Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД», т.4, № 3, 1996 УДК 538.56:519.25

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТОХАСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ФЕРХЮЛЬСТА

О.В. Музычук

Рассмотрено хорошо известное в ряде приложений [1-4] уравнение Ферхюльста со случайно изменяющимися параметрами. Стохастические характеристики его решения можно найти на основании уравнения Фоккера - Планка для вероятностного распределения. Однако, во-первых, для этого флуктуации параметров должны быть дельта-коррелированными, а во-вторых, аналитически находится только стационарная плотность вероятности. Показано, что для обратных моментов решения уравнения Ферхюльста можно осуществить и более подробное описание, рассмотрев процесс их релаксации, не накладывая в общем случае ограничений на времена корреляции случайных воздействий.

1. Рассмотрим стохастическое уравнение

$$N' = a(1+\xi(t))N - b(1+\eta(t))N^2 \qquad (1.1)$$

коэффициенты которого (следуем «экологической» терминологии) имеют следующий смысл: N - численность изолированной популяции; b - коэффициент внутривидовой конкуренции; ξ, η - флуктуации соответствующих параметров, связанные со случайными изменениями среды обитания.

Введем переменную $S=1/N$, представляющую собой нормированную «площадь», приходящуюся на одну особь. На основании (1.1) получим линейное уравнение для S

$$TS' + (1+\xi)S = \gamma(1+\eta), \qquad (1.2)$$

где $T=a^{-1}$ - время релаксации в отсутствие флуктуаций, $\gamma=ba^{-1}$. Случайная флуктуация, являющаяся решением (1.2), имеет вид

$$S(\theta) = S_0\exp(z(\theta) -\theta) + \gamma\int_0^\theta (1+\eta(\theta_1)) \exp[z(\theta- \theta_1) - \theta + \theta_1]\, d\theta_1, \qquad (1.3)$$

где $\theta=tT^{-1}$ - безразмерное время; $S_0=S(0)$; $z(\theta) = \int_0^\theta \xi(\theta_1)d\theta_1$.

Простейшие статистические характеристики процесса $S(\theta)$ можно найти непосредственным усреднением выражения (1.3) по заданным вероятностным распределениям флуктуирующих параметров. Если процесс ξ гауссов (точнее, гауссовым считаем процесс z, который будет таковым при достаточно быстрых флуктуациях ξ с любым вероятностным распределением), то усредняя (1.3), находим

$$\langle S(\theta)\rangle = S_0 \exp(F(\theta) - \theta) + \gamma\int_0^\theta (1 + B_{\xi\eta}(\theta_1))\exp(F(\theta - \theta_1) - \theta + \theta_1)d\theta_1, \qquad (1.4)$$

где

$$F(\theta) = \int_0^\theta (\theta - \theta_1)B_\xi(\theta_1)d\theta_1.$$

B_ξ, $B_{\xi\eta}$ корреляционная функция флуктуаций ξ и совместная корреляционная функция, соответственно. На основании (1.4) легко установить асимптотику поведения среднего значения при $t \gg \tau_\xi$ (здесь и ниже τ_ξ - время корреляции флуктуаций). В отсутствие корреляции между флуктуациями параметров имеем

$$\langle S(\theta)\rangle \simeq S_0\exp[(D_1 - 1)\theta] + \gamma\{1 - \exp[(D_1 - 1)\theta]\}/(1 - D_1), \quad D_1 = \int_0^\infty B_\xi(\theta_1)d\theta_1. \qquad (1.5)$$

Для случая экспоненциально-коррелированных флуктуаций

$$B_\xi(\tau) = \langle \xi^2\rangle \exp(-\Pi|\tau|), \qquad \Pi = \tau_\xi^{-1}, \qquad (1.6)$$

выражение (1.4) примет вид

$$\langle S(\theta)\rangle = \gamma\int_0^\theta \exp[(D_1 - 1)\theta_1 - \tau D_1(1 - \exp(-\theta_1/\tau))]d\theta_1. \qquad (1.7)$$

Здесь введены безразмерные параметры $\tau = \tau_\xi T^{-1}$, $D_1 = \langle\xi^2\rangle\tau$, характеризующие относительное время корреляции и «высоту» спектра мощности случайного воздействия; начальные условия считались, для краткости, нулевыми.

