Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД», т.4, № 3, 1996 УДК 517.929

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ АВТОГЕНЕРАТОРОВ С РАЗЛИЧНЫМИ НЕЛИНЕЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ. Часть I

С.А. Кащенко

С помощью специального асимптотического метода большого параметра исследуются аттракторы различных типов автогенераторов, отличающихся нелинейным элементом с запаздыванием. Сформулированы условия существования и построены асимптотики устойчивых медленно осциллирующих релаксационных циклов и более сложных аттракторов при условии низкой добротности фильтра.

Введение

Одной из простейших базовых моделей автогенераторов с запаздывающими обратными связями является уравнение [1]

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \lambda F(x(t-T)). \qquad (1)$$

Модель другого типа автогенераторов основана на уравнении [2]

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \lambda\, dF(x(t-T))/dt. \qquad (2)$$

Уравнения (1),(2) использовались в работах [1-6]. Было выявлено много общих свойств и много отличий. В настоящей работе на базе асимптотических методов, развитых в работах [7-9], предпринята попытка дать сравнительный анализ динамических свойств как уравнений (1), (2), так и более сложных, но базирующихся на (1), (2), уравнений. Основное предположение, открывающее путь к использованию асимптотических методов, заключается в том, что параметр λ предполагается достаточно большим: $\lambda>>1$. Отметим, что это предположение осмыслено и с чисто физической точки зрения. В этой связи обратим внимание на работу [3], где с помощью вычислений на ЭВМ раскрыт термин «достаточно большое значение λ».

Относительно линейной части, то есть коэффициентов a и b, введем предположение

$$a>0, \quad b>0.$$

Нелинейная функция $F(x)$ предполагается гладкой, но главное предположение и в случае уравнения (1), и в случае уравнения (2) состоит в том, что эта нелинейность имеет простое поведение на бесконечности

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = f_1, \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = f_2.$$

Как оказывается, важным показателем, существенно влияющим на динамику, является показатель скорости стремления $F(x)$ к своим пределам при $x\to\pm\infty$. В настоящей работе считаем, что для некоторого $p>0$

$$F(x) = \begin{cases} f_1, & x < -p, \\ f(x), & |x| \le p, \\ f_2, & x > p, \end{cases} \tag{3}$$

а в третьей части рассмотрены случаи, когда стремление $F(x)$ к $f_{1,2}$ носит степенной или экспоненциальный характер.

Наиболее простые результаты рассмотрения динамики уравнений (1),(2) приведены в первой части. Здесь построены медленно колеблющиеся релаксационные периодические решения и приведены результаты анализа динамики при внешних периодических воздействиях. Во второй части ограничения на коэффициенты a и b таковы, что свойства нелинейных уравнений принципиально усложняются. Там построены наборы аттракторов в фазовых пространствах рассматриваемых уравнений и с помощью явно построенных отображений определена структура этих аттракторов.

Общий вывод состоит в том, что влияние нелинейности на динамику уравнений носит интегральный характер: важны лишь параметры, вычисляемые с помощью некоторых интегралов от нелинейностей.

Здесь же отметим, что отличительные свойства решений уравнений (1),(2) носят, как правило, не количественный, а качественный характер: не только структура аттрактора, но даже порядки амплитуд решений при $\lambda\to\infty$ оказываются существенно различными.

Отметим, что для уравнения (1) принципиально различаются случаи, когда $f_1=f_2=0$ и когда $f_{1,2}\neq 0$. Здесь остановимся только на случае $f_1=f_2=0$. Исследованию динамики при условии $f_{1,2}\neq 0$ будет посвящена отдельная публикация.

1. Основные утверждения

Рассмотрим линейное уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0.$$

Кроме положительности коэффициентов a и b основным предположением этого раздела является выполнение неравенства

$$a^2 \ge 4b, \tag{4}$$

которое означает, что корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения вещественны. Это неравенство является условием низкодобротного фильтра. Исследованию динамики в случае высокодобротного фильтра будет посвящена отдельная публикация. Пусть, для определенности,

$$\lambda_2 \le \lambda_1 < 0.$$

Относительно функции $F(x)$ для уравнения (2) предполагаем, что имеет место формула (3), а для уравнения (1) в формуле (3) имеем

$$f_1 = f_2 = 0. \tag{5}$$

Таким образом, правая часть и уравнениях (1) и (2) при $|x(t-T)| > p$ принимает нулевое значение.

