

НЕЛИНЕЙНОЕ СДВИГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Н.М. Астафьева

Влияние завихренности и восстанавливающее действие силы Кориолиса рассмотрены на примерах простых моделей, используемых в динамической метеорологии и океанографии, а также на примерах течений, возникающих между вращающимися бесконечными дисками, цилиндрами и в слое между вращающимися сферами. Приведены результаты численного изучения структуры нелинейных течений в сферическом слое и их устойчивости. Рассматриваются возможности моделирования глобальных атмосферных движений.

При численном и лабораторном моделировании динамических и термодинамических процессов в атмосферах, океанах и недрах планет необходимо учитывать, что все они происходят при определяющем влиянии вращения планеты и кривизны поверхности. Вращение является фактором, необходимым для формирования в атмосфере и океане циркуляции глобального масштаба и большинства крупно- и мелкомасштабных течений. Так на Земле сила Кориолиса, вызванная вращением планеты, становится заметной для движений с линейным масштабом 100 км и более.

Движение жидкости во вращающемся сферическом слое описывается полной системой уравнений гидродинамики, численное решение которой представляет собой сложную проблему даже без учета процессов переноса тепла, поэтому обычно применяются предположения, позволяющие упростить уравнения. Некоторые наиболее часто используемые приближения, их основные достоинства, недостатки и области применения, элементы теории завихренности представлены в разделе 1.

В динамической метеорологии и океанографии для описания крупномасштабных течений используются уравнения движения тонкого слоя жидкости на вращающейся сфере (приближение мелкой воды с учетом изменения толщины слоя за счет смещений дна и свободной поверхности). Завихренность элемента жидкости в этом приближении меняется только вследствие изменения толщины слоя или широты (поскольку сила Кориолиса во вращающейся сферической системе зависит от широты).

Для описания течений, охватывающих малый диапазон широт, выбирают более локальные системы координат, например, используется приближение β -плоскости, предполагающее малое линейное изменение параметра Кориолиса с широтой. В этом приближении пренебрегают искривлением слоя, течение

происходит в плоском слое с линейно меняющейся в направлении север-юг угловой скоростью.

Моделирование глобальных атмосферных движений и глобальных океанических течений требует рассмотрения задачи о движении вращающейся жидкости в полной области – от полюса до полюса, то есть задачи о сферическом течении Куэтта. Постановка и результаты решения задачи о течениях, возникающих во вращающихся сферических слоях, и их устойчивости представлены в разделе 2.

Неоднородность течения уже при малых значениях числа Рейнольдса Re , существенная его зависимость от Re , а также замкнутость области движения отличают сферическое течение Куэтта от ставших уже классическими цилиндрического и плоского течений Куэтта – сдвиговых течений между бесконечными коаксиальными вращающимися цилиндрами и дисками. Эти же отличия приводят к большому разнообразию движений и механизмов возникновения неустойчивости течений во вращающихся сферических слоях.

Изучение сферического течения Куэтта представляет интерес для развития общей теории гидродинамической устойчивости и может помочь выявлению основных закономерностей глобальных движений в атмосферах и океанах планет.

1. Завихренность и восстанавливающее действие силы Кориолиса

Известно, что наличие вращения приводит к качественно новым эффектам [1–6]. Так, например, градиент температуры на сфере в невозмущенном состоянии при равномерном распределении источников тепла сферически симметричен. Вращение жидкости вводит дополнительную симметрию – относительно оси вращения, в результате эффективность конвективного переноса оказывается зависящей от полярного угла. Важное влияние вращения состоит в изменении направления горизонтальной скорости частицы, что вынуждает ее двигаться вправо в северном полушарии и влево в южном.

В присутствии вращения в жидкости включается механизм, при помощи которого уже вторичное движение может заметно изменить основное путем перераспределения углового момента. Вторичное движение воздействует на основное путем растяжения вихревых линий и сохранения углового момента. Это происходит при взаимодействии с глобальной циркуляцией атмосферы и великими океаническими и крупномасштабными атмосферными струйными течениями, при взаимодействии с крупномасштабными процессами, вызванными явлением Эль-Ниньо, при возникновении, развитии и разрушении тропических тайфунов, циклонов средних широт, полярных ныряющих циклонов, при диссипации урагана над сушей и многих многих процессах разных временных и пространственных масштабов, происходящих в океане, атмосфере и недрах Земли.

Все эти движения происходят при разной интенсивности взаимодействиях пограничных слоев, вторичных течений, завихренности и углового момента, возникающих в жидкости, заключенной в объеме с вращающимися границами.

Общая задача такого типа – задача о движении несжимаемой вязкой жидкости с постоянными физическими свойствами – описывается полной системой нелинейных уравнений гидродинамики (уравнений Навье – Стокса и сохранения массы), с соответствующими граничными и начальными условиями [7–9].

Характер движения жидкости в слое между концентрическими коаксиальными сферами, возникающего вследствие вращения одной или обеих граничных сфер относительно их общей оси, определяется тремя параметрами подобия. Это число Рейнольдса

$$Re = \omega_1 r_1^2 / \nu,$$

толщина слоя жидкости

$$\delta = (r_2 - r_1) / r_1,$$

отношение угловых скоростей вращения граничных сфер

$$\omega^* = \omega_2 / \omega_1$$

или аналог числа Россби

$$\omega^{**} = (\omega_2 - \omega_1) / \omega_1.$$

Здесь r_i , ω_i – радиусы и угловые скорости вращения внутренней ($i=1$) и внешней ($i=2$) граничных сфер; ν – постоянный коэффициент кинематической вязкости.

Если движение отнесено к осям координат, вращающимся вместе с жидкостью с постоянной угловой скоростью Ω , то необходимо учесть действие на жидкость центробежной силы инерции и силы Кориолиса.

Формула $\mathbf{U}_{\text{инерт}} = \Omega \times \mathbf{r} + \mathbf{U}_{\text{рот}}$ связывает скорости частицы в инерциальной и вращающейся системе координат. Центробежная сила на единицу массы $1/2(\Omega \times \mathbf{r})(\Omega \times \mathbf{r})$ является консервативной, ее эффект можно считать эквивалентным давлению и включить ее (вместе с имеющимися массовыми силами) в модифицированное давление. Сила Кориолиса $2\Omega \times \mathbf{r}$, в отличие от центробежной, создает эффекты нового типа, в частности, эффекты «упругости» жидкости.

Тривиальное решение $\mathbf{U}_{\text{рот}} = 0$ уравнений, записанных во вращающийся системе координат, отвечает состоянию твердотельного вращения. В инерциальной системе координат $\mathbf{U}_{\text{инерт}} = \Omega \times \mathbf{r}$. К этому состоянию твердотельного вращения естественным образом стремится вязкая жидкость, заключенная в равномерно вращающемся объеме при $\omega^{**} = 0$.

Часто вместо двух из введенных выше безразмерных параметров подобия (число Рейнольдса и соотношение между угловыми скоростями вращения граничных сфер) используются число Экмана

$$E = \nu / \Omega_{\text{ск}} L^2,$$

число Россби

$$\epsilon = U / \Omega_{\text{ск}} L.$$

Здесь L и U – характерная длина и характерная относительная скорость движения частицы; $\Omega_{\text{ск}}$ – угловая скорость, величина скалярная.

Число Экмана по сути – обратное число Рейнольдса. Как и определенное выше число Рейнольдса, число Экмана E является мерой соотношения между типичной силой вязкости и силой Кориолиса, оно мало, когда преимущественным является вращение. Число Экмана в уравнениях движения является множителем при членах с высшими производными и критерием существования вязких пограничных и свободных сдвиговых слоев в жидкости.

В тонких вязких пограничных слоях, располагающихся вдоль граничных поверхностей области течения, тангенциальная компонента скорости приспособляется к ее значению на стенке. Кроме пограничных существуют свободные вязкие сдвиговые слои, стремящиеся сгладить возникающие по каким-либо причинам разрывы профиля скорости в жидкости. Свободные и пограничные сдвиговые слои имеют сложную структуру и толщину порядка $LE\gamma$ (дробный показатель γ может принимать разные значения, например, $1/2$, $1/3$ или $1/4$). Отметим, что концентрация вязкости в тонких слоях приводит к появлению невязкого или маловязкого ядра течения.

Число Россби – аналог введенного выше параметра ω^{**} , определяющего соотношение между относительным движением и глобальным вращением. Являясь отношением конвективного ускорения к ускорению Кориолиса $(\mathbf{UV})\mathbf{U} / (2\Omega \times \mathbf{U})$, число Россби ϵ позволяет оценить относительное значение нелинейных членов. Оно может быть порядка единицы, когда нелинейность существенна, и бесконечно малым в линейной теории.

При малых числах Россби формируются инерционные пограничные слои.

Возможно существование вязкого и инерционного пограничных слоев одновременно. Так при $0 < \epsilon \ll \epsilon \ll 1$ должен существовать относительно широкий инерционный слой с более тонким вязким слоем (или подслоем) внутри.

Сила Кориолиса

$$F = 2\Omega \times U$$

перпендикулярна оси вращения и вектору скорости частицы, меняет направление движения жидкости, не совершая работы, и линейно зависит от скорости. Сила Кориолиса стремится изменить направление компоненты вектора скорости в плоскости, нормальной вектору Ω , в так называемой поперечной плоскости, в противоположном вращению подвижной системы координат направлению.

На рис. 1 показана нормальная к оси вращения плоскость (x, y), так называемая поперечная плоскость, и направление вращения Ω системы координат. Показаны также компонента U_{xy} скорости частицы жидкости U и направление силы Кориолиса. В представленном примере система координат вращается против часовой стрелки, а сила Кориолиса стремится повернуть направление движения жидкости в направлении по часовой стрелке.

Поскольку зависимость силы Кориолиса от скорости частицы линейная, сила Кориолиса стремится изменить направление компоненты скорости в поперечной плоскости в одинаковой мере при любых значениях и любых направлениях этой компоненты. Сила Кориолиса стремится вернуть частицу в ее первоначальное положение в поперечной плоскости и если сила Кориолиса является определяющей, то частица будет двигаться по траектории, проекцией которой на поперечную плоскость будет окружность со временем обхода $\Omega_{\text{ск}}^{-1}$.

Для движущихся частиц жидкости характерно их сильное взаимодействие посредством градиентов давления. И, поскольку изменения давления (и скорости) в несжимаемой жидкости распространяются с бесконечной скоростью звука, интересно рассмотреть качественную картину воздействия силы Кориолиса не на одну частицу, а на совокупность жидких частиц.

Пусть в некоторой области существует движение с положительной дивергенцией $di/\partial x + dv/\partial y > 0$ в поперечной плоскости, то есть площадь, охватываемая проекцией замкнутой жидкой линии на поперечную плоскость, увеличивается. Сила Кориолиса вызывает касательное движение жидкой линии, дающее отрицательный вклад в циркуляцию вокруг жидкой линии (поскольку необходимо поддерживать постоянно циркуляции в абсолютной системе координат). Это новое касательное движение приводит в свою очередь к появлению силы Кориолиса, действующей по нормали к жидкой линии и направленной внутрь рассматриваемой области. В данном случае сила Кориолиса препятствует растеканию, для случая с отрицательной дивергенцией – наоборот.

Таким образом, сила Кориолиса создает сопротивление движениям, приводящим к изменениям площади, охватываемой проекцией замкнутой жидкой

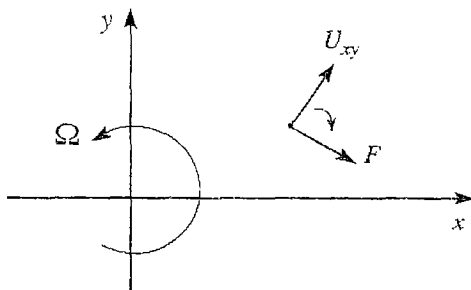


Рис. 1. Действие силы Кориолиса на скорость частицы в поперечной плоскости

линии. Вращающаяся жидкость приобретает свойство упругости, обуславливающее восстанавливающий механизм. Чем больше сила Кориолиса, тем сильнее она препятствует движениям, приводящим к ненулевому расхождению в поперечной плоскости.