Для получения более общих нестационарных вероятностных характеристик решения ниже рассмотрим две модели флуктуирующих параметров: дельта-коррелированные либо экспоненциально-коррелированные случайные воздействия. Последние могут быть марковским гауссовым либо «телеграфным» процессом с пуассоновской статистикой перескоков.

2. Полагаем случайные воздействия мелкомасштабными и аппроксимируем соответствующие корреляции дельта-функциями

$$B_\xi(\theta) = 2D_1\delta(\theta), \quad B_\eta(\theta) = 2D_2\delta(\theta)$$

(здесь и ниже используем безразмерное время). Стандартным путем [5,6] нетрудно получить следующее уравнение для релаксации S-моментов или обратных моментов численности N:

$$n^{-1}\langle S^n\rangle' + (1 - nD_1)\langle S^n\rangle = \gamma(\langle S^{n-1}\rangle + \gamma(n-1)D_2\langle S^{n-2}\rangle), \qquad (2.1)$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Приведем также следующее отсюда уравнение для дисперсии

$$\begin{gathered}\sigma^2 = \langle S^2\rangle - \langle S\rangle^2,\\ (\sigma^2)' + 2(1 - 2D_1)\sigma^2 = 2D_1\langle S\rangle^2 + 2\gamma^2 D_2.\end{gathered} \qquad (2.2)$$

Для динамических начальных условий $\langle S(0)\rangle = S_0$, $\sigma(0) = 0$ на основании (2.1), (2.2) получим следующие выражения для основных статистических характеристик удельной площади:

$$\langle S(\theta)\rangle = \langle S\rangle_{st} + (S_0 - \langle S\rangle_{st})\exp[(D_1-1)\theta],$$

$$\sigma^2(\theta) = 2\int_0^{\theta}(\gamma^2 D_2 + D_1\langle S(\theta_1)\rangle^2)\exp[2(2D_1-1)(\theta-\theta_1)]d\theta_1 . \tag{2.3}$$

Соответствующие стационарные значения таковы:

$$\sigma_{st}^2 = (D_1\langle S\rangle_{st}^2 + \gamma^2 D_2)(1-2D_1)^{-1},$$

$$\langle S\rangle_{st} = \gamma(1-D_1)^{-1}, \quad D_1 < 1/2. \tag{2.4}$$

Заметим, что характерное время релаксации $T_R = T(1-D_1)^{-1}$ не зависит от флуктуаций η.

Зависимость этих величин от спектральной интенсивности флуктуаций (для простоты считаем $S_0=0$, $D_2=0$) показана на рис. 1. Сплошные линии - нормированное среднее значение, пунктир - стандартное отклонение для значений $D_1=0.1, 0.2, 0.4$, соответственно.

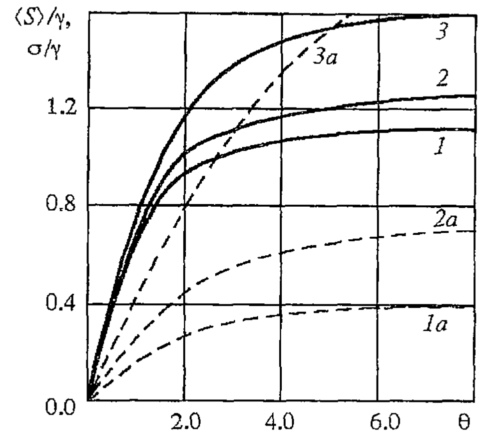

Рис. 1

3. Рассмотрим теперь флуктуации трофического коэффициента с функцией корреляции (1.6). Если считать их «телеграфным» случайным процессом, то результаты данного параграфа являются точными; для случая гауссовых флуктуаций они являются известным в теории стохастических систем приближением Бурре [6,7]. Разумеется, в предельном переходе к дельта-коррелированным флуктуациям параметра все результаты тождественны.