Исследуем вопрос о поведении решений уравнений (1) и (2) при условии $\lambda>>1$.

Чтобы сформулировать основные утверждения этой части, введем несколько обозначений. Положим

$$\gamma_{\pm} = \int_0^T \exp(\lambda_1 s) F(\pm p \exp(\lambda_1 s))ds.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (4), (5), *и пусть* $\gamma_+>0$ ($\gamma_-<0$). *Тогда при достаточно больших* λ *уравнение* (1) *имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение* $x_0(t,\lambda)$ с *периодом* $T(\lambda)$, *причем* $T(\lambda)= =|\lambda_1|^{-1}(1+o(1))\ln(\lambda)$, *амплитуда имеет порядок* $O(\lambda)$ (*при* $\lambda\to\infty$) *и функция* $x_0(t,\lambda)$ *положительна* (*отрицательна*) *на асимптотически большом интервале* (*порядка* $\ln\lambda$) *из отрезка длины периода. Если же при условиях* (4), (5) *выполнены два неравенства* $\gamma_+<0$ и $\gamma_->0$, *то при достаточно больших* λ *уравнение* (1) *имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение* $x_0(t,\lambda)$ с *периодом* $T(\lambda)=2|\lambda_1|^{-1}(1+o(1))\ln(\lambda)$ *и с амплитудой порядка* $O(\lambda)$, *причем функция* $x_0(t,\lambda)$ *положительна на интервале порядка* $\ln\lambda$ *и отрицательна на интервале порядка* $\ln\lambda$ *из отрезка длины периода.*

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (4) и $\gamma_{\pm}\neq 0$. *Тогда при достаточно больших* λ *уравнение* (2) *имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение* $x_0(t,\lambda)$ с *периодом* $T(\lambda)=2|\lambda_1|^{-1}(1+o(1))\ln\lambda$ *и амплитудой порядка* $O(\lambda)$.

Детальная асимптотика $x_0(t,\lambda)$ в условиях теорем 1 и 2 будет построена в следующем разделе.

Из приведенных теорем следуют важные выводы. Во-первых, в качественном плане динамика уравнений (1) и (2) при больших λ и при условии (4) однотипна, и во-вторых, построенные аттракторы рассматриваемых уравнений имеют простейшую структуру. Отметим, что эти уравнения могут иметь и другие аттракторы, состоящие из решений конечной при $\lambda\to\infty$ амплитуды. Например, при условии $F(0)=F'(0)=0$ устойчивым при всех $\lambda>0$ является нулевое состояние равновесия. Отсюда, в частности, вытекает, что устойчивые режимы, переходящие в $x_0(t,\lambda)$ при $\lambda\to\infty$, могут возникать жестко при увеличении параметра λ. Еще один общий вывод для уравнений (1) и (2) такой: при условии (4) и при больших λ значение времени запаздывания существенной роли не играет. Правда, следует иметь в виду [3], что значения λ, при которых начинают «работать» теоремы 1 и 2, резко увеличиваются с ростом параметра T.

2. Доказательство теорем 1 и 2

В качестве фазового пространства уравнений (1) и (2) удобно выбрать прямое произведение пространства непрерывных на отрезке $[-T,0]$ функций $C_{[-T,0]}$ на числовую ось R^1. Через $S_{\pm}(\delta)$ обозначим подмножество пространства $C_{[-T,0]}$, определяемое формулой

$$S_{\pm}(\delta)=\{\phi(s)\in C_{[-T,0]}{}^1\colon \phi(0)=\pm p,\ |\phi(s)|\geq p,\ |\phi(s)\pm p\exp(\lambda_1 s|+|\dot\phi(s))\pm p\lambda_1\exp(\lambda_1 s)|\leq\delta\}.$$

Обозначим через $x(t+s,\phi)$ решение уравнения (1) или (2) с начальными условиями, заданными при $t=0$

$$x(s,\phi) = \phi(s) \ (s \in [-T,0])), \quad \dot{x}(0,\phi) = \dot{\phi}(0),$$

где $\phi(s) \in S_\pm(\delta)$. Параметр δ будем считать достаточно малым (но независимым от λ).