Величина восстанавливающего воздействия силы Кориолиса зависит от соотношения между силой Кориолиса и другими силами, действующими на жидкость. Число Россби $\epsilon = U/\Omega_{\text{ск}}L$ удобно для оценки относительного

влияния сил Кориолиса и инерции. При $\epsilon \gg 1$ влияние силы Кориолиса незначительно, при $\epsilon \ll 1$ восстанавливающий эффект максимален и сила Кориолиса будет стремиться препятствовать любому расхождению в поперечной плоскости. Промежуточный случай при числе Россби порядка единицы наиболее интересен из-за возникающих смешанных эффектов.

В динамической метеорологии и океанографии для описания течений в атмосфере и океане используются предположения, позволяющие получить упрощенные системы уравнений.

Некоторые черты крупномасштабных горизонтальных движений достаточно хорошо описываются в приближении мелкой воды на вращающейся сфере в случае, когда непосредственным влиянием вязкости можно пренебречь. На примере этой модели можно получить достаточно простые и наглядные соотношения для завихренности.

При выводе системы уравнений в этом приближении используются упрощающие предположения:

- атмосфера рассматривается как слой несжимаемой жидкости однородной плотности с малой по сравнению с горизонтальным масштабом движений толщиной;

- верхняя граница слоя – свободная поверхность сферической формы; это предположение исключает из рассмотрения движения, находящиеся под определяющим влиянием силы тяжести, например, крупномасштабные приливные движения;

- в качестве переменной используется средняя скорость по области, горизонтальные размеры которой сравнимы с толщиной жидкости; в этом предположении исключаются вертикальные движения и изменения горизонтальной скорости с высотой и остаются в рассмотрении поля течений, заметно изменяющиеся на горизонтальных масштабах не менее 100 км;

- допускается медленное малое изменение толщины слоя H за счет изменения формы дна и свободной поверхности – изменение H на горизонтальных расстояниях порядка H должно быть мало.

С учетом этих предположений уравнения движения слоя жидкости на вращающейся сфере (уравнения движения в описанной модели атмосферы) имеют вид

$$-fu_{\varphi} = -(1/\rho)\partial_r p, \quad (1.1)$$

$$D_t u_{\theta} - (1/R)u_{\varphi}^2 \operatorname{ctg}\theta - fu_{\varphi} = -(1/\rho)(1/R)\partial_{\theta} p, \quad (1.2)$$

$$D_t u_{\varphi} + (1/R)u_{\theta}u_{\varphi} \operatorname{ctg}\theta + fu_{\theta} = -(1/\rho)(1/R)\partial_{\varphi} p. \quad (1.3)$$

Здесь $\{u_r, u_{\theta}, u_{\varphi}\}$ – проекции вектора скорости в сферической системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$, p – модифицированное давление, t – время, ρ – постоянная плотность жидкости; R и $\{\Omega_{\text{ск}} \cos\theta, -\Omega_{\text{ск}} \sin\theta, 0\}$ – радиус и угловая скорость Земли, $f = 2\Omega_{\text{ск}} \cos\theta$ – параметр Кориолиса; $D_t = \partial_t + u_{\theta} \partial_{\theta} / R + u_{\varphi} \partial_{\varphi} / (R \sin\theta)$. Здесь и далее принято обозначение производной $\partial_x F = \partial F / \partial x$.

Из первого уравнения (1.1) системы следует, что вертикальный градиент модифицированного давления всюду уравновешивается вертикальной компонентой силы Кориолиса. Два других уравнения (1.2) и (1.3) демонстрируют важное влияние вращения, состоящее в изменении горизонтальной скорости частицы. Это изменение направлено по нормали к мгновенной скорости и разное в разных полушариях – частица стремится вправо от мгновенного направления движения в северном полушарии, где $\cos\theta > 0$, и влево в южном полушарии, где $\cos\theta < 0$.

Часто в качестве первичной переменной используют не скорость жидкости, а завихренность ω . Это объясняется тем, что завихренность является принципиальной физической характеристикой многих течений. Уравнение для

завихренности в общем виде дает соотношение между конвективной скоростью изменения завихренности и тремя процессами, вызывающими это изменение. Перечислим эти процессы и соответствующие им члены в уравнении:

- растяжение и поворот вихревых линий (за счет инерционных членов);
- возникновение завихренности за счет изменения плотности жидкости (член с градиентом давления);
- диффузионный перенос завихренности от соседних элементов (за счет члена вязкой диссипации). Диффузия завихренности связана с передачей момента вращения от одной частицы другой при наличии градиента момента (стенка, распределенные источники завихренности).

Таким образом, завихренность переносится посредством конвекции и диффузии, то есть с конечной скоростью (в отличие от изменений давления и скорости, которые переносятся в несжимаемой жидкости с бесконечной скоростью). Пространственный и временной масштабы изменений завихренности меньше, чем скорости и давления, и во многих задачах поле завихренности легче вычисляется*, что является немаловажной причиной для использования ω в качестве первичной переменной.

В рассматриваемой модели интерес представляет радиальная компонента завихренности относительно вращающейся системы координат

$$\omega = [\partial_{\theta}(u_{\varphi} \sin \theta) - \partial_{\varphi} u_{\theta}] / (R \sin \theta),$$

уравнение для которой получается из (1.2), (1.3)

$$D_t \omega = u_{\theta} \partial_{\theta} f / R + H^{-1} D_t [H(f + \omega)]$$

и которое может быть записано в очень простом и наглядном виде

$$D_t [(f + \omega) / H] = 0. \quad (1.4)$$

Отсюда следует, что:

- вертикальная компонента абсолютной завихренности ($f + \omega$) меняется только при движении жидкости в тех областях, где меняется толщина жидкости H ;
- вертикальная компонента относительной завихренности (ω) в слое постоянной толщины меняется только при движениях с изменением широты (так как с широтой меняется параметр Кориолиса f).

Полученные уравнения применимы к течениям с характерным масштабом длины L большим, чем толщина слоя H .

В случае, когда можно пренебречь инерционными членами (геострофическое приближение), уравнения (1.2) и (1.3) принимают вид

$$\partial_{\theta} p = \rho f u_{\varphi} / R, \quad (1.5)$$

$$\partial_{\varphi} p = -\rho f u_{\theta} / (R \sin \theta) \quad (1.6)$$

и описывают геострофический ветер. Уравнение для завихренности (1.4) приводится к виду

$$D_t [f / H] = 0. \quad (1.7)$$

Из последнего уравнения следует, что геострофические течения малого масштаба (на котором не сказывается изменение параметра Кориолиса) должны происходить без изменения толщины слоя H . Крупномасштабные геострофические течения наоборот могут осуществляться только в случае, когда вдоль траектории

* К тому же, несжимаемая жидкость без завихренности (если $\omega=0$ всюду) вообще перестает быть жидкостью, например, она мгновенно останавливается при остановке границ.

каждого элемента жидкости дно слоя опускается по направлению к полюсам.

Отметим, что для многих движений в атмосфере Земли можно пренебречь силами инерции по сравнению с силой Кориолиса, то есть параметр U/fL мал. Так для течений масштаба $L=1000$ км со скоростью $U=10$ м/с (скорость в атмосфере при обычных условиях) и при $\theta=45^\circ$, где $f=1.03 \cdot 10^{-4}$ с, имеем $U/fL=0.01$.

Примером геострофического течения в атмосфере может быть масса вращающегося воздуха, приблизительно симметричная по отношению к своей центральной области, в которой сосредоточена неравная нулю завихренность одного знака. Если знаки относительной завихренности ω и параметра Кориолиса совпадают (против часовой стрелки в северном и по — в южном полушарии), то сила Кориолиса направлена от центра области; давление в центре низкое и такое течение можно назвать циклоном. Течения, в которых относительная завихренность и сила Кориолиса разных знаков, имеют в центре повышенное давление (антициклоны). На рис. 2 схематически показаны циклонические движения в северном и южном полушариях.

Конечно же, геострофическое приближение является относительно грубым. Так сильные ветры, которыми сопровождаются циклонические движения, и многие другие детали не описываются уравнениями в геострофическом приближении.

При необходимости моделирования атмосферных течений с меньшими характерными размерами, протяженность которых составляет доли радиуса Земли, выбирают более локальные системы координат.

Пусть поле течения охватывает лишь малый диапазон широт относительно $\theta=\theta_0$. Тогда удобно ввести координаты

$$x = \varphi R \sin \theta_0, \quad y = (\theta_0 - \theta) R.$$

Легко видеть, что система координат $\{x, y, z\}$, где z направлена вверх, а x и y увеличиваются в восточном и северном направлениях, соответственно, подобна введенной выше сферической системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$.

Для течений с характерными размерами много меньшими радиуса Земли, $L \ll R$, система уравнений движения сводится к форме, соответствующей двумерному течению в плоском слое с возможностью небольших медленных изменений толщины слоя H . Параметр Кориолиса при этом постоянен $f_0 = 2\Omega_{\text{эк}} \cos \theta_0$.

Для некоторых полей течений условие малости характерного размера $L \ll R$ сохраняется, но их относительная завихренность такова, что отношения ω/L и f/R сравнимы. В этом случае нельзя считать параметр Кориолиса постоянным. Воспользуемся аппроксимацией

$$f = f_0 + \beta y,$$

где $\beta = 2\Omega_{\text{эк}} \sin \theta_0 / R$. Эта аппроксимация допускает изменения параметра Кориолиса с координатой y (то есть в направлении север-юг). Изменения небольшие, например, $\beta = 1.62 \cdot 10^{-13}$ см $^{-1}$ с $^{-1}$ при $\theta=45^\circ$, то есть является малым параметром.

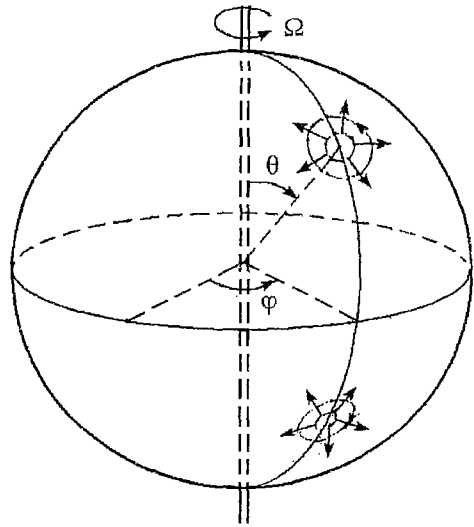


Рис. 2. Геострофические системы циклонов в северном и южном полушариях

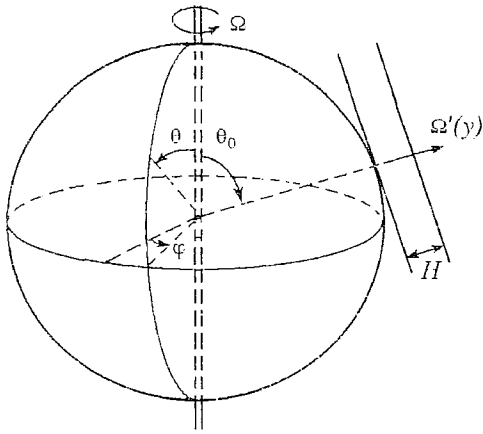


Рис. 3. Иллюстрация к приближению β -плоскости

частности, волны Россби.

Представленные приближения позволяют достаточно просто описать некоторые атмосферные и океанические движения за счет пренебрежения такими факторами, как вертикальные движения, кривизна поверхности, зависимость силы Кориолиса от широты и т.п. Моделирование атмосферных движений и океанических течений, находящихся под определяющим влиянием этих факторов, требует рассмотрения более сложной задачи о движении вращающейся в сферическом слое жидкости в полной области – от полюса до полюса.

2. Сферическое течение Куэтта: перераспределение углового момента и влияние силы Кориолиса

Сферическим течением Куэтта по аналогии с классическими плоским и цилиндрическим течениями Куэтта принято называть нелинейное сдвиговое течение несжимаемой вязкой жидкости между концентрическими сферами, возникающее вследствие вращения одной или обеих граничных сфер вокруг общей оси.

Аналогия, однако, неполная. Чтобы стало ясным не только количественное, но и качественное различие между этими задачами, опишем коротко плоское и цилиндрическое течения Куэтта – течения вязкой несжимаемой жидкости между бесконечными вращающимися дисками и цилиндрами.

Если не вводить сложных определений, то основным течением называется единственное стационарное течение, сформировавшееся при малых значениях числа Рейнольдса и абсолютно устойчивое (не меняющее своей топологии) при любых начальных и граничных условиях. Плоское и цилиндрическое течения Куэтта имеют аналитическое одномерное решение для основного течения.

