Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД», т.4, № 3, 1996 УДК 531.36:534.1

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ФЕРХЮЛЬСТА

О.В. Музычук

Найдены стационарные вероятностные характеристики решения уравнения Ферхюльста с флуктуирующими параметрами. Рассмотрен ряд моделей таких флуктуаций, допускающих точные аналитические решения или представления таковых с помощью цепных дробей. Получены вероятностные характеристики как основной динамической переменной N, имеющей смысл численности популяции, так и обратной ей $S=1/N$, которую можно трактовать как нормированную площадь, приходящуюся на одну особь. Отмечено, что для этой величины удается осуществить более подробное стохастическое описание.

1. Рассмотрим хорошо известное в экологических и других приложениях [1-3] уравнение Ферхюльста с флуктуирующими параметрами

$$N' = a(1+\xi(t))N - b(1+\eta(t))N^2, \tag{1.1}$$

где выражения, стоящие при N и N^2, имеют смысл трофического коэффициента и коэффициента внутривидовой конкуренции, которые полагаем флуктуирующими. Ниже рассмотрим несколько моделей случайных процессов ξ и η, допускающих в той или иной форме точное стохастическое описание решения уравнения (1.1).

Запишем (1.1) в виде

$$TN' =(1+\xi(t))N - \gamma(1 + \eta(t))N^2, \tag{1.2}$$

где $T=1/a$ - время установления стационарной численности $N^*=1/\gamma$, $\gamma=bT$. Введем также переменную $S=1/N$, для которой, как легко видеть, исходное стохастическое уравнение станет линейным

$$TS' + (1+\xi(t))S = \gamma(1 + \eta(t)). \tag{1.3}$$

В качестве первой модели рассмотрим гауссовы дельта-коррелированные флуктуации параметров системы

$$\langle\alpha(t)\rangle = 0,\ \langle\alpha(t)\alpha(t-\tau)\rangle = 2D_\alpha\delta(\tau),\ \alpha = \xi, \eta,$$

где $\delta(\tau)$ - дельта-функция (здесь и ниже $\langle...\rangle$ - статистическое усреднение). Такая модель позволяет использовать аппарат марковских (диффузионных) процессов и ряд аналитических результатов для нее хорошо известен [2-4].

Для среднего значения произвольной дифференцируемой функции $\psi(N)$ стандартными методами [5,6] можно записать кинетическое уравнение

$$Td\langle\psi\rangle/dt = \langle(N-\gamma N^2)d\psi/dN\rangle + D_1\langle(Nd/dN)^2\psi\rangle + \gamma^2 D_2\langle(N^2\, d/dN)^2\psi\rangle, \qquad (1.4)$$

здесь $D_1=aD_\xi$, $D_2=aD_\eta$ - нормированные спектральные мощности соответствующих флуктуаций. Аналогичное уравнение для переменной S имеет вид

$$Td\langle\psi\rangle/dt = \langle(\gamma-S)d\psi/dS\rangle + D_1\langle(Sd/dS)^2\psi\rangle + \gamma^2 D_2\langle d^2\psi/dS^2\rangle \qquad (1.5)$$

От (1.4), (1.5) можно перейти к уравнениям Фоккера - Планка для плотностей вероятности, но иногда удобнее непосредственное использование уравнений (1.4), (1.5).

Положив в (1.5) $\psi(S)=S^m$, легко найти рекуррентные соотношения между стационарными значениями S-моментов

$$(1-mD_1)\langle S^m\rangle = \gamma\langle S^{m-1}\rangle + \gamma^2 D_2(m-1)\langle S^{m-2}\rangle,\ m = 1,2\ldots, \qquad (1.6)$$

а положив здесь $m=-n$, - перейти к соответствующим N-моментам

$$(1+nD_1)\langle N^n\rangle = \gamma\langle N^{n+1}\rangle - \gamma^2 D_2(n+1)\langle N^{n+2}\rangle. \qquad (1.7)$$

Заметим, что первые существуют только при условии $D_1<1/m$ (неустойчивость высших моментов линейных систем с белыми флуктуациями параметров хорошо известна [5]). В частности, для среднего значения и дисперсии из (1.6) следуют выражения

$$\langle S\rangle = \gamma/(1-D_1),\quad \sigma_S^2 = \langle S\rangle^2[D_1+D_2(1-D_1)^2]/(1-2D_1). \qquad (1.8)$$

Видно, что флуктуации трофического коэффициента ξ приводят к росту средней площади и ее дисперсии, причем последняя увеличивается с ростом D_1 быстрее.