Рассмотрим вопрос об асимптотике $x(t,\phi)$ при $\lambda \to \infty$. Пусть сначала $t \in [0,T]$. Из (1) тогда получаем, что

$$x(t,\phi) = \pm p \exp(\lambda_1 t) + O(\delta).$$

При $t \in [T,2T]$ выражение для $x(t,\phi)$ имеет вид

$$x(t,\phi) = \pm p \exp(\lambda_1 t) + \lambda \int_T^t K(t-s) g(O(\delta) \pm p \exp(\lambda_1(s-T)))ds + O(\delta), \qquad (6)$$

где

$$K(t) = \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}[\exp(\lambda_1 t) - \exp(\lambda_2 t)], & \text{при } \lambda_1 > \lambda_2, \\ t\exp(\lambda_1 t), & \text{при } \lambda_1 = \lambda_2, \end{cases}$$

$$g(s) = \begin{cases} F(s) & \text{в случае уравнения (1)}, \\ dF(s)/ds & \text{в случае уравнения (2)}. \end{cases}$$

Из (6), в частности, вытекает равенство

$$\dot{x}(2T,\phi) = \lambda\alpha_\pm[1 + O(\lambda^{-1}) + O(\delta)],$$

$$\dot{x}(2T,\phi) = \lambda\beta_\pm[1 + O(\lambda^{-1}) + O(\delta)],$$

где

$$\alpha_\pm = \int_0^T K(T-s) g(\pm p \exp(\lambda_1 s))ds,$$

$$\beta_\pm = \int_0^T \dot{K}(T-s) g(\pm p \exp(\lambda_1 s))ds.$$

Ситуацию при $t > 2T$ рассмотрим отдельно для каждого из уравнений (1) и (2). В случае уравнения (1) для каждого фиксированного значения $m > 0$ на промежутке $[2T, 2T+m]$ изменения t имеют место формулы

$$x(t,\phi) = \lambda[c_1 \exp(\lambda_1(t-2T)) + c_2 \exp(\lambda_2(t-2T))] \quad (\text{при } \lambda_1 \neq \lambda_2), \qquad (7)$$

$$x(t,\phi) = \lambda[d_1(t-2T)\exp(\lambda_1(t-2T)) + d_2 \exp(\lambda_2(t-2T))] \ (\text{при } \lambda_1 = \lambda_2), \qquad (8)$$

в которых

$$c_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\gamma_\pm + O(\delta) + O(\lambda^{-1}), \quad d_1 = \gamma_\pm + O(\delta) + O(\lambda^{-1}).$$

Поскольку $\gamma_\pm \neq 0$ (в условиях теорем 1 и 2), то из (7) и (8) приходим к выводу о том, что в течение асимптотически большого (порядка $\ln \lambda$) отрезка времени решение $x(t,\phi)$ принимает асимптотически большие значения. Возможно, что при некоторых t из отрезка $[2T,2T+m]$ функция $x(t,\phi)$ принимает значения порядка 1. Это происходит, когда выражение, стоящее в квадратных скобках уравнения (7) или (8), обращается в нуль в некоторой точке. Тем не менее, нелинейность не внесет вклада в главный член асимптотического представления $x(t,\phi)$, поскольку значения порядка единицы принимаются на асимптотически малом отрезке времени при $\lambda \to \infty$.

В случае уравнения (2) формулы несколько сложнее. Введем еще несколько обозначений. Положим

$$\beta_\pm(t-T) = \int_0^{t-T} \dot{K}(t-T-s)[dF(\pm p\exp(\lambda_1 s))/ds]ds,$$

а через $\tau=\tau(\lambda)$ обозначим первый положительный корень уравнения $|\pm p\exp(\lambda_1 T)+ + \lambda\beta_\pm(\tau)|=p$. Отметим, что при $t\in[T,2T]$ равномерно верна формула

$$x(t,\lambda) = \pm p \exp(\lambda_1 t) + \lambda[\beta_\pm(t) + o(1)].$$

При $t=2T+\tau(\lambda)$ выражение для $x(2T+\tau(\lambda),\lambda)$ меняется «мало», то есть

$$x(2T + \tau(\lambda), \lambda) = \lambda\,\alpha_\pm[1+o(1)],$$

а для $\dot{x}(2T+\tau(\lambda),\lambda)$ имеем

$$\dot{x}(2T+\tau(\lambda),\lambda) = \lambda[\beta_\pm+f_\tau - F(\pm p\exp(\lambda_1 t)) + o(1)],$$