При малых значениях числа Рейнольдса плоское течение Куэтта описывается автомодельным решением Кармана. С ростом числа Рейнольдса Re на дисках формируются пограничные слои. Поле течения состоит из пограничных слоев на вращающихся со скоростями ω_1 и ω_2 границах (здесь за счет вязкости угловой момент передается от границ слоя к жидкости) и внутренней области, которая вращается как твердое тело с промежуточной между ω_1 и ω_2 скоростью (невязкое ядро течения). Баланс силы Кориолиса и градиента давления приводит к тому, что в пограничный слой на более быстро вращающемся диске жидкость поступает, а на более медленном диске наблюдается ее отток (рис. 4).

Аналитическое решение для невязкого ядра течения одномерно (зависит только от расстояния от оси вращения), имеет одну компоненту скорости и с

ростом числа Рейнольдса Re меняется лишь амплитуда решения. Таких особенностей, которые могут изменить характер течения (например, наличие боковых границ или быстрое противоположное вращение дисков), мы здесь касаться не будем.

Основное течение для цилиндрического течения Куэтта также описывается аналитическим решением. Это – единственное стационарное решение уравнений Навье – Стокса, зависящее только от расстояния от оси вращения r и принимающее заданные значения на стенках вращающихся цилиндров

$$u_r = 0, \quad u_\theta = Ar + B/r, \quad u_z = 0.$$

Здесь $\{u_r, u_\theta, u_z\}$ – проекции вектора

скорости в цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$; A и B – константы, определяемые граничными условиями, $A = (r_2^2\omega_2 - r_1^2\omega_1)/(r_2^2 - r_1^2)$, $B = -r_1^2r_2^2(\omega_2 - \omega_1)/(r_2^2 - r_1^2)$.

Аналитическое решение для основного течения между вращающимися цилиндрами одномерно (зависит только от расстояния от оси вращения), имеет одну компоненту скорости и с ростом числа Рейнольдса Re вплоть до критического значения меняется лишь амплитуда решения.

С ростом числа Рейнольдса под влиянием центробежного механизма основное течение теряет устойчивость с соблюдением принципа смены устойчивости и образованием регулярного установившегося осесимметричного вторичного движения в виде стопки наложенных друг на друга торов примерно квадратного сечения – вихрей Тейлора. В результате потери устойчивости этого стационарного вторичного течения возникают периодические во времени волнистые вихри Тейлора.

Поскольку на цилиндрическое течение Куэтта не действуют силы, зависящие от координаты z , одинаковые вихри Тейлора занимают всю область течения: от $-\infty$ до $+\infty$. Отметим также, что механизм потери устойчивости, форма вторичного течения и критическое значение числа Рейнольдса не зависят от толщины слоя жидкости.

Как и в случае с вращающимися бесконечными дисками, мы не обсуждаем вопросы конечности границ и связанных с ними краевых эффектов.

Задача о движении несжимаемой вязкой жидкости во вращающемся сферическом слое, сферическое течение Куэтта (область течения показана на рис. 5, постановку задачи см. в Приложении и [7,9]), не имеет аналитического решения для основного течения. Получены лишь различные приближенные решения, справедливые при некоторых предельных значениях определяющих параметров задачи Re , δ , ω^* . Например, при малых и больших Re , в очень тонких слоях или в случае почти твердотельного быстрого вращения.

Так при малых Re решение может быть получено в виде ряда по целым положительным степеням числа Рейнольдса $U = \sum U_k Re^k$. Все четные члены этого разложения описывают дифференциальное вращение, а нечетные – меридиональную циркуляцию. Выпишем нулевой член U_φ^0 разложения [1], описывающий течение Стокса (когда вязкие члены пренебрежимо малы по сравнению с инерционными), и первый [10], описывающий функцию тока Ψ_{φ^1} меридионального течения

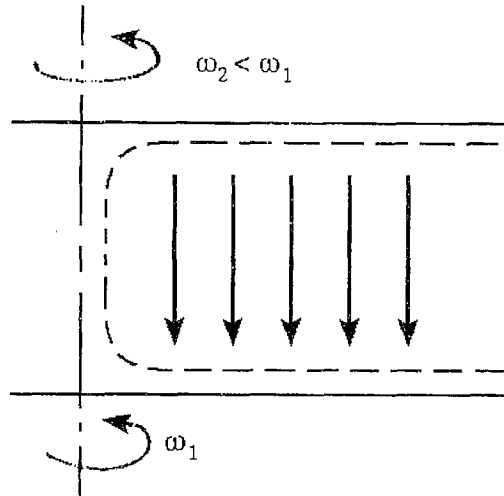
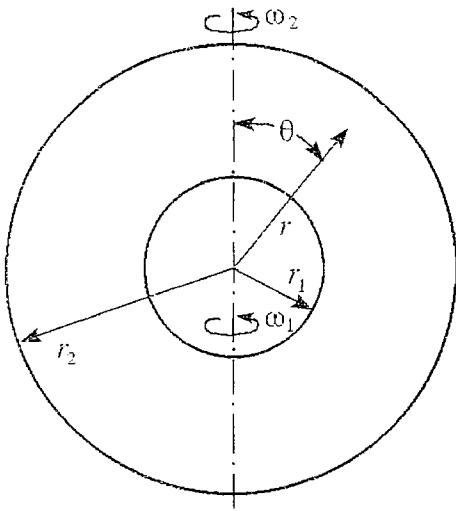


Рис. 4. Область течения между вращающимися дисками



$$U_{\phi}^0 = \frac{[(a^3\omega^* - 1)r^3 - a^3(\omega^* - 1)]\sin\theta}{(a^3 - 1)r^2}, \quad (2.1)$$

$$\Psi_{r\theta}^1 = \Psi(r)P_2^1(\theta)\sin\theta, \quad (2.2)$$

где $\Psi(r) = (Ar^3 + Br^2 + Cr + D)(r-1)^2(r-a)^2/r^2$, коэффициенты A, B, C, D являются функциями a и ω^* .

Таким образом, уже при малых значениях числа Рейнольдса Re течение между вращающимися сферами неоднородно и имеет все три компоненты скорости. Оно осесимметрично, симметрично относительно плоскости экватора и состоит из вращения вокруг оси и меридиональной циркуляции.

Рис. 5. Вид области течения между вращающимися сферами

Вращение вокруг оси происходит с угловой скоростью, равной $U_{\phi}^0/r\sin\theta$, не

зависящей от угла θ . То есть поверхности равной угловой скорости жидкости представляют собой концентрические сферы, а их проекции на меридиональную плоскость (линии равной угловой скорости) являются концентрическими окружностями. Вид меридиональной циркуляции определяется соотношением между угловыми скоростями вращения граничных сфер.

Основные типы меридиональной циркуляции показаны на рис. 6. Циркуляции I и III типов формируются, когда течение в основном определяется вращением внутренней или внешней сфер, соответственно. Циркуляция типа II формируется при смешанном влиянии вращения граничных сфер. На рисунке показаны проекции линий тока на меридиональную плоскость, далее будем называть их линиями тока меридиональной циркуляции.

Замена сферического слоя цилиндрическим (в приэкваториальных областях) или плоским (вблизи полюсов), применяемая для упрощения в прикладных задачах, далеко не всегда оправдана. При переносе результатов, полученных для плоского и цилиндрического течений Куэтта, на течение во вращающемся сферическом слое можно прийти к выводам, неверным не только количественно, но и качественно.

Сферическая геометрия во вращающихся системах приводит к зависимости силы Кориолиса от широты и появлению качественно новых эффектов в течениях жидкости. Например, некоторые явления, стационарные в плоском слое, в сферическом случае приобретают волновую природу. Так, волны Россби, характерные для атмосфер планет и океанов, появляются только в объектах, где

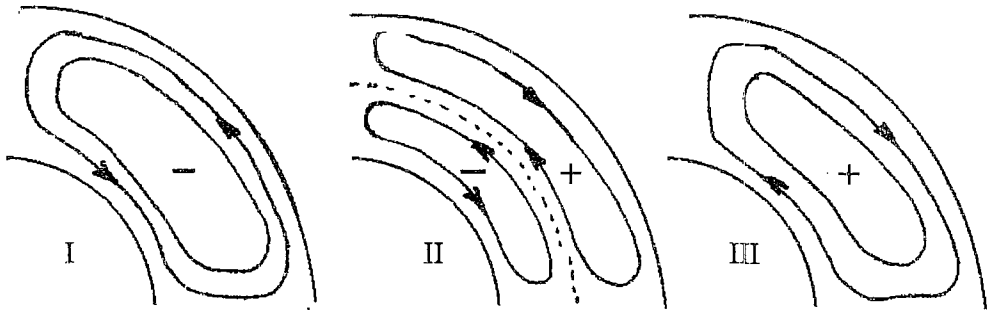


Рис. 6. Основные типы меридиональной циркуляции при малых Re

сила Кориолиса зависит от широты (или, например, от угла наклона между осью вращения и направлением силы гравитации в скрещенных полях).

Кроме того, что основное течение не имеет аналитического решения, неоднородно (зависит от двух координат r и θ) и имеет все три компоненты скорости, оно существенно зависит от числа Рейнольдса. От Re зависит не только амплитуда, но и форма движения – и дифференциального вращения и меридиональной циркуляции.

С ростом числа Рейнольдса интенсивность течения растет, оно трансформируется и теряет устойчивость. Степень трансформации течения перед потерей устойчивости, сам механизм потери устойчивости и вид формирующегося вторичного течения (еще одно отличие от плоского и цилиндрического случаев) существенно зависят от толщины слоя жидкости. Известно [8, 11], что в слоях разной толщины с ростом Re течение проходит одну, две или все три стадии развития: с малоинтенсивной меридиональной циркуляцией, с меридиональной циркуляцией типа «кошачий глаз» (с сепаратрисой внутри слоя – см. стр. 16) и с сильно развитой меридиональной циркуляцией.

Полученные при численном решении начально–краевой задачи результаты [8] позволяют различить слои «толстые», «тонкие» и слои «средней или промежуточной» толщины ($\delta^{00} < \delta < \delta^0$), в зависимости от механизма, управляющего потерей устойчивости основного течения. «Критические» значения толщины слоя δ^{00} и δ^0 зависят от соотношения между угловыми скоростями вращения граничных сфер. В случае вращения одной внутренней сферы $\delta^{00}=0.21$ и $\delta^0=0.43$.

В тонких сферических слоях малоинтенсивная меридиональная циркуляция оказывает слабое влияние на азимутальное течение. Линии равной угловой скорости искажаются очень слабо и почти не отличаются от концентрических окружностей. С ростом Re (или уменьшением числа Экмана $E=1/\Omega_{\text{ск}}L^2$) в слое создаются условия, необходимые для включения центробежного механизма и наступления центробежной неустойчивости, аналогичные условиям в цилиндрическом течении Куэтта.

Линейный анализ устойчивости сферического течения Куэтта (см. Приложение и [11–13]) показал, что основное течение в тонких слоях неустойчиво по отношению к монотонным осесимметричным, но экваториально антисимметричным возмущениям. Наиболее опасное, наиболее быстро растущее возмущение представляет собой систему кольцевых вихрей с чередующимся направлением циркуляции, занимающих всю область течения от полюса до полюса. Число вихрей (номер полюидальной моды критического возмущения) зависит от толщины слоя жидкости; оно тем больше, чем тоньше слой.

На рис. 7 представлены графики изменения собственного значения λ с ростом числа Рейнольдса, полученные при изучении линейной устойчивости основного течения в слое $\delta=0.19$. Наименьшее критическое значение числа Рейнольдса Re_L достигается при значении азимутального волнового числа $m=0$; на том же графике для примера представлена кривая, полученная при $m=1$.

Для сравнения на рис. 7 приведены критические значения числа Рейнольдса Re_S и Re_N . Критическое значение Re_S получено при исследовании линейной устойчивости течения

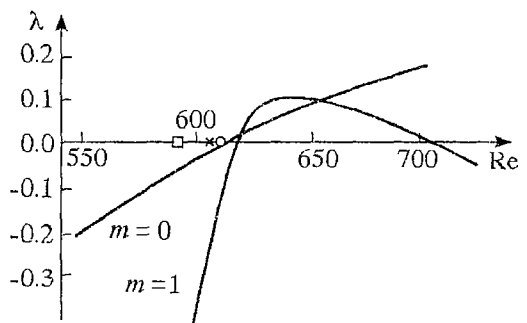


Рис. 7. Зависимость собственного значения от числа Рейнольдса, полученная в тонком слое $\delta=0.19$, \square – $Re_c=594$ – эксперимент (глобальная устойчивость); \ast – $Re_S=609$ – линейная устойчивость (течение Стокса); \circ – $Re_N=615$ – нелинейная задача; $Re_L=616$ – линейная устойчивость (основное течение)

Стокса $U_\phi^0(2.1)$, представляющего собой только вращение по концентрическим окружностям. Критическое значение Re_N получено при решении полной нелинейной задачи (нижняя граница существования вторичного режима).