Из (1.7) следует, что стационарные моменты численности существуют только в отсутствие флуктуаций η (см.ниже). Если же $D_2=0$, то из (1.7) находим

$$\langle N\rangle=\gamma^{-1},\ \langle N^{n+1}\rangle = \gamma^{-1}(1+nD_1)\langle N^n\rangle,\ \sigma_N^2 = D_1\langle N\rangle^2. \qquad (1.9)$$

Заметим, что стационарное значение средней численности не зависит от вида флуктуаций ξ и совпадает с «невозмущенной» величиной N^*.

Для случая дельта-коррелированных флуктуаций параметров нетрудно найти и стационарные плотности вероятности. Для стохастического уравнения общего вида

$$Tx' = f(x) + g_1(x)\xi(t) + g_2(x)\eta(t) \qquad (1.10)$$

стационарное распределение (если оно существует) таково:

$$W_x(x) = C/(G(x))^{1/2}\exp(\textstyle\int f(x)/G(x)\,dx),\quad G(x) = D_1 g_1^2 + D_2 g_2^2. \qquad (1.11)$$

В частности, в отсутствие флуктуаций η для распределения численности из (1.11) имеем

$$W_N(N) = CN^{(\varepsilon-1)}\exp(-\gamma\varepsilon N),\quad C = (\varepsilon\gamma)^\varepsilon\Gamma^{-1}(\varepsilon),\ \varepsilon = D_1^{-1}, \qquad (1.12)$$

здесь Γ - гамма-функция. Соответствующее S-распределение находится из (1.12) заменой переменной. При наличии флуктуаций η, как следует из (1.11), N-распределение имеет медленно спадающие «крылья» и стационарные моменты численности не существуют. В частности, если $\xi=0$, распределение имеет вид

$$W_N(N) = [(2\pi D_2)^{1/2}\gamma N^2]^{-1}\exp[-(N^{-1}+\gamma^2)/(2\gamma^2 D_2)]. \qquad (1.13)$$

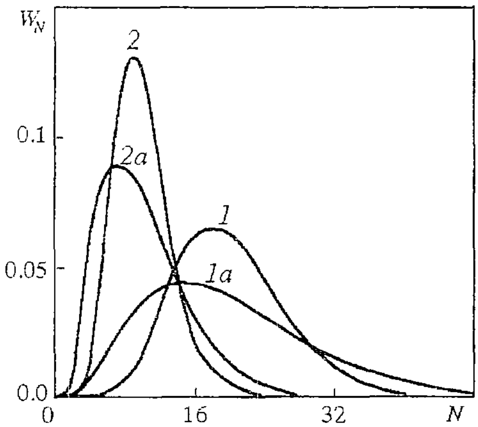

Рис. 1

Отметим, что S-распределение свободно от указанного «недостатка»; в частности, при ξ=0 оно будет гауссовым со средним значением и дисперсией, следующими из (1.8)

$$\langle S\rangle = \gamma, \quad \sigma_S^2 = D_2\langle S\rangle^2. \qquad (1.14)$$

На рис. 1 приведены вероятностные распределения (1.12) для различных величин γ и D_1; кривые *1, 2* - для значений D_1=0.1, γ=0.05 и γ=0.1, соответственно; кривые *1a, 2a* - для D_1=0.25 при тех же значениях γ.

В силу линейности стохастического уравнения (1.3) для белых флуктуаций параметров нетрудно найти и стационарный вид ковариационной функции

$$B_S(\tau) = \langle S(t)S(t-\tau)\rangle - \langle S(t)\rangle^2, \quad t >> T,$$
$$B_S(\tau) = \sigma_S^2 \exp(-\tau/T_1), \; T_1 = T(1-D_1)^{-1}, \qquad (1.15)$$

где дисперсия определяется выражением (1.8). Таким образом, S-флуктуации имеют лоренцев спектр с шириной $1/T_1$, зависящей от интенсивности шума ξ. Наличие флуктуаций η не влияет на вид спектра, от них зависит лишь величина дисперсии.

2. Рассмотрим теперь иные модели флуктуаций параметров, допускающие точные решения для вероятностных характеристик системы. Заметим, что в реальной ситуации время корреляции флуктуаций, связанных, например, с сезонными изменениями среды обитания, может быть порядка времени жизни особи и аппроксимация их дельта-коррелированными флуктуациями вряд ли оправдана.

