

ЭФФЕКТИВНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ СПОСОБ ИЗУЧЕНИЯ ДИНАМИКИ ЦЕПОЧЕК СИЛЬНО РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Д.В. Волков, М.Н. Столяров, Е.И. Волков

Предложен способ численного изучения систем сильно релаксационных осцилляторов, связанных по медленной переменной, основанный на эффективной одномерности предельного цикла изолированного осциллятора. В предложенном способе применяется линеаризация зависимости $Y(Y)$, где Y - медленная переменная, для медленной области предельного цикла. Динамика быстрой переменной сводится к мгновенным скачкам с одной медленной части цикла на другую. Представленный метод расчета систем связанных осцилляторов позволяет при почти 30-кратном уменьшении времени счета получить все решения, возникающие в исходной системе дифференциальных уравнений, на которые не оказывает влияния динамика быстрой переменной. На примере трех связанных осцилляторов показано хорошее согласие с традиционным методом численного решения системы дифференциальных уравнений и найдены возможные типы вращающихся волн. Приводится обсуждение границ применимости способа, его достоинства и недостатки.

Введение

Нелинейные системы, демонстрирующие периодическую динамику, занимают важное место среди объектов, рассматриваемых в теории колебаний, в биологии, химии и радиофизике. В большинстве моделей химических и/или биохимических процессов автоколебания носят релаксационный характер [1,2]. В модели клеточного цикла, послужившей толчком к изучению релаксационных осцилляторов в данной работе, анализ схемы реакций перекисного окисления липидов в мембране клетки также привел к построению модели сильно релаксационного осциллятора. Подробное описание этой модели и достаточно большое количество других примеров моделей биологических объектов можно найти в [3]. Примеры химических осцилляторов, в том числе модели широко известной реакции Белоусова - Жаботинского, описаны в [4].

Можно выделить класс моделей, описывающих системы, состоящие из взаимодействующих осцилляторов. Одной из первых в этом направлении можно считать работу [5], в которой была предложена модель сердца как совокупности релаксационных осцилляторов. Множество искусственных устройств и многие системы в живых организмах имеют механизмы синхронизации своей внутренней активности с периодическими процессами, происходящими во внешней среде (например синхронизация циркадианного ритма человека с суточным циклом), и

друг с другом. Поэтому традиционной задачей является исследование условий, необходимых для синхронизации разночастотных осцилляторов друг с другом и под действием внешних периодических сил. Многие примеры синхронизации осцилляторов уже хорошо изучены и стали составляющей частью курсов *классической теории нелинейных колебаний* (см. например [6,7]).

Помимо отмеченного направления, в последнее время все больший интерес вызывает вопрос об изучении пространственно-временных структур в системах, состоящих из одинаковых или почти одинаковых осцилляторов [8].

Действительно, каким образом в системах, состоящих из почти одинаковых элементов, например, в колониях клеток, возникают достаточно сложные динамические явления? Прежде всего, целесообразно изучить решения, возникающие в системах со сравнительно небольшим количеством осцилляторов, поскольку закономерности, полученные для таких систем, могут оказаться полезными при изучении более сложных структур. В данной работе исследуются системы, состоящие из трех осцилляторов без существенного ограничения на величину связи.

Аналитические методы полезны при изучении синхронизации в гармоническом приближении и в приближении малой связи, в то время как реальные биологические и химические системы существенно релаксационны, и часто к ним не может быть применено приближение малой связи.

Прямой численный расчет системы дифференциальных уравнений можно эффективно реализовать для сравнительно небольших систем, но именно этот путь обеспечил построение более или менее подробной картины решений, возникающих в системах, состоящих из двух и трех осцилляторов [9,10], поскольку прямое интегрирование позволяет сделать полный параметрический анализ системы в разумной области изменения параметров. Для систем с большим количеством степеней свободы данный подход не является рациональным по причине огромных вычислительных ресурсов, необходимых для решения подобных задач.

В случае, когда необходимо получить приближенное решение (скажем, для дальнейшего изучения с помощью аналогового устройства или с помощью прямого интегрирования), целесообразно применить какой-либо быстрый и в то же время достаточно надежный метод решения, отражающий характерные черты поведения отдельного элемента системы. Примером такого подхода могут служить клеточные автоматы, описывающие, в частности, распространение волн в возбудимых средах [11,12]. Правила, построенные для отдельного элемента с учетом характерных черт точечной динамики реальной распределенной системы, позволяют получить основные решения и пространственные структуры, не производя громоздкой и долгой процедуры интегрирования большой системы уравнений в частных производных.