Критическое значение Re_S оказалось меньше предела линейной устойчивости основного течения Re_L . То есть, перераспределение углового момента меридиональной циркуляцией, которая не учитывается течением Стокса, стабилизирует течение.

На рис. 8 представлены функция тока и схематическая картина линий тока меридионального течения критического возмущения, полученные для основного течения (слева) и для течения Стокса (справа). Наиболее быстро растущим оказалось возмущение, имеющее тороидальную компоненту с четными l и полоидальную – с нечетными, то есть антисимметричное относительно плоскости экватора: максимум функции тока достигается на экваторе и интенсивность циркуляции вихрей быстро падает от экватора к полюсам. Критическим для течения Стокса оказалось возмущение, симметричное по отношению к экватору, интенсивность его вихрей падает по направлению к полюсам очень плавно.

Таким образом даже в тонких слоях, где меридиональная циркуляция малоинтенсивна, необходимо учитывать ее влияние на распределение углового момента в жидкости. Оно оказывается не только количественным – меняется предел устойчивости, но и качественным – меняется сама форма критического возмущения.

Линейный анализ устойчивости имеет дело с бесконечно малыми экспоненциально растущими возмущениями. Он позволяет найти число Рейнольдса Re_L такое, что при $Re > Re_L$ основное течение неустойчиво, и определить форму наиболее быстро растущего, наиболее опасного возмущения. Однако, экспоненциально возмущения растут только на начальном этапе, очень скоро они перестают быть малыми и их поведение не подчиняется линейным уравнениям.

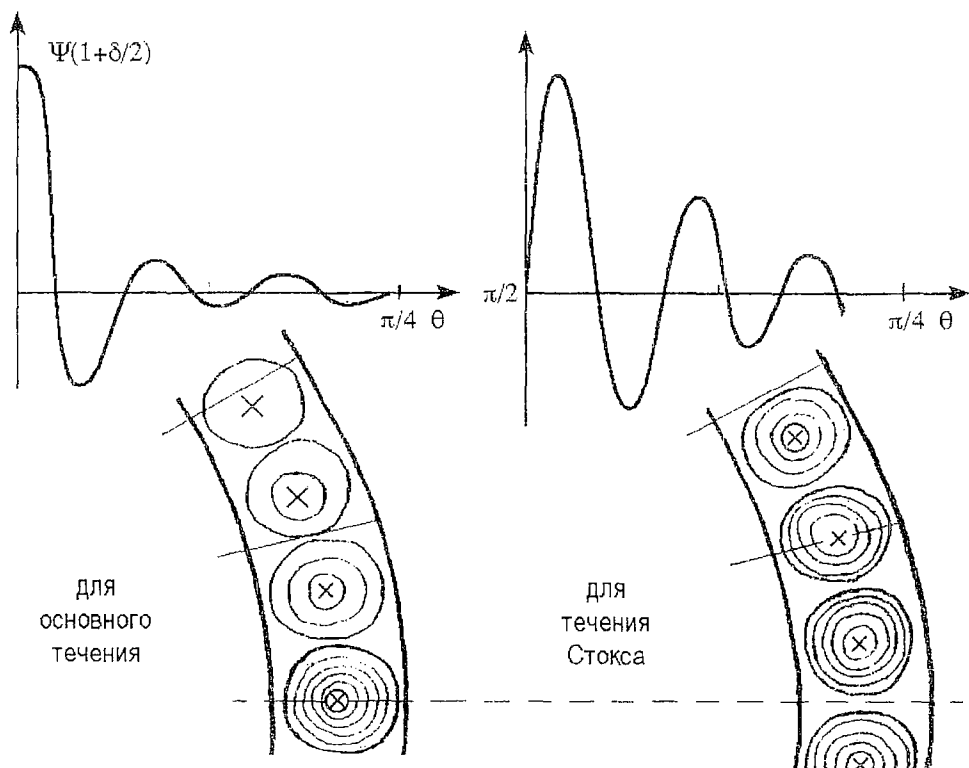


Рис. 8. Функция тока и схематическая картина линий тока критического возмущения, $\delta = 0.19$

Проблема отбора вторичного течения не решается методами линейной теории, форма и амплитуда вторичного течения могут быть определены только нелинейными методами. Численное решение нелинейной задачи показало, что основное течение в тонких сферических слоях теряет устойчивость с соблюдением принципа смены устойчивости и формированием стационарного осесимметричного вторичного течения в виде кольцевых вихрей, типа вихрей Тейлора в цилиндрическом течении Куэтта.

В сферическом слое сила Кориолиса зависит от широты, поэтому здесь условия, необходимые для наступления центробежной неустойчивости, выполняются только вблизи экватора, а не во всей области течения, как во вращающемся цилиндрическом слое. Формирующееся после потери устойчивости основного течения вторичное течение имеет кольцевые вихри, типа тейлоровских, только в приэкваториальной области. Остальная область течения занята «основной» меридиональной циркуляцией, которую кольцевые вихри отжимают на более высокие широты.

На рис. 9 показаны линии тока меридионального течения вторичного режима в близкой критической области Re . Таким образом, вторичный режим оказался симметричным относительно плоскости экватора (как и основное течение), несмотря на отсутствие такой симметрии у критического возмущения.

Детальный анализ перехода между основным и вторичным течениями показал, что этот переход осуществляется через нестационарный экваториально несимметричный режим. На рис. 10 представлены пространственные спектры радиальной (наиболее характерной) компоненты скорости в среднем сечении слоя в разные моменты времени t этого переходного режима. Пространственные спектры показаны отдельно для экваториально симметричной (сплошная линия) и экваториально несимметричной (штриховая линия) ее составляющих.

Основному течению соответствует пространственный спектр U_1 (показан отдельно слева вверху), имеющий только экваториально симметричную составляющую с двумя энергетически почти равноценными максимумами, ответственными за крупномасштабные меридиональные движения (максимум при $l=2$) и мелкомасштабные движения внутри меридиональной циркуляции (при $l=24 \div 26$).

Крупномасштабная часть течения в процессе всего нестационарного нелинейного переходного режима продолжает описываться только экваториально симметричной частью пространственного спектра. Перестройка вторичного максимума связана с появлением антисимметричной относительно экватора составляющей. С ее появлением второй максимум разрушается и перестраивается в двугорбый ($l=18, l=38$, спектр U_1 показан справа вверху), характерный для вторичного двухкольцевого режима с отжатой на более высокие широты основной меридиональной циркуляцией. Экваториально несимметричная часть спектра участвует только в процессе перестройки, нестационарного перехода, а затем быстро уменьшается до нуля.

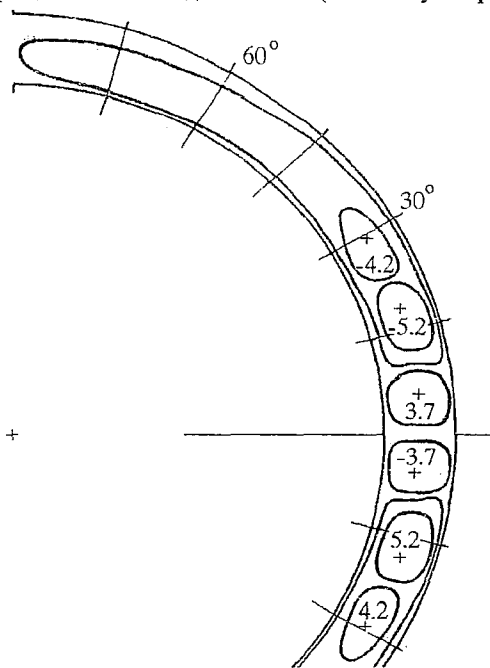


Рис. 9. Меридиональная циркуляция вторичного течения, $\delta = 0.19$

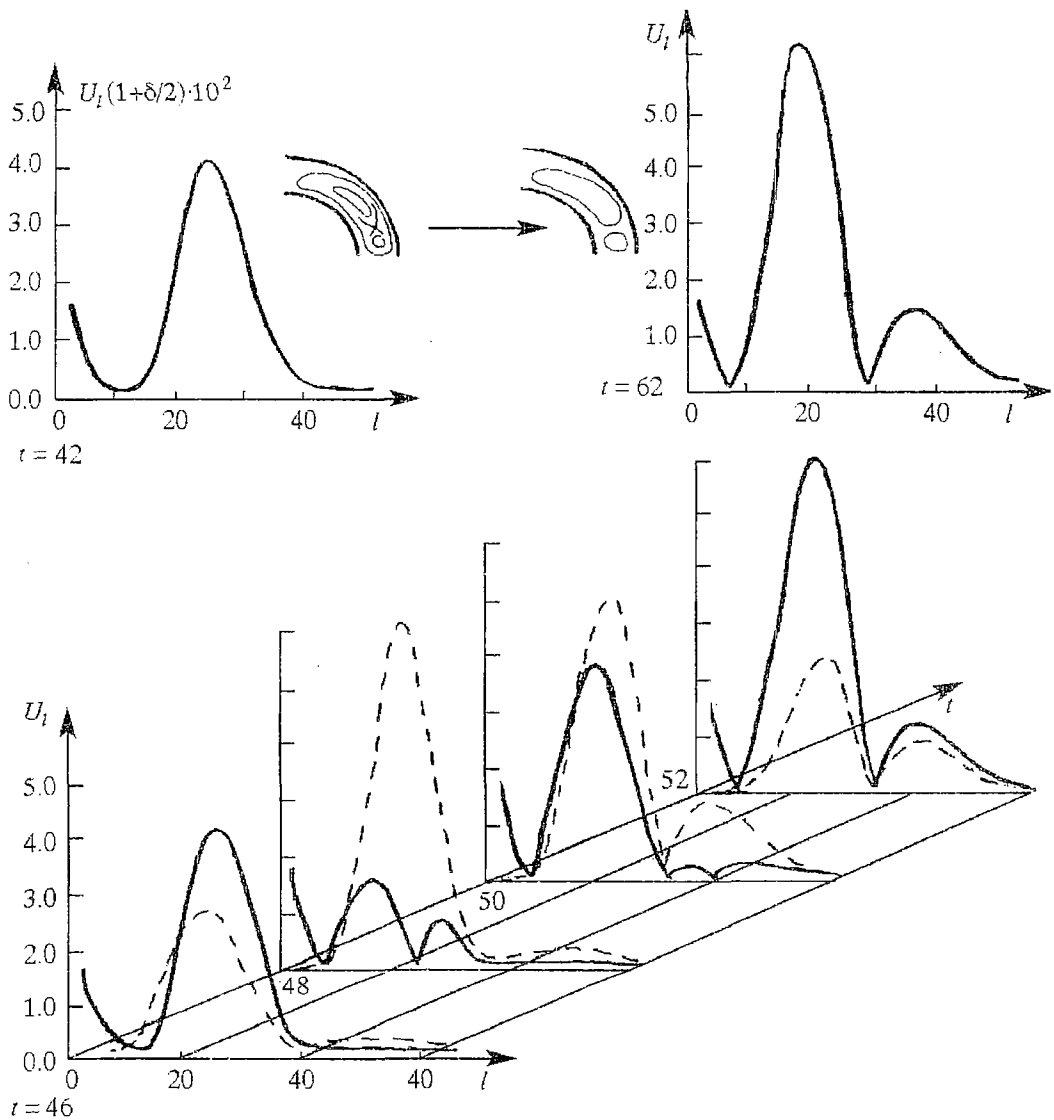


Рис. 10. Эволюция пространственного спектра радиальной компоненты скорости в процессе нелинейного нестационарного перехода ко вторичному режиму, $\delta = 0.19$

На рис. 11 показаны линии тока меридионального течения в разные моменты времени процесса перестройки. Представлена только наиболее интересная приэкваториальная область течения. После установления основного течения с меридиональной циркуляцией типа «кошачий глаз» (при $t=42$) происходит кратковременная потеря симметрии течения относительно плоскости экватора. Образуется вторичное течение с парой кольцевых вихрей в приэкваториальной области и основной меридиональной циркуляцией на более высоких широтах, которое постепенно восстанавливает экваториальную симметрию.