Обозначив для краткости

$$\langle S^n\rangle = x_n, \ \langle\xi S^n\rangle = y_n, \ \langle\xi^2\rangle = d,$$

стандартным путем придем к следующей замкнутой системе:

$$n^{-1}x'_n + x_n + y_n = \gamma x_{n-1},$$

$$y'_n + (n+\tau^{-1})y_n + ndx_n = n\gamma y_{n-1}, \quad n=1,2,\dots . \tag{3.1}$$

Выберем для простоты нулевые начальные условия $x_n(0)=0$ (это соответствует неограниченно большой начальной численности популяции $N(0)$, стабилизация наступает из-за внутривидовой конкуренции). Тогда решение системы (3.1) для первых двух моментов можно записать в виде

$$\langle S(\theta)\rangle = \langle S\rangle_{st} + c_1\exp(\lambda_1\theta) + c_2\exp(\lambda_2\theta),$$

$$\langle S^2\rangle = (\beta_1-\beta_2)^{-1}\int_0^{\theta}\{\exp[\beta_1(\theta-\theta_1)] - \exp[\beta_2(\theta-\theta_2)]\}f(\theta_1)d\theta_1, \tag{3.2}$$

где λ_1, λ_2; β_1, β_2 - корни соответствующих характеристических уравнений.

$$-\lambda_{1,2} = 1 + \nu \mp (\nu^2 + d)^{1/2}, \quad \nu = (2\tau)^{-1},$$

$$-\beta_{1,2} = 2 + \nu \mp (\nu^2 + 4d)^{1/2}, \quad c_1 = (\lambda_1-\lambda_2)^{-1}(\gamma + \lambda_2\langle S\rangle_{st}), \tag{3.3}$$

$$c_2 = c_1 + \langle S\rangle_{st}, \quad m_{1,2} = c_{1,2}(4 + 2\nu + 3\lambda_{1,2}),$$

$$f(\theta) = 2\gamma(m_1\exp(\lambda_1\theta) + m_2\exp(\lambda_2\theta) + 2(2 + \nu)\langle S\rangle_{st} - 2\gamma).$$

Входящие сюда стационарные значения моментов таковы:

$$\langle S\rangle_{st} = \gamma/(1-D_1(1+\tau)^{-1}), \quad \langle S^2\rangle_{st} = \gamma[(1+4\tau)\langle S\rangle_{st} - 2\gamma\tau]/[1-2(D_1-\tau)]. \tag{3.4}$$

Легко видеть, что при переходе к «белым» флуктуациям

$$\tau \to 0, \quad D_1 = \text{const},$$

результаты (3.2)-(3.4) переходят в полученные в разделе 1, а в противоположном предельном случае

$$\tau \to \infty, \quad d = \text{const}$$

соответствующие стационарные значения примут вид

$$\langle S\rangle_{st} = \gamma(1-d)^{-1}, \quad \langle S^2\rangle_{st} = \langle S\rangle_{st}^2(1+d). \tag{3.4a}$$

Для характеристики времени установления моментов можно принять значения

$$T_{R1} = T/\lambda_1, \quad T_{R2} = T/\beta_1, \tag{3.5}$$

соответственно. Заметим, что при фиксированной интенсивности флуктуаций (d=const) с ростом времени корреляции τ время релаксации моментов растет, а при фиксированной высоте спектра (D=const) - убывает (хотя достаточно слабо).

Полученные выше результаты иллюстрируются приведенными графиками. На рис.2 показана зависимость установления средней площади от относительного времени корреляции флуктуаций при d=0.45. Кривые *1- 3* соответствуют τ=2.5, 0.75, 0.25; кривые *1a- 3a* - точное решение (1.7). Видно, что в начале установления результаты для гауссовых и телеграфных флуктуаций параметра практически не отличаются. Заметная разница наблюдается лишь при весьма медленных случайных воздействиях (вблизи границы устойчивости системы в среднем).

На рис.3 приведены кривые для нормированного среднего и стандартного отклонения (пунктир), построенные на основании формул (3.2) при различных значениях интенсивности и времени корреляции параметрического воздействия. Кривые *1,2* - для d=0.5, τ=1 и τ=4, соответственно. Кривая *3* - для d=1, τ=1. Зависимости *1a- 3a* соответствуют тем же значениям параметров. Отметим, что