В данной работе рассматриваются системы сильно релаксационных осцилляторов, описываемые дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{cases} \varepsilon dx_i/dt = y_i - f(x_i), \\ dy_i/dt = \eta - g(x_i, y_i) + C \sum_j (y_j - y_i), \end{cases} \quad (1)$$

$$i = 1, \dots, N,$$

где N - количество осцилляторов; $f(x)$ - функция специального вида (N -образная изоклина), которая встречается во многих моделях; $g(x_i, y_i)$ - функция, определяющая вид медленной изоклины. С помощью параметра η выбирается положение изоклины $g(x_i, y_i)=0$, обеспечивающее режим автоколебаний. Член с коэффициентом C определяет локальную связь диффузионного типа между осцилляторами, поэтому суммирование производится только по соседним осцилляторам, сам параметр C определяет силу связи. Параметр ε определяет релаксационность колебаний. Важно, что $\varepsilon \ll 1$, так как только в этом случае для изолированного осциллятора изображающая точка при отклонении от устойчивой

траектории вернется на аттрактор со временем, много меньшим периода колебаний. Таким образом, траектория отдельного осциллятора не изменится под действием введенной выше связи. Для того, чтобы подчеркнуть это свойство системы, мы используем термин «сильно релаксационный осциллятор».

Сильная релаксационность системы, N-образный вид функции $f(x)$ и наличие связи только по медленной переменной позволяет разработать специальный метод численного изучения системы уравнений (1). Метод основан на построении модели медленных движений для отдельного осциллятора и правил, позволяющих по текущему значению медленной переменной определить ее новое значение с учетом состояния окружающих осцилляторов, то есть построить оператор эволюции. Метод учитывает движение изображающей точки только на медленных участках траектории изолированного осциллятора. Точки, разделяющие предельный цикл на медленные и быстрые участки, являются аналогом секущей плоскости отображений Пуанкаре, поэтому можно определить описанный ниже алгоритм как одномерное отображение. Первая попытка построить такое отображение была сделана в работе [13] для модели клеточного цикла. Построенное в работе [13] отображение имеет ряд недостатков: неудачный выбор граничных точек медленных участков предельного цикла и неточные правила перехода с одной медленной ветви N-образной изоклины на другую (см. раздел 2). Перечисленные выше недостатки не позволяют, как мы убедились, получить многие периодические решения для системы, состоящей из трех связанных осцилляторов и построить правильную фазовую диаграмму для этого случая. В частности, в работе не показано существование вращающихся волн с двумя и пятью подпериодами [10] и несимметричной волны. Подпериодом в этом случае называется полный оборот изображающей точки по парциальному предельному циклу i -ого осциллятора в проекции (X_i, Y_i) , что совпадает с интервалами между всплесками быстрой переменной.

В качестве конкретного объекта исследования нами была рассмотрена модель клеточного цикла, поскольку поведение этой модели было ранее исследовано с помощью традиционного численного интегрирования [9,10], что позволяет оценить надежность предлагаемого метода.

Модель изолированного осциллятора и ее свойства описаны в разделе 1. Раздел 2 посвящен описанию метода и формулировке правил отображения. В разделе 3 представлены результаты исследования системы, состоящей из трех связанных осцилляторов. В заключительном разделе можно найти основные выводы и обсуждение полученных результатов.

1. Модель клеточного цикла

После ряда упрощений уравнения для цепочки связанных осцилляторов, управляющих клеточным циклом, могут быть записаны в следующем виде [3,9,10]:

$$\begin{cases} \varepsilon dX_i/dt = k + 1/2 X_i Y_i - X_i^2 - 3/2 \gamma X_i/(X_i + \delta), \\ dY_i/dt = \eta - k - 3/2 X_i Y_i - D Y_i - 1/2 \gamma X_i/(X_i + \delta) + C \sum_{j=i-1}^{j=i+1} (Y_j - Y_i), \end{cases} \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Параметр $\varepsilon \ll 1$ характеризует релаксационность системы; ниже принято значение $\varepsilon = 0.001$. Динамические переменные X и Y являются безразмерными концентрациями радикалов («быстрая» переменная) и липидов («медленная» переменная), соответственно. Параметры $k=0.05$, $\gamma=0.5$, $\delta=0.15$ и $D=0.2$ определяют значения входящих и исходящих потоков радикалов и липидов. С помощью параметра η выбирается положение «медленной» изоклины, обеспечивающее режим автоколебаний. C - параметр, определяющий силу связи.

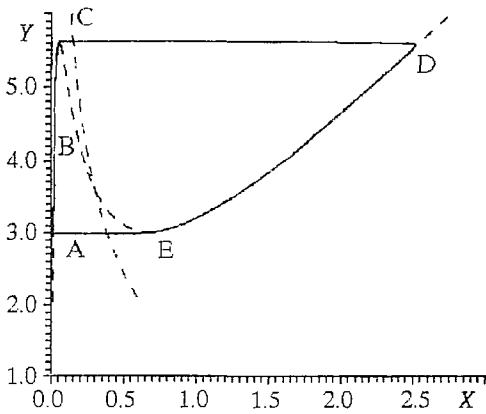


Рис. 1. Фазовый портрет для изолированного осциллятора. Пунктиром изображены главные изоклины, $\eta=2.56$

Поведение изолированного осциллятора, описываемого уравнениями (2), хорошо изучено. В случае, когда параметр η лежит в таких пределах, что медленная изоклина пересекает N-образную изоклину на ниспадающем участке, в системе (2) существует устойчивый предельный цикл, изображенный на рис. 1. На участках, обозначенных буквами AC и DE, изображающая точка движется медленно, в то время как на участках CD и EA происходят быстрые скачки на медленные ветви (в приближении разрывных колебаний эти скачки происходят мгновенно). В момент, когда происходит скачок, переменная Y почти не изменяется, а переменная X быстро

переходит от своих малых значений к большим и наоборот. На рис. 2 представлены развертки «быстрой» и «медленной» переменных.