где

$$f_\tau = F(\pm p\exp(\lambda_1 t + \lambda\beta_\pm(t))) = \begin{cases} f_1, & \text{если } \beta_\pm>0, \\ f_2, & \text{если } \beta_\pm<0. \end{cases}$$

Далее, для каждого фиксированного $m>0$ при $t\in[2T+\tau(\lambda),2T+m]$ асимптотические формулы для $x(t,\lambda)$ легко получить, интегрируя «шагами». При этом за исключением нескольких промежутков (количество таковых при $t>3T$ не превышает двух) суммарной длины $O(\lambda^{-1})$ функция $x(t,\lambda)$ является решением линейного однородного уравнения второго порядка. Ясно, что найдется такое $m_0>2T$, что при $t>m_0$ решение $x(t,\lambda)$ знакопостоянно в течение асимптотически большого (порядка $O(\lambda)$) отрезка времени.

Следующие построения относятся одновременно к уравнению (1) и уравнению (2).

Обозначим через $t(\phi)$ первое (при $t>3T$) такое выражение, которое определяется условиями $|x(t,\phi)| = p$ или $t(\phi) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Из (7) или (8) тогда получим

$$t(\phi) = |\lambda_1|^{-1} \ln \lambda[1 + O((\ln\lambda)^{-1})],$$

что равномерно относительно $\phi(s) \in S_\pm(\delta)$. Введем в рассмотрение оператор последования П

$$\Pi(\phi(s)) = x(s + t(\phi),\phi).$$

Из приведенных выше построений вытекает, что в зависимости от выбора множеств $S_+(\delta)$ или $S_-(\delta)$ и от знаков γ_+ и γ_- выполнены включения $x(s+t(\phi),\phi)\in \in S_+(\delta)$ или $x(s+t(\phi),\phi)\in S_-(\delta)$. Тем самым, в условиях приведенных теорем либо $\Pi S_+(\delta)\subset S_+(\delta)$, либо $\Pi S_-(\delta)\subset S_-(\delta)$, $\Pi^2 S_+(\delta)\subset S_+(\delta)$ и $\Pi^2 S_-(\delta)\subset S_-(\delta)$. В силу свойств оператора П приходим к утверждению о существовании у него неподвижной точки $\phi_0(s)$. Тогда решение $x_0(t,\lambda) =x(t,\phi_0(s))$ будет периодическим с периодом либо $T(\lambda)=t(\phi_0)+t(\Pi(\phi_0))=2|\lambda_1|^{-1}(1+o(1))\ln\lambda$. Устойчивость $x_0(t,\lambda)$ обосновывается путем анализа асимптотики всех мультипликаторов линеаризованного на $x_0(t,\lambda)$ уравнения. Удается показать, что все мультипликаторы, кроме одного, единичного, стремятся по модулю к нулю при $\lambda\to\infty$. Соответствующие построения просты, но громоздки, поэтому на них не останавливаемся.

3. Медленно осциллирующие режимы в задачах с внешним периодическим воздействием

Рассмотрим вопрос о поведении решений уравнений

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \lambda F(x(t-T)) + \phi(t), \tag{9}$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \lambda\, dF(x(t-T))/dt + \phi(t) \tag{10}$$

при больших λ и при условии (4), которое необходимо для «медленных» осцилляций решений, то есть таких, у которых расстояние между некоторыми соседними экстремумами существенно больше времени запаздывания. Здесь $\phi(t)$ - ω-периодическая функция, а $F(x)$ та же, что и в предыдущих разделах. Поскольку в качественном плане различия между динамикой (9) и (10) невелики, то остановимся только на анализе уравнения (9). Пусть $v(t)$ - периодическое решение уравнения

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = \phi(t),$$

то есть $v(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t-s)\phi(s)ds$.