Для случая квазистатических ($\tau_{кор}>>T$) флуктуаций параметров вероятностные распределения легко находятся из уравнений (1.2), (1.3) при d/dt=0. Так, в отсутствие флуктуаций η получим

$$W_N(N) = \gamma W_\xi(\gamma N-1), \qquad (2.1)$$

где $W_\xi(x)$ - вероятностное распределение флуктуаций ξ. В частности, если последнее является гауссовым, то

$$W_N(N) = 1/[(2\pi)^{1/2}\sigma_N] \exp[-(N-\langle N\rangle)^2/(2\sigma_N^2)]. \qquad (2.1a)$$

Отметим, что среднее значение и дисперсия не зависят от вероятностного распределения ξ и определяются выражениями

$$\langle N\rangle = \gamma^{-1}, \quad \sigma_N^2 = d_1\langle N\rangle^2. \qquad (2.2)$$

Здесь и ниже $d_1=\langle\xi^2\rangle$, $d_2=\langle\eta^2\rangle$. Соответствующие S-характеристики таковы:

$$\langle S\rangle = \gamma(1-d_1)^{-1}, \quad \sigma_S^2 = d_1\langle S\rangle^2. \qquad (2.2a)$$

При наличии одних лишь флуктуаций η аналогично находим

$$W_N(N) = (\gamma N^2)^{-1} W_\eta[(\gamma N)^{-1}-1]. \qquad (2.3)$$

Соответствующие (2.3) моменты могут быть получены лишь интегрированием, однако аналогичные S-характеристики элементарно находятся из (1.3)

$$\langle S\rangle = 0,\ \langle S^2\rangle = \gamma d_2,\ W_S(S) = \gamma^{-1}W_\eta(S/\gamma). \tag{2.4}$$

3. Рассмотрим теперь случай экспоненциально-коррелированных флуктуаций трофического коэффициента

$$B_\xi(\tau) = \langle\xi^2\rangle \exp(-\Pi|\tau|),\quad \Pi = \tau_{\text{кор}}^{-1}. \tag{3.1}$$

Такую функцию корреляции имеет, в частности, телеграфный процесс с пуассоновской статистикой перескоков и марковский гауссов шум. Для динамических систем со случайными воздействиями указанных типов также возможно получение некоторых точных вероятностных характеристик [6-8]. Для уравнения (1.10) с одним флуктуирующим параметром стационарное вероятностное распределение имеет вид

$$W_x(x) = C|g(x)|/F(x) \exp\left(\Pi\int f(x)/F(x)\, dx\right), \tag{3.2}$$

где

$$F(x) = dg^2(x) - f^2(x),\ g = g_1,\ d = \langle\xi^2\rangle.$$

В общем случае плотность вероятности (3.2) конечна и существует в области $F(x)>0$. Для телеграфных флуктуаций ξ результат (3.2) точен, а при гауссовом шуме он соответствует хорошо известному в теории стохастических уравнений приближению Бурре.

На основании (3.2) для S-распределения находим

$$W_S(S) = CS|(\sigma+1)S-\gamma|^{\beta_1-1}\,|(\sigma-1)S+\gamma|^{\beta_2-1}, \tag{3.3}$$

где

$$\sigma = d^{1/2},\ \beta_{1,2} = (2\tau(1\pm\sigma))^{-1},\ \tau = \tau_{\text{кор}}/T.$$

Распределение (3.3) существует в области

$$\begin{aligned} &\gamma(1+\sigma)^{-1} < S < \gamma(1-\sigma)^{-1}, \quad \sigma<1,\\ &\gamma(1+\sigma)^{-1} < S < \infty, \quad \sigma>1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Соответствующее (3.3) вероятностное распределение численности находится заменой переменной

$$W_N(N) = N^{-2}W_S(1/N). \tag{3.5}$$

Заметим, что выполнив предельный переход

$$d\to\infty,\ \tau\to 0,\ d\tau = D = \text{const},$$

придем от (3.3), (3.5) к соответствующим результатам первого раздела для белого шума.

Зависимость плотности вероятности (3.3) от дисперсии и относительного времени корреляции флуктуаций приведена на рис.2. Кривые *1*, *2*, *3* построены для d=0.5, τ=0.1, 0.25, 2, соответственно; кривая *3а* - для d=0.25, τ=2. Отметим, что особенности, появляющиеся на границах области существования при достаточно медленных флуктуациях, обусловлены дискретностью вероятностного распределения телеграфного процесса ξ. Численное интегрирование подобных распределений для расчета моментов не слишком удобно.