В силу того, что рассматриваемая система сильно релаксационна, изображающая точка при отклонениях от предельного цикла быстро возвращается обратно по почти горизонтальной траектории на медленный участок предельного цикла. Поэтому связь диффузионного типа по медленной переменной влияет только на разность фаз между осцилляторами и почти не влияет на траекторию движения отдельного осциллятора, то есть в системе (2) проекция траектории на плоскость (X_i, Y_i) такая же, как и предельный цикл для изолированного осциллятора. Следовательно, можно моделировать поведение системы (2), основываясь на одномерной модели медленных движений отдельного осциллятора.

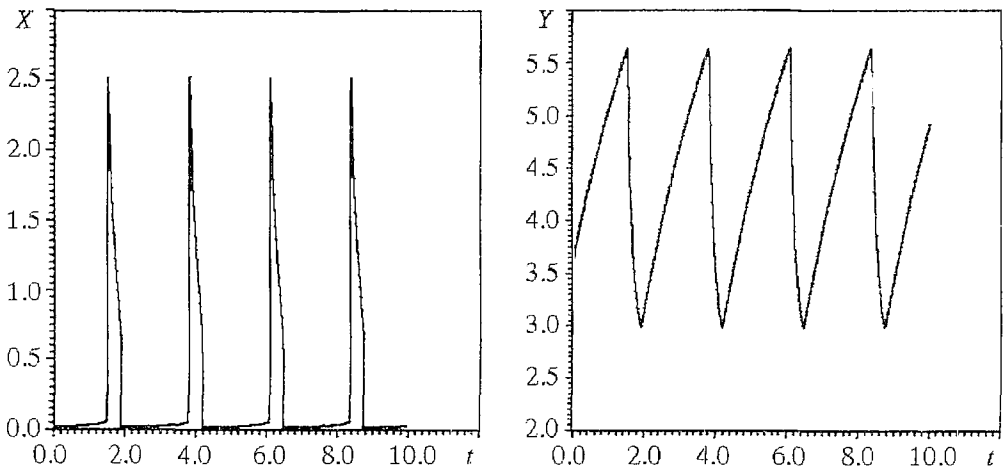


Рис. 2. Развертки динамических переменных, $\eta=2.56$

2. Метод

2.1. Линеаризация. Первым шагом в построении отображения является формальное определение точек A, C, D и E, разделяющих движения на медленные и быстрые (см. рис. 1). В данной работе приняты следующие определения:

$$\begin{aligned}
A &: \min(X), \\
C &: \min [(X - X_{\max})^2 + (Y - Y_{\max})^2]^{1/2}, \\
D &: \max(X), \\
E &: \min [(X - X_{\min})^2 + (Y - Y_{\min})^2]^{1/2},
\end{aligned}$$

где $X_{\min}, Y_{\min}, X_{\max}, Y_{\max}$ - координаты минимума и максимума N-образной изоклины на фазовой плоскости. Другими словами, A и D - точки пересечения траектории с N-образной изоклиной, C и E - точки наименьшего расстояния траектории до максимума и минимума N-образной изоклины.

Следующий шаг - построение модели медленных движений. Для этого аппроксимируем величину $\dot{Y}(Y)$ прямой линией для ветвей AC и DE, то есть найдем такие коэффициенты a и b , чтобы поведение системы на медленном участке, описанное выражением

$$dY/dt = a_{ij}Y + b_{ij} \quad (ij) = (AB), (BC), (DE), \quad (3)$$

наилучшем образом соответствовало поведению реальной системы. На рис. 3 сплошной линией показана величина \dot{Y} как функция Y , полученная с помощью решения дифференциальных уравнений, пунктирной линией показана аппроксимация прямыми линиями. Вспомогательная точка B выбрана таким образом, чтобы время движения изображающей точки от A до C через точку B, полученное с помощью отображения, было равно времени движения от A до C (T_{AC}), полученному с помощью дифференциальных уравнений. Таким образом, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
T_{(ij)}^{ду} &= \int_{Y_i}^{Y_j} 1/(a_{ij}Y + b_{ij}) dY, \quad (ij) = (AB), (BC), \\
\dot{Y}^{ду}(Y_A) &= a_{AB}Y_A + b_{AB}, \\
\dot{Y}^{ду}(Y_C) &= a_{BC}Y_C + b_{BC}, \\
a_{AB}Y_B + b_{AB} &= a_{BC}Y_B + b_{BC},
\end{aligned} \quad (4)$$

где индексом «ду» обозначены величины, полученные с помощью дифференциальных уравнений. Система (4) позволяет найти пять неизвестных величин: $Y_B, a_{AB}, b_{AB}, a_{BC}$ и b_{BC} . Величины a_{DE} и b_{DE} можно найти из следующей системы уравнений:

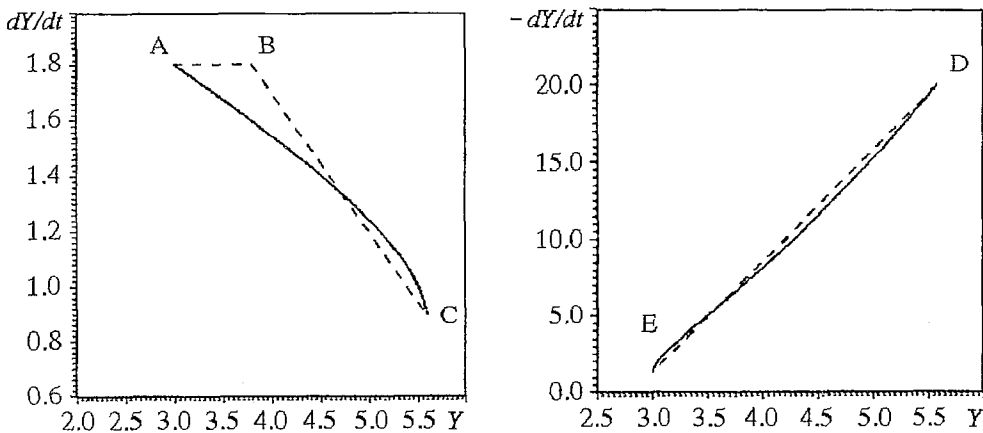


Рис. 3. Зависимость $\dot{Y}(Y)$. Пунктиром изображена зависимость для линеаризованной системы, $\eta = 2.56$

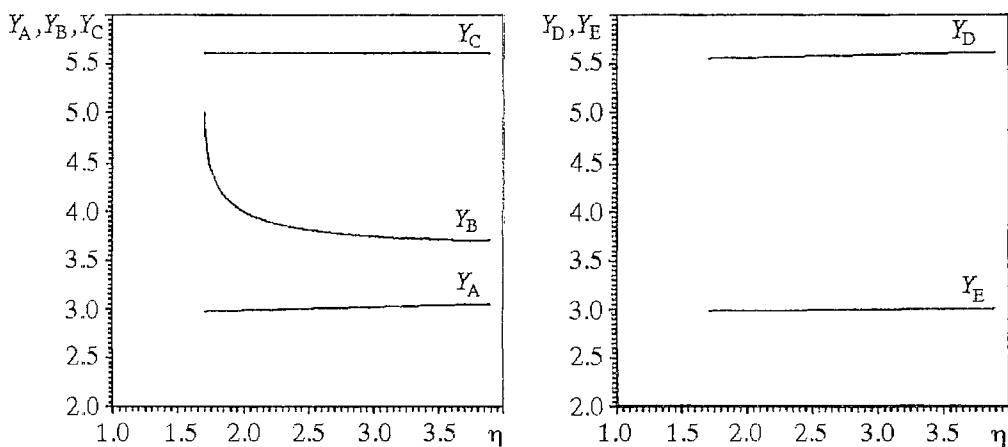


Рис. 4. Зависимость Y_A, Y_B, Y_C, Y_D, Y_E от параметра η

$$\dot{Y}^{IV}(Y_E) = a_{DE}Y_E + b_{DE}, \quad (5)$$

$$\dot{Y}^{IV}(Y_D) = a_{DE}Y_D + b_{DE}.$$

Заметим, что такой выбор величин a_{DE} и b_{DE} не обеспечивает точного соответствия времен движения изображающей точки по ветви DE, полученного с помощью системы (5) и в случае дифференциальных уравнений (как это сделано в системе (4)). Времена будут различаться на столько, на сколько будут различаться интегралы

$$T_{DE} = \int_{Y_D}^{Y_E} 1/\dot{Y}^{IV}(Y) dY \quad \text{и} \quad \int_{Y_D}^{Y_E} 1/(a_{DE}Y + b_{DE}) dY.$$

Эта разница составляет несколько процентов от полного периода, что не много для такого приближенного метода (в противном случае пришлось бы строить вспомогательную точку и для ветви DE).

Полученные величины $Y_A, Y_B, Y_C, Y_D, Y_E, a_{AB}, b_{AB}, a_{BC}, b_{BC}, a_{DE}$ и b_{DE} являются функциями параметров системы (2). Эти зависимости как функции η представлены на рис. 4 и 5, значение остальных параметров фиксировано.