Множества типа $S_{\pm}(\delta)$ начальных условий для уравнений (9) вводятся из тех же соображений, что и выше, однако, в силу неавтономности рассматриваемых уравнений, становится важным, в какой конкретный момент времени задаются начальные функции. В связи с этим фиксируем произвольно значение $\tau\in[0,\omega)$ и рассмотрим множества

$$S_{\pm}(\tau,\delta) = \{\phi(s) \in C_{[\tau-T,\tau]}{}^1,\ \phi(\tau) = \pm p,\ |\phi(s+\tau)| \geq p,$$

$$|\phi(s) - v(s) - zp\exp(\lambda_1(s-\tau))| + |\dot{\phi}(s) - \dot{v}(s) - zp\lambda_1\exp(\lambda_1(s-\tau))| \leq \delta\},$$

где значение $z=z(\tau)$ определяется, соответственно, из равенств

$$v(t) + zp = \pm p.$$

Кроме этого необходимо наложить условие

$$|v(s) + zp\exp(\lambda_1(s-\tau))| \geq p, \quad \text{при} \quad s \in [-T+\tau,\tau].$$

Тогда при $t \in [\tau,T+\tau]$ имеем равенство

$$x(t,\phi) = v(t) + zp\exp(\lambda_1(t-\tau)) + O(\delta),$$

а при $t \in [\tau+T,\tau+2T]$ для $x(t,\phi)$ верна формула

$$x(t,\phi) = \lambda[\Delta(t,\tau) + O(\delta) + O(\lambda^{-1})],$$

в которой

$$\Delta(t,\tau)=\int_{t+\tau}^{t} K(t-s)F(v(s-T) + zp\exp(\lambda_1(s-T-\tau)))ds.$$

Для значений t из промежутка $[\tau+2T,\tau+2T+m]$ для каждого фиксированного m имеем при $\lambda_1\neq\lambda_2$

$$x(t,\phi) = \lambda[C_1\exp(\lambda_1(t-2T-\tau)) + C_2\exp(\lambda_2(t-2T-\tau)) + O(\delta) + O(\lambda^{-1})],$$

а при $\lambda_1=\lambda_2$

$$x(t,\phi) = \lambda exp(\lambda_1(t-2T-\tau))[C_1(t-2T-\tau) + C_2 + O(\delta) + O(\lambda^{-1})],$$

где

$$C_1 = C_1(\tau) = \int_0^T \exp(\lambda_1(T-s))F(v(s+\tau) + zp\exp(\lambda_1 s))\,ds.$$

Для первого корня $t(\phi,\tau)$ уравнения $|x(t,\phi)|=p$ при $t>2T+\tau+m$ по-прежнему равномерно верно по $\phi(s)\in S_{\pm}(\tau,\delta)$ и τ равенство $t(\phi,\tau)=|\lambda_1|^{-1}\ln(\lambda)[1+o(1)]$, а при $t\in[t(\phi,\tau)-T,t(\phi,\tau)]$ асимптотическая формула для $x(t,\phi)$ имеет вид

$$x(t,\phi) = v(t) + \bar{z}p\exp(\lambda_1(t- t(\phi,\tau))) + o(1), \qquad (11)$$

где $\bar{z}=\pm1\text{-}v(t(\phi,\tau))p^{-1}$. Положим в (11) $t=t(\phi,\tau)+s$. Фиксируем произвольно значение $\theta\in[0,\omega)$ и рассмотрим последовательность $\lambda_n\to\infty$ $(n\to\infty)$, где

$$\lambda_n = \exp|\lambda_1|\,(n\omega + \theta).$$

Тем самым при $\lambda=\lambda_n$ имеем равенство $t(\phi,\tau)=n\omega+\xi$, а величина $\xi=\xi(\tau,\theta)$ с точностью до $o(1)$ (при $n\to\infty$) определяется из уравнения

$$v(\theta+\xi) + c_1(\tau)\exp(\lambda_1\xi) = \pm p.$$

В итоге для каждого $\tau\in[0,\omega)$ и $\lambda=\lambda_n$ $(n\to\infty)$ приходим к соотношению

$$\Pi(\phi(s)) = x(s+t(\phi,\tau),\phi) \in S_\pm(\bar{\tau},\delta),$$

а значение $\bar{\tau}$ с точностью до $o(1)$ (при $n\to\infty$) задается одномерным отображением

$$\bar{\tau} = (\theta + \xi(\tau,\theta)) \bmod \omega. \qquad (12)$$

Из самой конструкции множеств $S_\pm(\tau,\delta)$ ясно, что динамика отображения (12) определяет динамику аттракторов в исходных уравнениях (9) при $\lambda_n\to\infty$. Таким образом имеет место