Искомые S-моменты можно получить и непосредственно (для телеграфного процесса ξ справедливо следующее размыкание совместных корреляций: $\langle\xi^2\psi[\xi]\rangle$ =

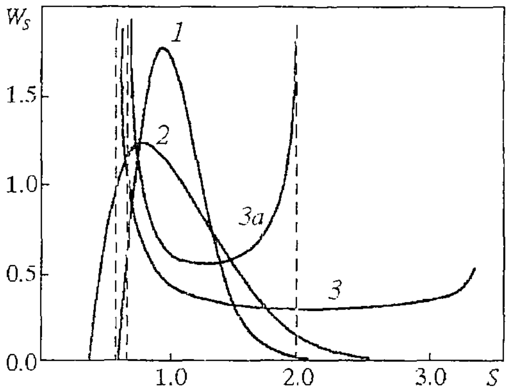

Рис. 2

$= \langle\xi^2\rangle\langle\psi\rangle$, где $\psi[\xi]$ - произвольный функционал от ξ). Система уравнений, описывающая релаксацию моментов, имеет вид

$$T\langle S^n\rangle' + \langle S^n\rangle + \langle\xi S^n\rangle = \gamma\langle S^{n-1}\rangle, \tag{3.6}$$

$$T\langle\xi S^n\rangle' + (n+\tau^{-1})\langle\xi S^n\rangle = \gamma n\langle\xi S^{n-1}\rangle - nd\langle S^n\rangle.$$

Для стационарных значений из (3.6) находим

$$\langle S\rangle = \gamma[1 - D(1+\tau)^{-1}]^{-1}, \tag{3.7}$$

$$\langle S^2\rangle = \gamma[(1+4\tau)\langle S\rangle - 2\gamma\tau](1 + 2\tau - 2D)^{-1},$$

где величина $D=d\tau$ имеет тот же смысл, что и в первом разделе. Легко видеть, что из формул (3.7) соответствующими предельными переходами получаются как белошумовые, так и квазистатические результаты, приведенные выше.

Для гауссова процесса ξ с функцией корреляции (3.1) можно получить точные результаты для стационарных S-моментов, используя процедуру матричных цепных дробей [8,9]. Строится цепочка уравнений «трехчленного взаимодействия» для двумерных векторов

$$\mathbf{X}_1 = (\langle S\rangle;\langle S^2\rangle), \quad \mathbf{X}_n = (\langle\xi^{[n-1]},S\rangle;\langle\xi^{[n-1]},S^2\rangle), \quad n = 1,2 \ldots$$

(здесь $\langle\xi^{[m]},x\rangle$ - совместный кумулянт соответствующих случайных процессов), решение которой представимо матричной цепной дробью.

Как показывает численный анализ (см.также [9]), процедура оказывается сходящейся для отыскания $\langle S\rangle$ при $D<1$, а для $\langle S^2\rangle$ - при $D<1/2$; то есть область сходимости совпадает с областью существования соответствующих моментов и не зависит от времени корреляции флуктуаций (от τ зависит скорость сходимости).

На рис. 3 приведена зависимость нормированного на γ среднего значения $\langle S\rangle$ и стандартного отклонения σ_S/γ от времени корреляции флуктуаций при фиксированном значении D. Кривые *1-4* соответствуют телеграфным флуктуациям ξ: *1,2* - $\langle S\rangle$ при D=0.25 и 0.45, соответственно; 3,4 - σ_S/γ при тех же значениях D. Кривые *3a,4a* - σ_S/γ для гауссова шума ξ при тех же значениях величины D, кружки - $\langle S\rangle$ для гауссова шума. Отметим, что заметное различие результатов для телеграфных и гауссовых процессов наблюдается лишь вблизи границы среднеквадратичной устойчивости системы (кривые *4,4a*).