Полученные численно на основе решения нелинейной и линейной задач результаты согласуются с результатами лабораторных экспериментов [14–18].

С ростом числа Рейнольдса при закритических значениях Re формируются режимы с большим числом кольцевых вихрей в области экватора. Количество режимов с кольцевыми вихрями (численно получены все те и только те режимы, что наблюдались в эксперименте) тем больше, чем меньше толщина слоя жидкости δ . Так, если в слое толщины $\delta=0.11$ существуют четыре режима (от двух

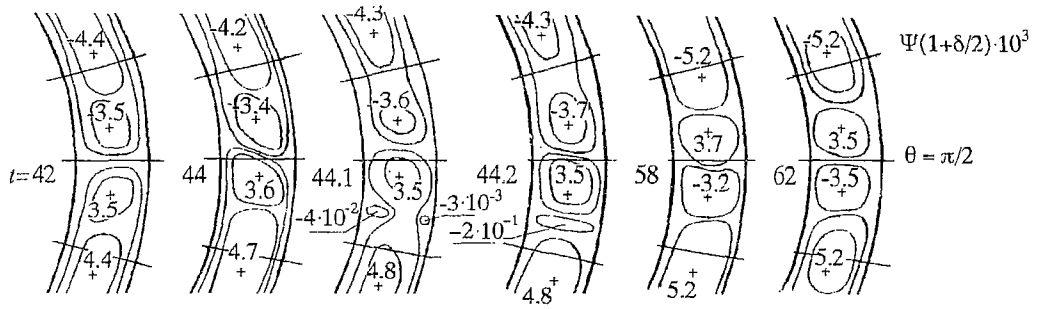


Рис. 11. Картины линий тока в разные моменты времени в процессе перехода ко вторичному режиму, $\delta = 0.19$

до восьми кольцевых вихрей [19]), то в слое $\delta=0.3$ – всего один режим с двумя кольцевыми вихрями.

Представленные на рис. 12 диаграммы переходов между режимами с разным числом кольцевых вихрей (i – количество вихрей в полусфере, полное их число равно $2i$) свидетельствуют о неединственности решения задачи в закритической области значений Re и наличии гистерезиса. Неединственность решения связана с зависимостью от начальных условий и от условий выхода на заданный режим – от условий на всем пути перехода.

В толстых сферических слоях с ростом Re становящаяся все более интенсивной меридиональная циркуляция начинает активно влиять на азимутальное течение.

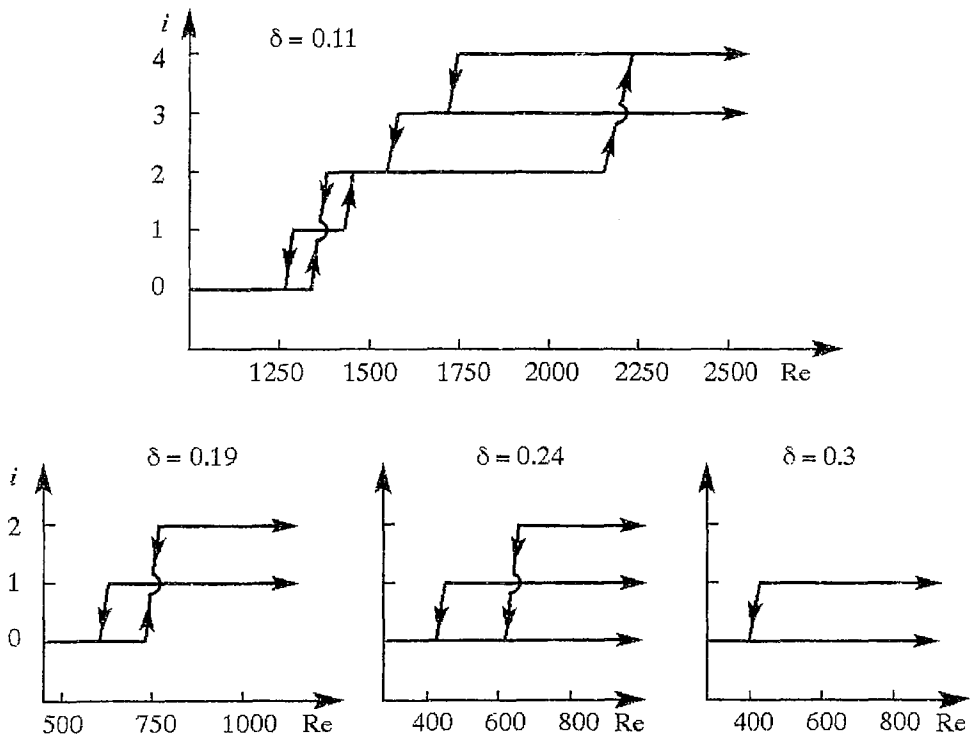


Рис. 12. Диаграммы переходов между режимами с разным числом кольцевых вихрей в слоях разной толщины

На рис. 13 представлен пример такого влияния меридиональной циркуляции на дифференциальное вращение в слое толщины $\delta=1$. При значениях числа Рейнольдса $Re=50, 200$ и 500 показаны линии тока меридиональной циркуляции (а) и линии равной угловой скорости (б) в случае вращения одной внутренней сферы, $\omega^*=0$.

Меридиональное движение, вообще говоря, является движением второго порядка малости по сравнению с азимутальным и не должно оказывать на него заметного влияния. Так оно и есть при $Re=50$ – меридиональное течение малоинтенсивно, а азимутальное почти не отличается от решения Стокса.

В тонких слоях меридиональная циркуляция остается слабой, практически не

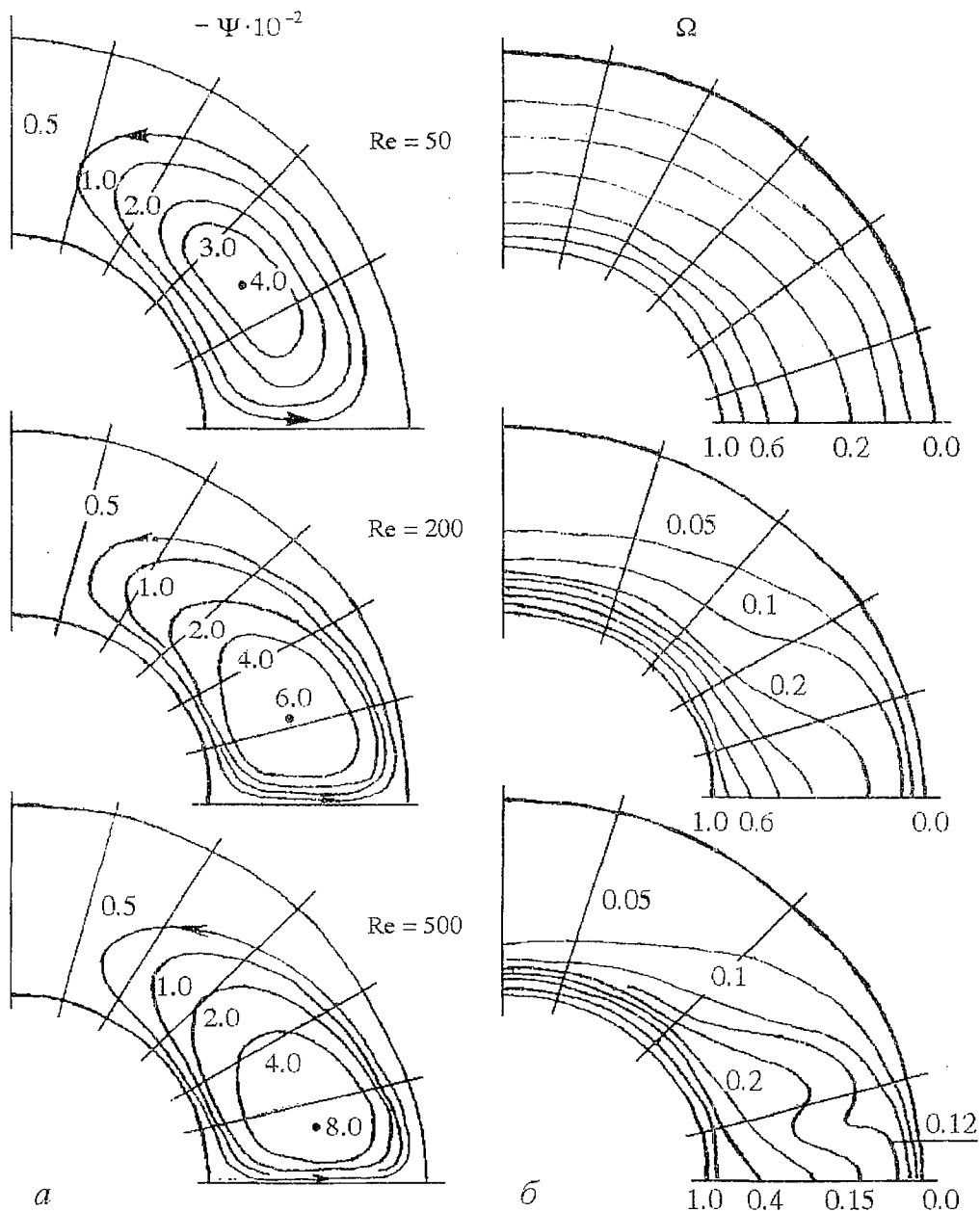


Рис. 13. Изменение картин линий тока (а) и равной угловой скорости (б) с ростом Re в толстом слое $\delta=1$ в случае вращения одной внутренней сферы

влияет на распределение завихренности в жидкости, и с ростом Re создаются условия, благоприятные для развития центробежной неустойчивости. В толстых слоях, однако, течение сильнее зависит от числа Рейнольдса, и с ростом Re картина меняется.

При $Re=200$ меридиональная циркуляция становится более интенсивной, центр ее смещается в сторону плоскости экватора. Изолинии угловой скорости, которые при малых Re представляют собой почти concentрические окружности, с ростом Re начинают искажаться. Наиболее заметно это в центральной области меридионального вихря, где компоненты скорости меридионального течения максимальны. В областях полюсов, прилегающих к внешней неподвижной сфере, интенсивность меридиональной циркуляции уменьшается и здесь образуются застойные зоны.

При $Re=500$ центр ставшей еще более интенсивной меридиональной циркуляции опускается к плоскости экватора. На внутренней и внешней граничных сферах в приэкваториальной зоне формируются экмановские пограничные слои. Вблизи плоскости экватора становится все более интенсивным и узким, приблизительно $7 - 8$ градусов, сдвиговый слой (на рис. 14 более подробно показана экваториальная область). В нем сосредоточен практически весь перенос жидкости от внутренней сферы к внешней, перенос той же массы жидкости обратно от внешней сферы к внутренней осуществляется в области, почти в десять раз большей.

Сравнение картин линий равной угловой скорости жидкости при $Re=50, 200$ и 500 показывает, что угловая скорость уменьшается в средней части приэкваториальной области за счет сгущения линий в сформировавшихся на сферах пограничных слоях. Самые заметные изменения азимутальной скорости можно видеть в центре меридионального вихря — здесь происходит резкое уменьшение угловой скорости в небольшой области, возникают резкие градиенты и формируются перегибы в азимутальной компоненте скорости.

Таким образом, меридиональная циркуляция перераспределяет угловой момент в жидкости, и условия, необходимые для центробежной неустойчивости, не реализуются. Причиной потери устойчивости основного течения в толстом слое могут стать:

- неустойчивость, связанная с перегибами в профиле азимутальной скорости;

- неустойчивость свободного сдвигового слоя на экваторе.

Механизмы возникновения неустойчивости в этих двух случаях принципиально различны: неустойчивость вязкого сдвигового слоя или маловязкого ядра течения с перегибом скорости.