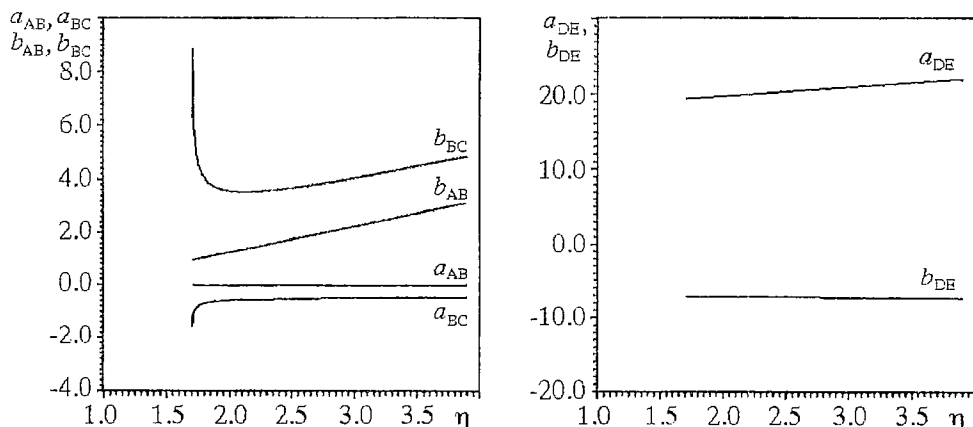


Рис. 5. Зависимость $a_{...}$ и $b_{...}$ от параметра η

2.2. Дискретизация предельного цикла. Движение на медленных участках АВ, ВС и DE описывается в принятом нами приближении дифференциальным уравнением (3) с постоянными коэффициентами на соответствующих ветвях. Найдем теперь правила, по которым можно вычислить приращение ΔY в зависимости от текущего состояния Y . Для этого зададимся некоторым значением приращения по времени h (о выборе конкретного значения h см. ниже), тогда из уравнений

$$\Delta Y = Y(t+h) - Y,$$

$$h = \int_{Y(t)}^{Y(t+h)} 1/(a_{ij}y + b_{ij}) dy, \quad (ij) = AB, BC, DE$$

следует выражение для ΔY

$$\Delta Y = \alpha_{ij}Y + \beta_{ij}, \quad (6)$$

где $\alpha_{ij} = \exp(a_{ij}h) - 1$, $\beta_{ij} = b_{ij}\alpha_{ij}/a_{ij}$ или, поскольку предполагается выбрать $h \ll 1$, $\alpha_{ij} = a_{ij}h$, $\beta_{ij} = b_{ij}h$.

В данной работе использован следующий подход при выборе шага интегрирования: для любого значения параметра η величина шага по времени выбирается порядка величины $\max(T_{CD}, T_{EA})$, времена прыжков в дальнейшем не учитываются, поскольку времена T_{CD} и T_{EA} при релаксационности $\epsilon = 0.001$ составляют несколько процентов от периода. Основные вычисления проводились с шагом $h = 0.01 \sim \max(T_{CD}, T_{EA})$.

2.3. Итоговые правила. Уравнение (6) задает оператор эволюции для одного осциллятора. Сформулируем теперь окончательные правила для отображений с учетом связи. Пусть каждому j -ому осциллятору в линии на i -ом шаге соответствуют два числа, определяющих его текущее состояние: Y_j^i - аналог фазовой переменной Y_i в уравнениях (2), и br_j^i - число, обозначающее ветвь изохлины, на которой находится данный осциллятор. Пусть для ветви АВ число $br=1$, для ветви ВС $br=2$ и для ветви DE $br=3$. Каждому числу br поставим в соответствие числа α_{br} и β_{br} , задающие коэффициенты α и β на каждой ветви. Определим функцию

$$D(Y, br, j) = \alpha_{br}Y + \beta_{br} + Ch \sum_{v=j-1}^{v=j+1} (Y_v^i - Y),$$

определяющую приращение ΔY для j -ого осциллятора в положении Y на ветви br за время h . Тогда новое состояние системы на $i+1$ -ом шаге можно найти, проделав для каждого осциллятора следующую процедуру:

1. Вычислить новое значение для Y_j^i :

$$Y_j^{i+1} := Y_j^i + D(Y_j^i, br_j^i, j).$$

2. Если $Y_j^{i+1} > Y_B$ и $br_j^i = 1$, то

$$br_j^{i+1} := 2,$$

$$Y_j^{i+1} := Y_B + D(Y_B, 2, j)/D(Y_B, 1, j) (Y_j^{i+1} - Y_B);$$

если $Y_j^{i+1} > Y_C$ и $br_j^i = 2$, то

$$br_j^{i+1} := 3,$$

$$Y_j^{i+1} := Y_D + D(Y_D, 3, j)/D(Y_C, 2, j) (Y_j^{i+1} - Y_C);$$

если $Y_j^{i+1} < Y_E$ и $br_j^i = 3$, то

$$br_j^{i+1} := 1,$$

$$Y_j^{i+1} := Y_A + D(Y_A, 1, j)/D(Y_D, 3, j) (Y_j^{i+1} - Y_E);$$

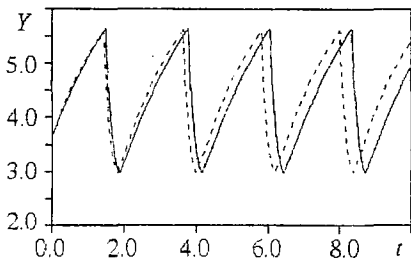


Рис. 6. Развертки для медленной переменной, полученные с помощью дифференциальных уравнений (сплошная линия) и отображений (пунктирная линия). $\eta=2.56$

Заметим, что сформулированные правила для отображений при $h \rightarrow 0$ представляют собой явный метод Эйлера первого порядка для решения уравнений (3) с учетом связи. Члены типа $D(Y_{B,2,j})/D(Y_{B,1,j}) (Y_j^{i+1} - Y_B)$ в выражениях для переходов необходимо ввести для сглаживания разрывных правых частей (как видно из представленных выше правил, при переходе с одной ветви на другую правые части претерпевают разрыв). Если этого не сделать, то в системе будут возникать ложные решения, характерные для явных методов интегрирования первого порядка с разрывными правыми частями.