Теорема 3. *Пусть отображение* (12) *имеет грубую к-периодическую траекторию* $\tau_1,...\tau_k$, $\tau_1,...$. *Тогда при достаточно больших n и при* $\lambda=\lambda_n$ *рассматриваемое уравнение* (9) *имеет периодическое решение* $x_k(t,\phi_k)$ *той же, что и траектория* $\tau_1,\tau_2,...$ *устойчивости, причем на некотором отрезке длины T верно включение* $x_k(t,\phi_k)\in S_\pm(\tau_1,\delta)$.

Приведенные выше формулы раскрывают асимптотику $x_k(t,\phi_k)$ при $\lambda_n\to\infty$.

Заметим, что динамические свойства отображения (12) при различных θ могут отличаться. Это говорит о том, что при $\lambda\to\infty$ может происходить неограниченный процесс «рождения» и «гибели» установившихся режимов уравнения (9) или (10).

Приведенные в этом разделе результаты рассмотрения неравенства (4) легко обобщаются на более сложные уравнения. Например, вместо нелинейной функции $F(x(t-\tau))$ в (1) или (2) может стоять сумма

$$\Sigma_{j=1}^{k} F_j(x(t- T_j)) \quad \text{или} \quad \Sigma_{j=1}^{k} F_j(x(t- T_j)).$$

Здесь для каждой из $F_j(x)$ предполагается выполненным равенство типа (3), причем в случае уравнения (1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F_j(x) = 0$.

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиотехнике. М.: Наука, 1989.

2. *Рождественский В.В., Стручков И.Н.* Переходный хаос в автогенераторах стохастических колебаний с жестким возбуждением и четной нелинейностью // ЖТФ. 1992. Т. 62, № 10.

3. *Дмитриев А.С., Кащенко С.А.* Динамика генератора с запаздывающей обратной связью и низкодобротным фильтром второго порядка // Радиотехника и электроника. 1989. № 12. С. 24.

4. *Дмитриев А.С., Кащенко С.А.* Асимтотика нерегулярных колебаний в модели автогенератора с запаздывающей обратной связью // Докл. РАН. 1993. Т. 328, № 2. С. 174.

5. *Стручков И.Н.* Переходный хаос в апериодическом осцилляторе с запаздыванием // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38, № 1.

6. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос // М.: Наука, 1989.

7. *Кащенко С.А.* Пространственно неоднородные структуры в простейших моделях с запаздыванием и диффузией // Матем.моделирование. 1990. Т. 2, № 9. С. 29.

8. *Кащенко С.А.* Асимптотический анализ динамики системы из двух связанных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Изв.вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 3. С. 307.

9. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А.* Асимптотическое исследование явлений мультистабильности в моделях лазера с оптоэлектронной обратной связью // ДАН СССР. 1991. Т. 316, № 2. С. 327.

Ярославский государственный университет

Поступила в редакцию 21.06.95

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE AUTOGENERATORS DYNAMICS WITH DIFFERENT NON-LINEAR DELAY COUPLING

S.A. Kaschenko

The attractors of different types of autogenerators differing by the nonlinear element with delay are studied with the help of the special asymptotic method of a large parameter. It is formulated the conditions of existence and it is constructed the asymptotic behaviours of stable slowly oscillating relaxation cycles and of more complicated attractors under the condition of low quality of filter.

Кащенко Сергей Александрович - родился в 1953 году. Окончил Ярославский государственный университет. В 1990 году защитил докторскую диссертацию (МГУ). С 1991 года - профессор, зав.кафедрой математического моделирования ЯрГУ. Область научных интересов - асимптотические методы исследования сложной динамики систем с запаздыванием, систем параболического и гиперболического типов.