В экваториальном сдвиговом слое (очерчен штриховой линией на рис. 14) частица жидкости движется от внутренней сферы к внешней с радиальной компонентой скорости U (она максимальна в середине слоя и обращается в ноль на границах) и одновременно вращается вокруг оси с линейной азимутальной скоростью W ; третья, нормальная к плоскости экватора, компонента скорости V здесь очень мала (она резко растет в пограничных слоях на граничных

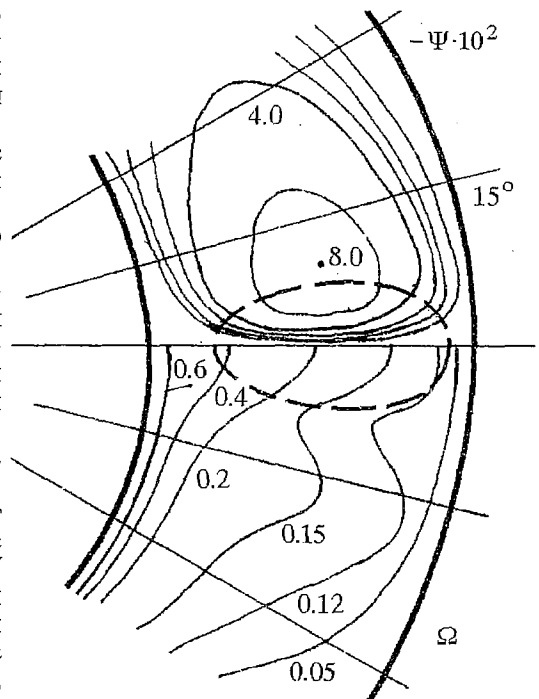


Рис. 14. Фрагмент картин линий тока меридионального течения (в верхней части) и изолиний азимутальной скорости (в нижней части), приведенных на рис. 13 при $Re = 500$

сферах). Таким образом в области экватора осуществляется плоское движение частиц жидкости по спиральным траекториям; при приближении к внешней сфере частицы отклоняются вверх в северном полушарии и вниз в южном.

На одной из конференций эта область течения была названа «радиально-экваториальной струей» [20], по-видимому, по аналогии с радиальным течением в экваториальной плоскости, которое возникает при вращении сферы в безграничной жидкости. Автор доклада [20] именно в неустойчивости «радиально-экваториальной струи» видит причину потери устойчивости основного течения в толстых слоях.

В [14] высказано предположение, что ответственным за неустойчивость в толстых слоях является механизм невязкой релеевской неустойчивости. Это предположение представляется нам верным, однако, требует строгого обоснования.

Связана ли неустойчивость в толстых слоях с перегибами в профиле азимутальной скорости или с «радиально-экваториальной струей», невязкий или вязкий механизм ответствен за неустойчивость основного течения в толстом сферическом слое, покажут дальнейшие исследования.

Решение линейной задачи об устойчивости показало, что течение в толстых слоях устойчиво по отношению к осесимметричным возмущениям. Критическим для основного течения в толстых слоях является немонотонное неосесимметричное антисимметричное по отношению к плоскости экватора возмущение.

Форма критического возмущения зависит от толщины слоя жидкости; азимутальное (полоидальное) волновое число m , определяющее периодичность возмущения в направлении вращения, уменьшается с ростом толщины слоя жидкости. На рис. 15 представлены нейтральные кривые в плоскости (Re, m) , полученные в слоях разной толщины. Критические возмущения имеют вид бегущих азимутальных волн с $m=6, 4$ и 3 , соответственно, со сложной полоидальной структурой; $Re_c=1150, 493$ и 417 , соответственно.

Сравнение с экспериментом [14, 17] дает хорошее согласие критических значений числа Рейнольдса, полученных из эксперимента и по линейной теории. Как показали эксперименты, вторичное течение в толстых слоях трехмерно и нестационарно.

Следует отметить, что номер азимутальной моды вторичного течения, полученного в эксперименте при $\delta=0.54$ меньше номера азимутальной моды наиболее опасного возмущения, который дает линейная теория в слое $\delta=0.5$. Наиболее быстро растущим оказалось возмущение с азимутальным волновым числом $m=6$, тогда как в эксперименте после потери устойчивости основного течения устанавливалось вторичное течение с $m=5$. Вряд ли это можно объяснить различием в толщине слоя ($\delta=0.54$ в лабораторном эксперименте и $\delta=0.5$ в численном), поскольку в лабораторном эксперименте тот же номер азимутальной моды $m=5$ получен и для вторичного течения в слое еще меньшей толщины, при $\delta=0.398$.

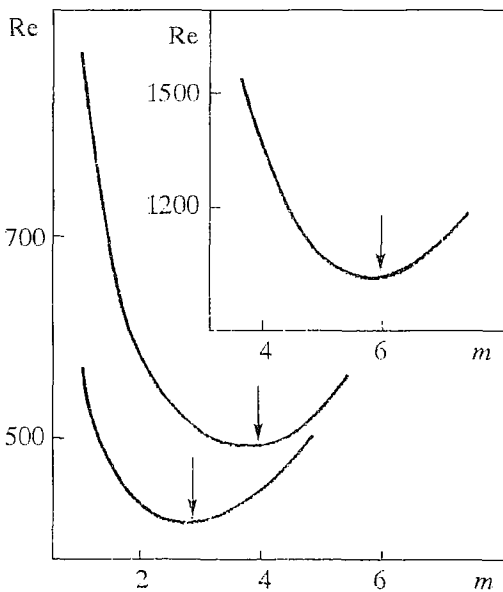


Рис. 15. Нейтральные кривые устойчивости основного течения в толстых слоях $\delta = 0.5; 1.0; 2.0$ (сверху вниз)

Почти твердотельное быстрое вращение. В качестве примера приведем один из очень интересных случаев движения во вращающемся сферическом слое – почти твердотельное быстрое вращение, который может послужить объяснению экваториального ускорения, наблюдаемого в атмосферах планет-гигантов.

В предельном случае при очень больших числах Рейнольдса и очень близких угловых скоростях вращения граничных сфер Праудмен и Стюартсон [21, 22] получили аналитическое решение методом сращиваемых внутренних и внешних асимптотических разложений. Оказалось, что параллельный оси вращения тонкий свободный сдвиговый слой сложной структуры (соосный цилиндр с радиусом, равным радиусу внутренней сферы) отделяет внутреннее невязкое ядро течения с экмановскими пограничными слоями на сферах от внешней области твердотельного вращения.

На рис. 16 показана структура течения, формирующегося в сферическом слое в задаче Стюартсона – Праудмена. В невязком ядре жидкость вращается с угловой скоростью промежуточной между скоростями вращения граничных сфер; меридиональное течение представляет собой движение по цилиндрическим поверхностям от медленно вращающейся к более быстро вращающейся сфере, см. рис. 16, а. Оценочные по числу Рейнольдса толщины пограничных слоев изображены на рис. 16, б [22].

Возвратное течение осуществляется в экмановских пограничных слоях и в свободном сдвиговом слое, сложная структура которого схематически показана на

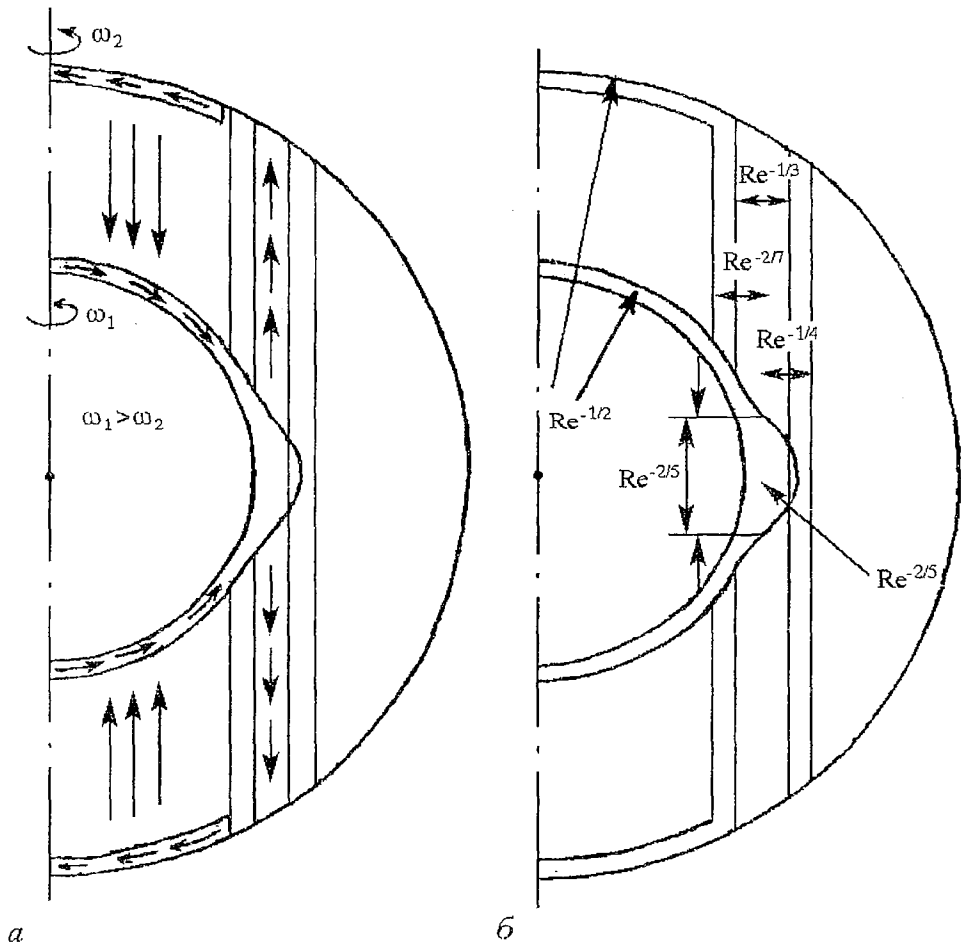


Рис. 16. Схематический вид линий тока меридионального течения (а) и структура пограничных слоев [22] (б), формирующихся в задаче Стюартсона – Праудмена в предельном случае при быстром почти твердотельном вращении

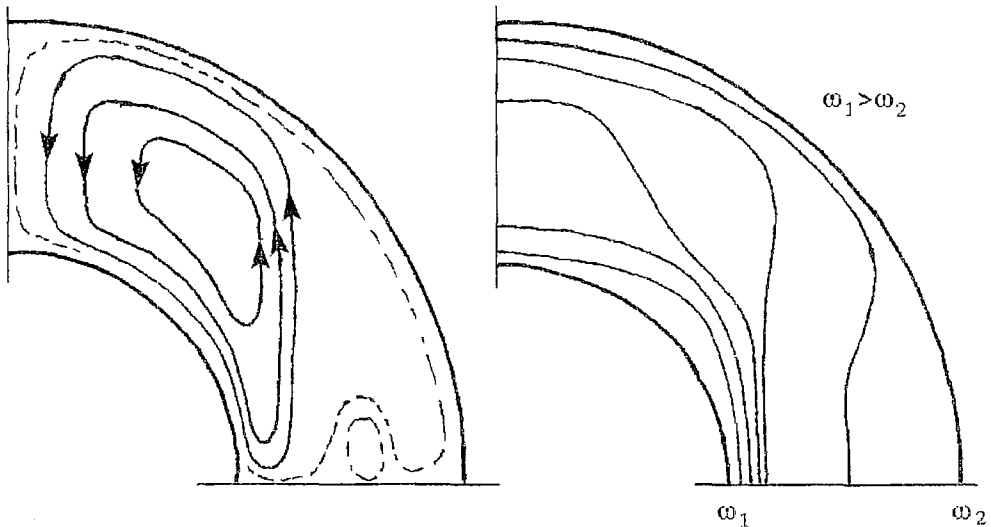


Рис. 17. Тенденция к формированию свободного сдвигового слоя при средних значениях параметров

правом рисунке. В разных областях «многослойного» свободного сдвигового слоя осуществляется возвратный поток жидкости, сглаживается разрыв азимутальной скорости, сглаживаются разрывы во второй производной азимутальной скорости и в перпендикулярной оси вращения компоненте меридиональной скорости.

Численное решение задачи в общем случае, проведенное нами на основе нелинейных нестационарных уравнений Навье – Стокса, позволило проследить формирование почти цилиндрического свободного сдвигового слоя и экмановских пограничных слоев на сферах с ростом числа Рейнольдса. Тенденция к формированию свободного сдвигового слоя выявляется уже при средних значениях числа Рейнольдса. Пример такого течения (линии тока меридионального течения и линии равных угловых скоростей) показан на рис. 17.

Формирование свободного сдвигового слоя наблюдалось при разных граничных условиях на внешней сфере: при численном решении кроме кинематического условия прилипания задавалось динамическое условие с непрерывно распределенными вязкими напряжениями. Если в первом случае свободный цилиндрический сдвиговый слой опирается на пограничные экмановские слои на внутренней и внешней граничных сферах, то во втором случае он выходит на внешнюю границу сферического слоя и приводит к резкому изменению угловой скорости на поверхности.