На рис. 6 изображены развертки для медленной переменной, полученные с помощью численного решения системы (2) и с помощью сформулированных выше правил отображения. Из рисунка видно, что хотя периоды и различаются на некоторую величину, все же отображения правильно описывают динамику отдельного осциллятора.

2.4. Методика анализа решений. При изучении системы, состоящей из нескольких связанных осцилляторов, возникает проблема анализа полученных разверток медленных переменных. Периодические решения изучались по следующей схеме:

- определение общего периода решения T ;
- определение разности фаз между одинаковыми по форме развертками;
- определение количества подпериодов в общем решении для каждой переменной Y_1, Y_2 и Y_3 .

3. Результаты

В данной работе рассматривается система, состоящая из трех одинаковых осцилляторов в циклической конфигурации. В рассматриваемой системе обнаружены следующие решения:

1. *Синфазное решение.* Существует и устойчиво на всей плоскости (η, C) ; формы разверток совпадают для всех осцилляторов, разность фаз равна нулю.
2. *Решение, обозначенное как 2/1.* Все три развертки $Y_1(t), Y_2(t)$ и $Y_3(t)$ имеют один подпериод. Развертки для двух осцилляторов совпадают и разность фаз равна нулю. Развертка третьего осциллятора имеет отличную от двух других разверток форму, поэтому решение 2/1 является примером пространственно неоднородного решения (рис. 7).

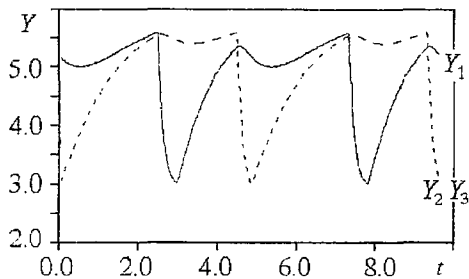


Рис. 7. Развертки для медленной переменной решения 2/1, $\eta=2.0, C=0.3$

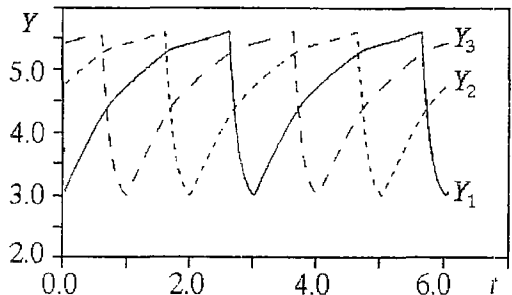


Рис. 8. Развертки для медленной переменной решения $T/3, \eta=2.0, C=0.2$

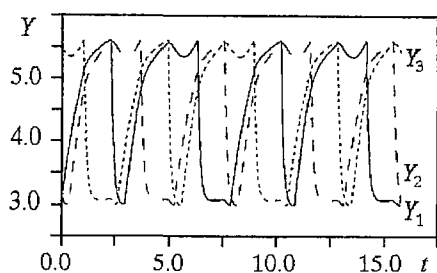


Рис. 9. Развертки для медленной переменной решения O_{222} , $\eta=2.75$, $C=0.3$

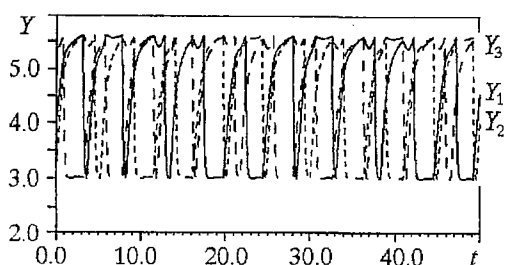


Рис. 10. Развертки для медленной переменной решения O_{555} , $\eta=2.490$, $C=0.293$

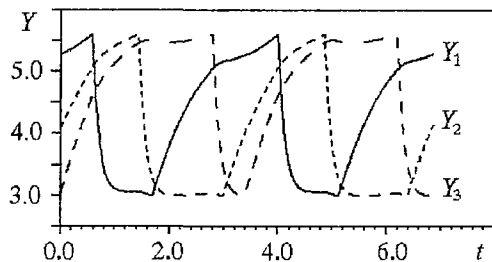


Рис. 11. Развертки для медленной переменной несимметричной волны, $\eta=2.84$, $C=0.3$

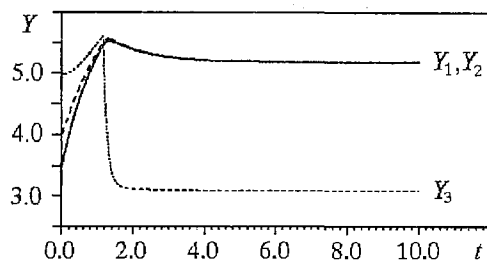


Рис. 12. Процесс выхода системы на «фазовую смерть», $\eta=2.5$, $C=0.5$

3. *Вращающиеся волны.* Группа решений с одинаковыми формами разверток динамических переменных и разностью фаз $T/3$.

