Леонид Александрович родился в Ленинграде (1951), окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (1973). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Физико-техническом институте им. А.Ф. Иоффе РАН (1985). В настоящее время работает старшим научным сотрудником ФТИ. Область научных интересов: линейная теория переноса, асимптотические методы, динамические системы, численное моделирование.