На рис. 4 показана зависимость этих же характеристик от τ при фиксированной мощности флуктуаций d. Отметим прежде всего, что теперь они увеличиваются с ростом τ, что свидетельствует о более сильном отрицательном влиянии на популяцию «цветного» шума ξ (с ростом времени корреляции теперь увеличивается спектральная плотность медленных флуктуаций, оказывающих наибольшее дестабилизирующее действие). Здесь кривые *1,2* - зависимость $\langle S\rangle$ от τ для значений d=0.25,0.5, соответственно; *3,4* - σ_S/γ для тех же значений d. Кривые *1-4* соответствуют телеграфным флуктуациям параметра, *1a-4a* - гауссовым. Различие результатов для телеграфных и гауссовых флуктуаций при больших τ теперь является весьма существенным, причем последние оказывают большее дестабилизирующее влияние на популяцию.

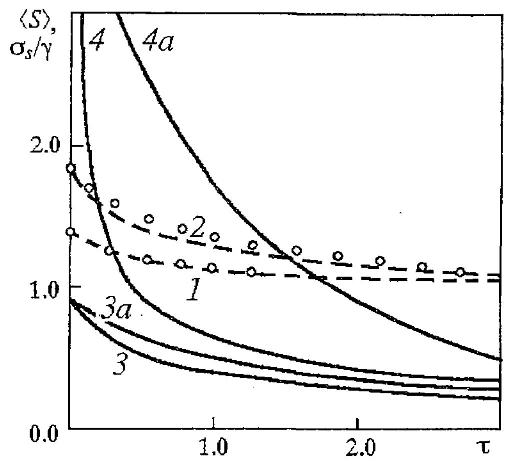

Рис. 3

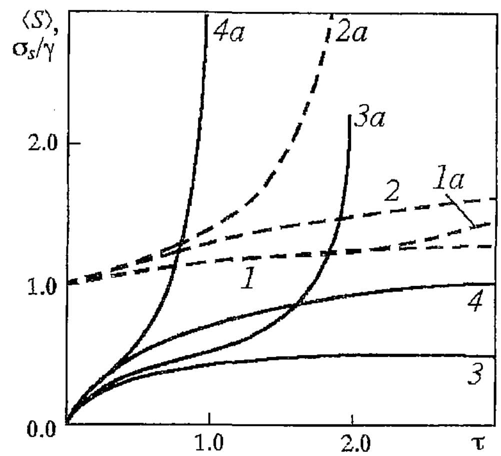

Рис. 4

Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант 95-0-8.3-36).

Библиографический список

1. *Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
2. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
3. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированный шумом переход: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987.
4. *Диментберг М.Ф.* Точные решения уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова для некоторых многомерных динамических систем // ПММ. 1983. Т.47, вып.4. С.555.
5. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
6. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
7. *Малахов А.Н., Музычук О.В.* Вероятностные характеристики динамических систем, подверженных воздействию не дельта-коррелированных случайных сил // Изв.вузов. Радиофизика. 1980. Т.23, № 8. С.968.
8. *Мишанина М.Г., Музычук О.В.* К анализу нелинейных динамических систем, возбуждаемых интенсивным небелым шумом // ПММ. 1992. Т.56, вып.6. С. 1039.
9. *Мишанина М.Г., Музычук О.В.* Влияние интенсивных амплитудных флуктуаций накачки на шумовые характеристики одноконтурного параметрического делителя частоты // Изв.вузов. Радиофизика. 1993. Т.36, № 1. С. 65.

Нижегородский архитектурно- строительный институт

Поступила в редакцию 3.07.95

SOME EXACT RESULTS FOR PROBABILITY CHARACTERISTICS OF FERHULST STOCHASTIC EQUATION

O.V. Muzychuk

Main stochastic characteristics of one-dimentional Ferhulst equation with parameters fluctuations are inverstigated. Some models of fluctuations which reduce to

exact results for stationary probability characteristics are studied: Gaussian delta-correlated noise, quasy-static fluctuations, Markoff Gaussian and «telegraph» processes. The probability descriptions are treated both for populations number N and for the inverted quantity $1/N$ which may be interpreted as normalized unit square. The influence of the intensity, correlation scale and probability distribution of system parameters fluctuations for population stochastic characteristics are inverstigated.

Музычук Олег Владимирович - родился в городе Ярцево Смоленской области (1947). Окончил радиофизический факультет Горьковского университета (1970). После окончания работал на кафедре статистической радиофизики ГГУ, там же защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1978) в области исследования динамических систем с флуктуирующими параметрами. С 1978 года работает на кафедре физики Нижегородского архитектурно-строительного института. Автор примерно 40 статей в центральных журналах. Круг интересов - стохастические системы с интенсивными не дельта-коррелированными случайными силами.