- Простая волна $T/3$. Развертки для динамических переменных имеют один подпериод (рис. 8).
- Волна O_{222} . Решение, в котором развертки имеют два подпериода в общем периоде (рис. 9).
- Волна O_{555} . Решение, в котором развертки имеют пять подпериодов в общем периоде (рис. 10).

4. *Несимметричная волна.* Формы разверток для трех осцилляторов разные, но, тем не менее, имеют общий период и один подпериод для каждой развертки (рис. 11).

5. *Фазовая смерть.* При достаточно большом значении параметра C в системе присутствует фазовая смерть, то есть устойчивое стационарное состояние. На рис. 12 показан выход системы на это решение.

На рис. 13 показаны границы устойчивости аттракторов в плоскости параметров (η, C) . Из рисунка видно, что имеются области сосуществования нескольких периодических решений. Кроме того, обнаружены пересечения

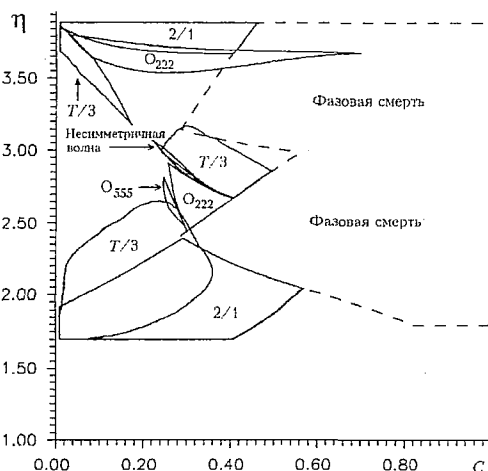


Рис. 13. Фазовая диаграмма для трех осцилляторов. Синфазное решение существует на всей плоскости. Исследования проводились для $\eta=1.699 \div 3.897$ (в области существования автоколебаний для отдельного осциллятора)

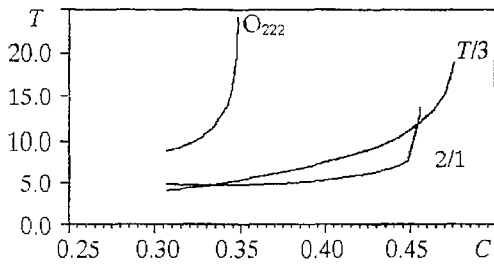


Рис. 14. Зависимость периодов решений 2/1 (нижняя область, $\eta=2.00\div 2.16$), T/3 (средняя область, $\eta=3.00\div 2.82$) и O_{222} (средняя область, $\eta=2.59\div 2.55$) от параметра C рядом с границей фазовой смерти

O_{222} (средняя область) со стационарным решением вычисления показали резкий рост периода этих решений при приближении к границе, что говорит о наличии бифуркации бесконечного периода (рис. 14).

Обсуждение

Приведенные результаты свидетельствуют об эффективности и надежности построенного метода. Решения 1,2,3а и 5 были получены экспериментально в работах [14,15] и теоретически в работе [10]. Решения 3б и 3с получены только теоретически в работе [10]. Решение 4 также обнаружено нами традиционным способом, и результаты исследования готовятся к публикации.

Следует отметить, что построение описанного в данной работе отображения можно проводить только для $\epsilon \ll 1$. Критерием малости ϵ может служить соотношение времени движения изображающей точки по медленным участкам траектории и времени скачков с одной медленной ветви на другую для изолированного осциллятора. Важно, что время скачков составляет только небольшую долю от общего периода. В отображениях это время никак не учитывается, и переход изображающей точки происходит мгновенно из одной граничной точки в другую ($C \rightarrow D$, $E \rightarrow A$) по горизонтальной линии (см. рис. 1). В силу отмеченной выше особенности, даже для малых ϵ отображения эффективно более «релаксационны», чем исходная система. В сущности, представленные отображения являются вариацией метода разрывных колебаний [16], где вместо решения укороченной системы (что не всегда можно сделать) производится ее линеаризация для различных частей медленных участков траектории.

Представленный здесь метод не позволяет получить решения, для которых существенной является динамика быстрой переменной. Например, отображения не позволяют получить решения типа «динамической ловушки» [17], в которой один из осцилляторов теряет способность совершать полноамплитудные релаксационные колебания.

Несмотря на перечисленные выше недостатки, представленный метод позволяет при существенном уменьшении времени счета (примерно в 30 раз) получить все решения, возникающие в исходной системе дифференциальных уравнений, на которые не оказывает влияния динамика быстрой переменной, и дает правильную границу их устойчивости. Метод применим практически для любой системы релаксационных осцилляторов, связанных по медленной переменной с N-образной изоклиной, не обязательно одинаковых. Поскольку в основу отображений положен явный метод интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, отображения позволяют ввести шум и исследовать стохастический вариант исходной системы дифференциальных уравнений.