Проведенные оценки позволяют предположить, что выходом сдвигового слоя на поверхность может быть объяснено экваториальное ускорение, наблюдаемое в атмосферах планет-гигантов.

На рис. 18 схематически показана структура крупномасштабных движений в атмосфере Юпитера, полученная на основании результатов [23–28] и сведений об атмосфере этой планеты [29,30]. Существенная зависимость

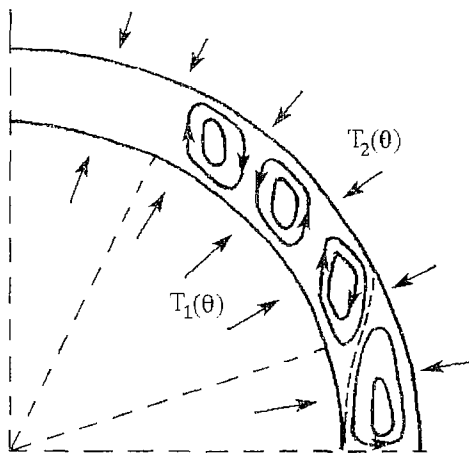


Рис. 18. Схематический вид структуры глобальных течений

термодинамических характеристик во вращающемся сферическом слое от широты приводит к тому, что структура движений на разных широтах различна.

На средних широтах крупномасштабная конвекция осесимметрична. Сформировавшиеся конвективные ячейки образуют восходящие теплые и нисходящие холодные потоки, соответствующие зонам и поясам в атмосфере Юпитера. Сила Кориолиса разворачивает эти потоки (см. раздел 1) и создает антициклонную завихренность в зонах и циклоническую в поясах.

Вблизи экватора формируется динамическая зона с очень слабой меридиональной циркуляцией, слабой конвекцией, максимальным солнечным подогревом и экваториальной струей. Динамическая зона ограничена свободным сдвиговым слоем типа слоя, возникающего в задаче Стюартсона – Праудмена (см. рис. 16 и 17), вдоль слоя угловой момент выносится в верхние слои атмосферы и относительная линейная скорость там может быть равна $(\omega_1 - \omega_2)r_2$.

Вблизи полюсов солнечный подогрев слабее, чем на экваторе, роль вращения возрастает, формируются трехмерные конвективные ячейки.

Заключение

Таким образом, при численном и лабораторном моделировании динамических и термодинамических процессов в атмосферах, океанах и недрах планет необходимо учитывать определяющее влияние вращения планеты и кривизны поверхности. Вращение является совершенно необходимым фактором для циркуляции большого масштаба в атмосфере и океане и большинства мелкомасштабных течений. Кривизна поверхности, форма области течения оказываются определяющими для основного и для вторичных течений, которые из-за нелинейных взаимодействий могут оказывать заметное влияние на развитие результирующих термодинамических процессов.

Влияние завихренности и восстанавливающее действие силы Кориолиса рассмотрены на примерах достаточно простых моделей, используемых в динамической метеорологии и океанографии: приближение мелкой воды для жидкости, вращающейся на сфере, приближение β -плоскости, а также на течениях, возникающих между вращающимися бесконечными дисками и цилиндрами. Зависимость силы Кориолиса от широты оказывается принципиально важной для движений разных масштабов.

Во многих случаях это влечет за собой необходимость изучения движений, формирующихся во вращающихся сферических слоях и их устойчивости. Проведено численное решение нелинейной задачи об осесимметричном сферическом течении Куэтта и линейной задачи об его устойчивости по отношению к малым трехмерным возмущениям. Приведем сводку основных результатов:

– основное течение состоит из азимутального вращения вокруг оси и меридиональной циркуляции и с ростом числа Рейнольдса в зависимости от толщины слоя жидкости теряет устойчивость в одной из трех стадий развития меридиональной циркуляции: малоинтенсивная меридиональная циркуляция, меридиональное течение типа «кошачий глаз» и сильно развитая меридиональная циркуляция;

– течение в тонких слоях теряет устойчивость на стадии малоинтенсивной меридиональной циркуляции в результате центробежной неустойчивости с соблюдением принципа смены устойчивости; критическим является осесимметричное несимметричное относительно плоскости экватора возмущение. Численное решение нелинейной задачи показало, что формирование вторичного течения происходит в результате нелинейного нестационарного переходного режима, в ходе которого основное течение на некоторое время теряет одну из своих симметрий – симметрию относительно плоскости экватора (затем в процессе перехода она восстанавливается). Меридиональная циркуляция

вторичного течения состоит из пары кольцевых вихрей типа тейлоровских, отжимающих «основную» меридиональную циркуляцию на более высокие широты. В закритической области Re обнаружены неединственность течения и явление гистерезиса:

– меридиональная циркуляция в толстых слоях оказывает заметное влияние на основное дифференциальное вращение, перераспределяет угловой момент в жидкости, и в результате условия, необходимые для центробежной неустойчивости, не реализуются. Формирующиеся перегибы в профиле азимутальной скорости по-видимому служат причиной потери устойчивости основного течения. Линейный анализ устойчивости показал, что критическим для основного течения в толстых слоях является немонотонное неосесимметричное возмущение, антисимметричное относительно плоскости экватора. Форма критического возмущения зависит от толщины слоя жидкости; тороидальное (азимутальное) волновое число m , определяющее периодичность возмущения в направлении вращения, уменьшается с ростом толщины слоя жидкости;

– рассмотрено течение во вращающемся сферическом слое в случае почти твердотельного быстрого вращения с разными граничными условиями на внешней сфере (кроме кинематического условия прилипания задавалось динамическое условие с непрерывно распределенными вязкими напряжениями), которое может послужить объяснению экваториального ускорения, наблюдаемого в атмосферах планет-гигантов, например, в атмосфере Юпитера.

При изучении многопараметрических процессов, какими являются термодинамические процессы в системе океан-атмосфера, разумно искать понимание отдельных явлений и управляющих физических механизмов посредством их моделирования. Численное моделирование предоставляет очень важную в таких случаях возможность выделить определенные процессы и рассмотреть их независимо в контролируемых условиях на основе ясной математической постановки и с минимальным числом основополагающих допущений и искомым переменных. По нашему мнению, задача о движениях во вращающихся сферических слоях при различных динамических и тепловых воздействиях может служить для этих целей – быть основой для изучения физических механизмов, управляющих термодинамическими процессами в атмосфере Земли и других планет. Эффекты, связанные с неустойчивостью, с неединственностью решений и с гистерезисом особенно важны в природных процессах.

Приложение

Постановка и метод решения задачи о сферическом течении Куэтта (нелинейной задачи) [7, 9]. Движение несжимаемой вязкой жидкости во вращающемся сферическом слое описывается начально-краевой задачей

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} &= -\nabla P + Re^{-1} \Delta \mathbf{U}, \\ \operatorname{div} \mathbf{U} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$U = V = 0, \quad W = \sin \theta \quad \text{при } r = 1,$$

$$U = V = 0, \quad W = \omega a \sin \theta \quad \text{при } r = 1 + \delta = a,$$

$$U = U^*, \quad V = V^*, \quad W = W^* \quad \text{при } t = 0;$$

в предположении осевой симметрии необходимо учесть, что $\partial_\varphi = 0$ и добавить граничное условие на оси

$$\partial_\theta U = V = W = 0 \text{ при } \theta = 0, \pi.$$

Здесь $\{U, V, W\}$ – проекции вектора скорости \mathbf{U} в сферической системе координат $\{r, \theta, \varphi\}$, P – давление, t – время, r_i, ω_i – радиусы и угловые скорости вращения внутренней ($i=1$) и внешней ($i=2$) граничных сфер; Re, δ, ω^* – введенные в первой части число Рейнольдса, толщина слоя жидкости и отношение угловых скоростей вращения граничных сфер – параметры подобия, определяющие характер течения; за характерные масштабы длины, времени, скорости и давления приняты $r_1, \omega_1^{-1}, r_1 \omega_1, \rho r_1^2 \omega_1^2$, соответственно; ν и ρ – постоянный коэффициент кинематической вязкости и плотность жидкости.

Едва ли не единственной возможностью упростить поиск решения, заложенной в самой задаче, является сферическая геометрия области течения. Это позволяет искать решение системы (1) в виде рядов по сферическим гармоникам $Y^m(\theta, \varphi) = P^m(x) \exp(im\varphi)$, $x = \cos\theta$ с коэффициентами (амплитудами), зависящими только от r и t . При поиске осесимметричного основного течения можно ограничиться представлением решения в виде рядов по присоединенным функциям Лежандра $P^m(x)$, $m=0, 1$

$$\begin{aligned} U(r, \theta, t) &= \sum_{l=0}^L U_l(r, t) P_l^0(x), \\ V(r, \theta, t) &= \sum_{l=1}^L V_l(r, t) P_l^1(x), \\ W(r, \theta, t) &= \sum_{l=1}^L W_l(r, t) P_l^1(x) + \omega^0 r P_1^1(x), \\ P(r, \theta, t) &= \sum_{l=0}^L P_l(r, t) P_l^0(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $U^0(r, \theta) = \{0, 0, \omega^0 r P_1^1(x)\}$ – стационарное решение задачи при $Re \rightarrow 0$ (нулевой член в разложении решения по степеням Re , см. (2.1)). Оно выделено, чтобы искомые функции были приблизительно одного порядка, а граничные условия однородными. L – число удерживаемых членов в рядах определяется параметрами задачи.

Подстановка рядов (2) в систему (1) позволяет разделить переменные и расщепить линейные части уравнений системы относительно полюидального волнового числа l .

Более сложным является вопрос преобразования нелинейных членов уравнений. Для полного разделения переменных необходимо преобразовать нелинейные члены таким образом, чтобы они также могли быть представлены в виде рядов по функциям Лежандра, то есть найти коэффициенты их разложения по соответствующим каждому уравнению присоединенным функциям P^0 или P^1 . Для этого мы использовали промежуточное переразложение нелинейных членов по полиномам Чебышева.

Полученная система линейных дифференциальных уравнений для амплитуд $\{U_l, V_l, W_l, P_l\}$, являющихся функциями r и t , решается численно методом матричной прогонки. Стационарное решение, если оно существует, находится методом установления при $t \rightarrow \infty$. Поскольку используется явно-неявная схема (инерционные члены уравнений вычисляются по значениям скорости с предыдущего временного слоя), выбор шага по времени требует некоторой аккуратности.

Заметим, что в этой задаче, как, впрочем, и всегда при использовании спектральных методов, следует с большой осторожностью относиться к обрезанию рядов (2), описывающих решение. При недостаточно точном описании решения можно получить не только количественно, но и качественно неверные результаты.

Трудность выбора L определяется, в частности, тем, что в критической ситуации появляются движения заметно отличающиеся своими масштабами от основной циркуляции. Поэтому быстрое спадание амплитуды пространственного спектра с ростом l может ничего не определять – основное течение является решением уравнений, но неустойчивым, и следующий максимум пространственного спектра появится на гораздо более высоких гармониках. Необходимое количество членов в рядах зависит от значений всех трех определяющих параметров задачи.

Постановка и метод решения линейной задачи об устойчивости основного течения [11, 13]. Отсутствие аналитического решения для основного течения и зависимость его от числа Рейнольдса, зависимость основного течения от двух координат и наличие всех трех компонент скорости даже при малых значениях числа Рейнольдса заметно усложняют изучение устойчивости движений во вращающихся сферических слоях. Линейный анализ их устойчивости относительно нормальных возмущений сводится к решению спектральной задачи на собственные значения для системы уравнений в частных производных и представляет собой сложную проблему – успешных попыток ее решения при конечных значениях определяющих параметров пока нет.

Для решения задачи об устойчивости основного течения по отношению к малым возмущениям нами используется подход, заключающийся в анализе асимптотики возмущения при $t \rightarrow \infty$ [11, 13]. Спектральная задача при этом не решается. Эта методика уже использовалась ранее при изучении устойчивости колебательной конвекции. Опыт показал эффективность применения такого подхода к задаче об устойчивости движений в сферическом слое.