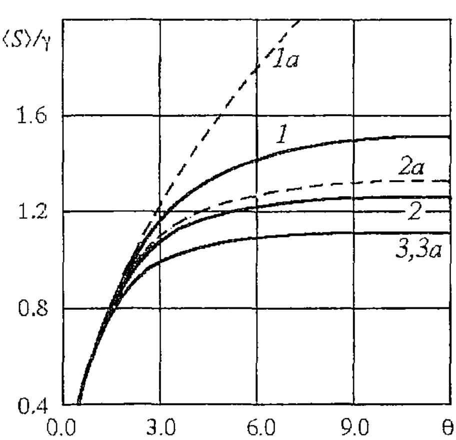

Рис. 2

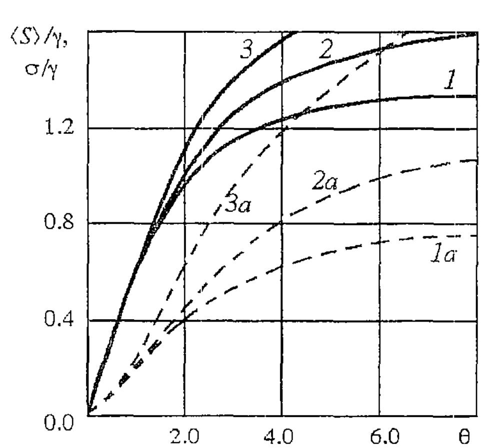

Рис. 3

Зависимости *1a- 3a* соответствуют тем же значениям параметров. Отметим, что интенсивности флуктуаций взяты, для наглядности, весьма большими. Видно, что с ростом d и τ средняя площадь и ее дисперсия растут, что свидетельствует об усилении дестабилизирующего воздействия флуктуаций параметра ξ на рассматриваемую систему.

4. Отметим в заключение возможность исследования установления моментов численности N непосредственно из исходного уравнения (1.1). В силу нелинейности последнего это можно делать лишь приближенными методами, хотя стационарные N-моменты (в случае дельта-коррелированных флуктуаций $\xi(t)$) находятся из уравнения Фоккера - Планка. Положив в (2.1) $n=-m$, придем к уравнению релаксации N-моментов

$$m^{-1}\langle N^m\rangle' = (1+mD_1)\langle N^m\rangle - \gamma(\langle N^{m+1}\rangle - \gamma(m+1)D_2\langle N^{m+2}\rangle). \tag{4.1}$$

Стационарные N-моменты существуют лишь в отсутствии флуктуаций $\eta(t)$, при этом

$$\langle N\rangle_{st} = \gamma^{-1},\ \langle N^{m+1}\rangle_{st} = (1+mD_1)\langle N\rangle_{st}\langle N^m\rangle_{st},\quad m = 1,2\dots . \tag{4.2}$$

Если воспользоваться этой рекуррентной формулой и для нестационарных значений, то уравнение (4.1) при $D_2=0$ станет замкнутым

$$m^{-1}\langle N^m\rangle' = (1+mD_1)(1-\gamma\langle N\rangle)\langle N^m\rangle. \tag{4.3}$$

В частности, для релаксации средней численности отсюда находим

$$\langle N(\theta)\rangle = \{\gamma+(N_0^{-1}-\gamma)\exp[-(1+D_1)\theta]\}^{-1}. \tag{4.4}$$

Заметим, что соответствующее время релаксации $T_R=T(1+D_1)^{-1}$ здесь уменьшается с ростом интенсивности параметрического воздействия.

Работа выполнена при поддержке Госкомитета РФ по высшему образованию (грант 95-0-8.3-36).

Библиографический список

1. *Свирежев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.

2. *Свирежев Ю.М.* Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.

3. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированный шумом переход: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987.

4. *Диментберг М.Ф.* Точные решения уравнения Фоккера - Планка - Колмогорова для некоторых многомерных динамических систем // ПММ. 1983. Т.47, вып.4. С.555.

5. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.

6. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.

7. *Малахов А.Н., Музычук О.В.* Вероятностные характеристики динамических систем, подверженных воздействию не дельта-коррелированных случайных сил// Изв.вузов. Радиофизика. 1980. Т.23, № 8. С.968.

Нижегородский архитектурно- строительный институт

Поступила в редакцию 3.07.95

NON - STATIONARY PROBABILITY CHARACTERISTICS OF FERHULST STOCHASTIC EQUATION

O.U. Muzychuk

Well-known in a series of applications Ferhulst equations with random parameters variations are considered. Non-stationary probability characteristics of the solution (in basis - the inverted moments of the population number N) are investigated. Closed linear equations for this moments have been obtained not only for delta-correlated parameters fluctuations. Exact solutions for relaxation of quantity $\langle S \rangle = \langle 1/N \rangle$ in the case of Markoff Gaussian parameters fluctuation are obtained as the solutions for mean-square characteristics for «telegraph» random influence. Dependence of these characteristics on parameters fluctuations intensity and correlation scale are inverstigated. The possibility of approximate finding of connected quantities for populations number moments is discussed.