Библиографический список

1. *Crowley M.F. and Epstein I.R.* Experimental and theoretical studies of coupled oscillators: phase death, multistability, and in-phase and out-phase entrainment // *J. Phys. Chem.* 1989. Vol. 93. P. 2496.

2. Lavenda B., Nicolis G. and Herschkwitz-Kaufman M. // J. Theor. Biol. 1971. Vol. 32. P. 283.
3. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984.
4. Гарел Д., Гарел О. Колебательные химические осцилляторы. М.: Мир, 1986.
5. Van der Pol B., Van der Mark J. The heartbeat considered as a relaxation oscillation, and an electrical model of the heart // Philos. Mag. 1928. Vol. 6. P. 763.
6. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975
7. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980.
8. Epstein I.R. Coupled oscillators in chemistry and biology // Comm. Mol. Cell. Biophys. 1990. Vol. 6. P. 299.
9. Volkov E.I., Stolyarov M.N. Bihyhythmicity in a system of two coupled identical oscillators // Phys. Lett. 1991. Vol. A159. P. 61.
10. Volkov E.I., Stolyarov M.N. Temporal variability in the system of coupled mitotic timers // Biological Cybernetics. 1994. Vol. 71. P. 451.
11. Винер Н., Розенблюм А. Кибернетический сборник. Вып. 3. М.: ИЛ, 1961. С.3.
12. Зыков В.С., Михайлов А.С. // ДАН СССР. 1986. Т. 286. С. 341.
13. Markus M., Stolyarov M., Volkov E.I. An efficient shortcut to compute large populations of coupled oscillators // Mathematical Population Dynamics. Proc. of the 3rd International Conference. France: Leon, 1994.
14. Ruwisch D., Dode M., P. Schütz, Markus M. Parallel analog computation of coupled cell cycles with electrical oscillators // Phys. Lett. 1994. Vol. A186. P. 137.
15. Yoshimoto M., Yoshikawa K., Mori Y. Coupling among three chemical oscillators: Synchronization, phase death, and frustration // Phys. Rev. 1993. Vol. E47, № 2.
16. Grasman J. The mathematical modeling of entrained biological oscillators // Bulletin of Mathematical Biology. 1984. Vol. 46, № 3. P. 407.
17. Волков Е.И. Динамическая ловушка в симметричной цепочке из трех сцепленных осцилляторов // Крат. Сообщ. по физике. ФИАН 1995. № 7/8. С. 28.

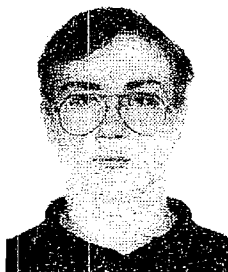
Физический институт
им. П.Н. Лебедева РАН

Поступила в редакцию 24.01.96
после переработки 22.07.96

EFFECTIVE NUMERICAL METHOD FOR THE STUDY OF THE INHIBITORY COUPLED VERY STIFF OSCILLATORS DYNAMICS

D.V. Volkov, M.N. Stolyarov, E.I. Volkov

A method of the numerical investigation of the inhibitory coupled relaxation oscillators systems based on the efficient one-dimensionality of limit cycle of isolated oscillator is proposed. $\dot{Y}(Y)$ dependence linearisation (where Y is a slow variable) was used in the above-mentioned method for a slow area of a limit cycle. A fast variable dynamics is reduced up to instantaneous jumps from one slow cycle area to another. Represented calculation method, which provides 30-times reduction of computing time, let us to investigate all solutions appearing in the initial system of differential equations which are not influenced by the fast variable dynamics. A good accordance with the traditional method of numerical solution of differential equations for three coupled oscillators was shown and the possible types of rotating waves were found. The method advantages and disadvantages were discussed.



Волков Денис Владимирович - родился в Дедовске Московской области (1972). Окончил физический факультет МГУ (1995). После окончания МГУ поступил в аспирантуру Физического института им. П.Н.Лебедева РАН. Занимается изучением пространственно-временных структур в цепочках взаимодействующих осцилляторов, математическим моделированием автоколебательных систем.



Столяров Максим Николаевич - родился в Москве (1962). Закончил Физический факультет МГУ (1986). С 1988 года сотрудник отдела теоретической физики ФИ РАН. Область научных интересов - математические модели биологических систем, теория нелинейных колебаний и автоволн, численное моделирование в статистической физике. Соавтор ряда работ по математическому моделированию растущей колонии клеток, изучению динамики автоволн в неоднородных средах и пространственно-временных структур в кластерах взаимодействующих осцилляторов.



Волков Евгений Израилевич - родился в Москве (1947). Закончил физический факультет МГУ (1971). Защитил кандидатскую диссертацию (1976). С 1976 года сотрудник сектора теоретической биофизики отдела теоретической физики ФИ РАН. С 1988 года заместитель директора отделения теоретической физики ФИ РАН. Область научных интересов - модели биологических мембран, математические модели автоколебательных процессов в биологии. Является автором многих научных статей по направлениям, указанным выше.