Численно полученное в результате решения начально–краевой задачи (1) при заданных значениях параметров (Re, δ, ω^*) основное течение $\mathbf{U}(r, \theta), P(r, \theta)$ исследуется на устойчивость относительно малых возмущений $\mathbf{u}(r, \theta, \varphi, t), p(r, \theta, \varphi, t)$. Из-за неоднородности основного течения поведение малых возмущений также описывается начально–краевой задачей для системы уравнений в частных производных с нулевыми граничными и заданными начальными условиями:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{U} &= -\nabla p + Re^{-1} \Delta \mathbf{u}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u} &= 0 \text{ при } r = 1, r = 1 + \delta, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^*, \text{ при } t = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Вывод об устойчивости основного течения делается на основании анализа асимптотического поведения возмущения при $t \rightarrow \infty$. Для каждого нового значения числа Рейнольдса задачу приходится решать заново, так как от Re зависит не только амплитуда, но и форма основного течения. Такой подход позволяет определить критическое значение числа Рейнольдса Re_c и вид наиболее опасного, наиболее быстро растущего возмущения.

Всякий соленоидальный вектор может быть представлен суммой полоидального и тороидального полей $\mathbf{u} = \operatorname{rot}^2 \mathbf{S} + \operatorname{rot} \mathbf{T}$. Запишем их потенциалы $\mathbf{S} = \{S, 0, 0\}$ и $\mathbf{T} = \{T, 0, 0\}$ в виде рядов по сферическим гармоникам $Y_l^m = P_l^m(x) \exp(im\varphi)$, $x = \cos \theta$ и получившиеся ряды для компонент скорости возмущения

$$\begin{aligned} u &= \sum_{l,m} [l(l+1)/r^2] S_l^m P_l^m \exp(im\varphi), \\ v &= \sum_{l,m} [1/(r \sin \theta) T_l^m \partial_\varphi P_l^m + (1/r) \partial_\theta S_l^m \partial_\varphi P_l^m] \exp(im\varphi), \\ w &= \sum_{l,m} [(-1/r) T_l^m \partial_\theta P_l^m + 1/(r \sin \theta) \partial_\theta S_l^m \partial_\varphi P_l^m] \exp(im\varphi), \end{aligned}$$

подставим в систему линейных уравнений. Комплексные амплитуды T_l^m , S_l^m потенциалов \mathbf{S} и \mathbf{T} – функции только r и t .

Коэффициентами в уравнениях, описывающих линейную задачу, являются компоненты скорости основного течения \mathbf{U} и их производные по r и θ . Они не зависят от азимутальной координаты ϕ , и в результате подстановки рядов переменные по ϕ разделяются. Для каждого значения азимутального волнового числа m получается отдельная система уравнений.

Однако, из-за неоднородности основного течения \mathbf{U} части уравнений $(\mathbf{U}\nabla)\mathbf{u}+(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{U}$ остаются неоднородными по θ , и уравнения невозможно преобразовать так, чтобы переменные разделились полностью. Переменные по волновому полоидальному числу l разделяются только в линейных частях уравнений, что сильно усложняет решение задачи. Для примера выпишем уравнение для T_l^m

$$\partial_t T_l^m - \text{Re}^{-1} \Delta_l T_l^m = N_l^m \int_{-1}^1 f^m(r, x, t) P_n^m(x) dx,$$

здесь $N_l^m = 2(l+m)! / [(2l+1)(l-m)!]$ – норма, f^m – комбинация нелинейных по θ членов уравнений, включающая и их производные по θ .

Способ нахождения коэффициентов разложения неоднородных частей по соответствующим полиномам, примененный нами при решении нелинейной задачи, – промежуточное переразложение по функциям Чебышева – здесь не может быть использован, поскольку простой связи функций Чебышева с присоединенными функциями Лежандра (как при $m=0, 1$) для более высоких порядков ($m > 1$) уже не существует. Для нахождения нелинейных по θ частей уравнений мы использовали квадратуры интерполяционно ортогонального типа.

Поиск критического возмущения. Для исследования устойчивости течения в слое толщины δ относительно возмущения с азимутальным волновым числом m , характеризующим периодичность возмущения в направлении вращения, при переходе к очередному значению числа Рейнольдса бралось соответствующее основное течение, численно полученное при выбранном Re .

Скорость роста возмущения вычислялась отдельно для полоидальной (ν_l) и тороидальной (μ_l) компонент скорости, для антисимметричной (μ_{2l}, ν_{2l+1}) и симметричной (μ_{2l+1}, ν_{2l}) по отношению к плоскости экватора их составляющих.

Зависимость малых возмущений от времени вблизи порога устойчивости заключена в экспоненциальном множителе $\exp \lambda t$, где λ – декремент, определяющий развитие возмущения во времени. Если декремент принимает вещественное значение – возмущение монотонно затухает при $\lambda < 0$ и растет при $\lambda > 0$. Если $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ – возмущение осциллирует с частотой λ'' ; знаком λ' определяется, затухает оно или растет. Для устойчивости течения необходимо, чтобы вещественные части декрементов всех нормальных возмущений были отрицательными. Появление в спектре возмущения с положительным λ' означает неустойчивость течения по отношению к этому возмущению.

В случае замкнутой полости спектр нормальных возмущений дискретен; есть счетная последовательность характеристических декрементов – собственных значений и соответствующих им собственных функций. Пусть амплитуды возмущения, временную асимптотику которых мы нашли, представлены в виде рядов по собственным функциям спектральной задачи, например, $T_l^m(r, t) = \sum T_n(r) \exp \lambda_n t$. Перенумеровав собственные функции так, что $\lambda_n' > \lambda_{n+1}'$, получим условие неустойчивости течения: $\lambda_1' > 0$. Зная асимптотическое поведение T_l^m при $t \rightarrow \infty$, эту величину легко определить. Например, если $\lambda_1^i = 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_l^m \approx T_1 \exp \lambda_1 t \text{ и тогда } \lambda = \lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/T_l^m) \partial_t T_l^m.$$

В случае $\lambda_1^i \neq 0$ определение λ_1' несколько более громоздко.

Применяемая методика позволяет при каждом заданном значении азимутального волнового числа m определить скорость роста наиболее быстро растущего возмущения, его осцилляции и форму – то есть форму и поведение во времени наиболее опасной при выбранном m меридиональной структуры возмущения. Информации о других меридиональных структурах с тем же m получить нельзя, так как с ростом t они поглощаются наиболее быстро растущей. Однако, мы считаем такой, не дающий полной информации, подход оправданным, так как в присутствии вращения широтная и радиальная зависимости в уравнениях не разделяются и решение полной проблемы собственных значений требует гораздо более сложной вычислительной процедуры.

Найдя нейтральное (с нулевой скоростью роста) возмущение с заданным азимутальным волновым числом m , получим критическое значение числа Рейнольдса $Re_L(\delta, \omega^*, m)$, соответствующее возникновению неустойчивости относительно возмущения с длиной волны в азимутальном направлении, равной $2\pi/m$. Предел устойчивости основного течения определится минимальным по всем m значением

$$Re_L(\delta, \omega^*) = Re_L(\delta, \omega^*, m_c) = \min_m Re_L(\delta, \omega^*, m)$$

Значение m_c , обеспечившее минимум, есть критическое значение азимутального волнового числа; частота нейтральных колебаний определится значением мнимой части декремента критического возмущения.

Библиографический список

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть II. М.: Физматгиз, 1963.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
3. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
4. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
5. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984.
6. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986.
7. Астафьева Н.М., Введенская Н.Д., Яворская И.М. Нелинейные осесимметричные течения жидкости в сферических слоях. Препринт ИКИ АН СССР. № 385. М., 1977. 55 с.
8. Астафьева Н.М. Численное моделирование несимметричного относительно плоскости экватора сферического течения Куэтта // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 56.
9. Астафьева Н.М. Устойчивость и неединственность осесимметричных течений во вращающихся сферических слоях (нелинейная теория) // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 6. С. 66.
10. Langlois W.E. Slow viscous flow. N.-Y.: Macmillan, 1964.
11. Астафьева Н.М. Численное решение задачи о малых возмущениях сферического течения Куэтта. Препринт ИКИ АН СССР, Пр-1027. 1985. 53 с.
12. Marcus P.S., Tuckerman L.S. Simulation of flow between concentric rotating spheres. Part 2. Transitions // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 185. P. 1–30.
13. Астафьева Н.М. Численный анализ устойчивости течений во вращающихся сферических слоях (линейная теория, трехмерные возмущения) // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 66.
14. Яворская И.М., Беляев Ю.Н., Монахов А.А. Экспериментальное изучение сферического течения Куэтта // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221, № 5. С. 1059.
15. Munson B.R., Menguturk M. Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres. Part 3. Linear stability and experiment // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 69, № 4. P. 705.

16. Яворская И.М., Беляев Ю.Н., Монахов А.А. Исследование устойчивости и вторичные течения во вращающихся сферических слоях при произвольных числах Россби // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 4. С. 804.
17. Беляев Ю.Н., Монахов А.А., Яворская И.М. Устойчивость сферического течения Куэтта в толстых слоях при вращении внутренней сферы // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 2. С. 9.
18. Монахов А.А. Граница устойчивости основного течения в сферических слоях // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 4. С. 66.
19. Яворская И.М., Астафьева Н.М., Введенская Н.Д. Об устойчивости и неединственности течений жидкости во вращающихся сферических слоях // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 1. С. 52.
20. Dumas G. The spherical Couette flow and its large-gap stability by spectral simulations // Proc. CFD94, Canadian Soc., Toronto, June 1994. P. 67.
21. Proudman I. The almost rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres // J. Fluid Mech. 1956. Vol. 1, № 5. P. 505.
22. Stewartson K. On almost rigid rotation. Part 2 // J. Fluid Mech.. 1966. Vol. 26, № 1. P. 131.
23. Астафьева Н.М., Келлер Б.С., Яворская И.М. Влияние стратификации плотности на движение сжимаемой жидкости в сферическом слое. Препринт ИКИ АН СССР. 1972. Д-147. 35 с.
24. Астафьева Н.М., Яворская И.М., Келлер Б.С. О движениях вязкого стратифицированного газа в сферическом слое // Тр. IV Всес. сем. по численным методам в механике вязкой жидкости, Рига, 1972. Новосибирск, 1973. С. 30–37.
25. Келлер Б.С., Яворская И.М. Моделирование гидродинамических процессов в атмосферах больших планет // Гидроаэромеханика и космические исследования. М.: Наука, 1976. С. 256.
26. Астафьева Н.М. Численное моделирование в сферических объемах с вращением // Численные методы моделирования технологических процессов. Рига, 1989. С. 3–11.
27. Яворская И.М., Беляев Ю.Н. Моделирование конвективных процессов в атмосферах планет-гигантов // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3. С. 148.
28. Astafyeva N.M., Moiseev S.S. About numerical modelling of global motion in planetary atmosphere // XXII General Assembly of European Geophysical Society, Vienna, 1997.
30. Мороз В.И. Физика планет. М.: Наука, 1967. 496 с.
31. Стоун П. Морфология атмосферы Юпитера // Юпитер. Т. 2. М.: Мир, 1976. с. 460–500.

Институт космических исследований РАН, Москва

*Поступила в редакцию 8.10.97
после переработки 22.11.97*

NONLINEAR SHEAR FLOW IN ROTATING SPHERICAL LAYERS AND GLOBAL ATMOSPHERE MOTION MODELLING

N.M. Astafyeva

The influence of vorticity and the restoring effectiveness of Coriolise force are considered. There are the some examples for illustration: the simple theoretical models which are used ordinary for dynamic meteorology and oceanology simulation and the certain peculiarity of the classical flows between rotating discs, cylinders and spheres. There are also the results of the numerical investigation of the flow in rotating spherical layers and their instability. The possibilities of the numerical simulation of global atmosphere dynamics are discussed.



Астафьева Наталья Михайловна – родилась в Москве (1944) окончила механико–математический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова (1967). После окончания МГУ работает в Институте космических исследований. Старший научный сотрудник, кандидат физико–математических наук (1972, ИКИ). Область научных интересов: гидродинамическая устойчивость, пространственно–временной хаос и структурообразование, применение нелинейной динамики в геофизике, численное моделирование.



*Саратовский государственный университет
в марте 1998 года проводит*

научную конференцию

МОЛОДЕЖЬ И НАУКА НА ПОРОГЕ XXI ВЕКА

К участию в работе конференции приглашаются все желающие в возрасте от 16 до 30 лет. По докладам представляются тезисы в развернутом виде в 3 экз., указывается полный адрес и данные о научном руководителе. Более подробную информацию о конференции см. стр. 117.

