



БИФУРКАЦИЯ СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОСА В ОСЦИЛЛЯТОРЕ РЕССЛЕРА С ГАРМОНИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А.Г. Баланов, Т.Е. Вадивасова, Д.Э. Постнов, О.В. Сосновцева

Рассматривается эффект синхронизации хаотических колебаний на примере неавтономной системы Ресслера с позиций его общности для регулярных и хаотических режимов. Сравнительный анализ различных способов диагностики границы хаотической синхронизации, таких, как захват базовых частот спектра, стабилизация разности мгновенных фаз колебаний и выравнивание средних времен возврата в секущую плоскость Пуанкаре, показывает эквивалентность указанных подходов в приближении спирального хаоса. Совокупность имеющихся данных численного моделирования позволяет предложить и обосновать гипотезу о характере бифуркации хаотического режима как аналоге седло-узловой бифуркации предельных циклов. Анализ спектра ляпуновских характеристических показателей обнаруживает наличие двух типов хаоса за пределами области синхронизации, различающихся количеством нулевых показателей.

Введение

Синхронизация автоколебаний – одно из фундаментальных проявлений нелинейной динамики. Эффект синхронизации периодических автоколебаний был открыт еще Гюйгенсом [1]. В настоящее время проблема синхронизации регулярных (периодических и квазипериодических) колебаний достаточно хорошо исследована [2–15]. В спектре регулярных колебаний легко выделить основные частоты, однозначно связанные с характерными временами (периодом, квазипериодом) и фазами колебаний. При захвате частот происходит стабилизация фазового сдвига между взаимодействующими модами. Характерные времена также становятся равными или кратными. В случае регулярных колебаний взаимодействующих осцилляторов фазовому захвату соответствует седло-узловая бифуркация циклов на двумерном торе, в результате которой аттрактор на границе синхронизации претерпевает очевидную качественную перестройку – вместо эргодического движения на двумерном торе возникает устойчивый предельный цикл.

С накоплением знаний о хаотической динамике нелинейных систем возникла потребность обобщить классические представления о синхронизации автоколебаний на этот случай. При наблюдении фазовых проекций хаотических аттракторов взаимодействующих систем с частотной расстройкой можно заметить, что с ростом степеней взаимодействия в хаосе происходит определенная перестройка. Это наводит на мысль об аналогии механизмов синхронизации хаотических и регулярных автоколебаний. Правомерно возникает вопрос, что же

считать хаотической синхронизацией? Ответ на него не столь прост, как в случае регулярных колебаний, поскольку для хаотических колебаний период или несоизмеримые периоды отсутствуют, спектр является сплошным, а каждая спектральная компонента характеризуется своей фазой.

На сегодняшний день известно несколько концепций хаотической синхронизации. Одной из первых была концепция, согласно которой хаотическая синхронизация понимается как явление возникновения периодического режима под влиянием внешнего воздействия на хаотические автоколебания или в результате взаимодействия хаотических осцилляторов [16–18]. Однако переход от хаотических колебаний к регулярным наблюдается лишь при достаточной интенсивности взаимодействия осцилляторов (то есть имеет порог) и связан с механизмом синхронизации через подавление автоколебаний, то есть не исчерпывает всех возможных эффектов синхронизации хаоса.

Согласно наиболее часто встречающейся в литературе [19–23] концепции, синхронизация хаоса имеет место при взаимодействии идентичных хаотических осцилляторов и состоит в том, что с ростом связи временные реализации соответствующих динамических переменных парциальных систем полностью повторяют друг друга без какого-либо сдвига во времени. То есть, осцилляторы колеблются «синфазно». Синфазные колебания наблюдаются и при взаимодействии периодических осцилляторов, однако возможны и другие синхронные колебания. Очевидно, то же можно сказать и о синхронизации хаоса.

В работах [24–26] было предложено обобщение классических представлений о синхронизации как о захвате или подавлении частот на случай взаимодействия осцилляторов в режиме спирального хаотического аттрактора. В спектре спирального хаоса присутствует четко различимый пик на частоте, близкой к частоте предельного цикла, породившего хаотический аттрактор в результате последовательности субгармонических бифуркаций. Было обнаружено, что на плоскости параметров, управляющих степенью взаимодействия и частотой расстройки хаотических осцилляторов, можно выделить область синхронизации хаоса, подобную клюву Арнольда. Хаотические колебания в этой области (синхронный хаос) топологически отличаются от хаоса за ее пределами (несинхронного хаоса). Рассматривались случаи взаимной и вынужденной синхронизации хаоса, в том числе синхронизации хаоса гармонической внешней силой. Были сделаны некоторые предположения, касающиеся бифуркационного механизма хаотической синхронизации [25].

В работах [27–29] в рамках классического подхода к явлению синхронизации развивается представление о фазовом захвате хаотических осцилляторов. Предложены методы введения мгновенной фазы хаотических колебаний и показано, что с увеличением связи между взаимодействующими хаотическими осцилляторами, имеющими расстройку по частотам, средняя разность мгновенных фаз колебаний устанавливается постоянной, что говорит о наличии фазового захвата. Обнаружено также, что характеристические ляпуновские показатели хаотического аттрактора определенным образом реагируют на пересечение границы области синхронизации. В работе [30] с помощью модельного отображения анализируется бифуркационный механизм фазовой синхронизации.

Синхронизация хаоса играет важную роль в ансамблях хаотических осцилляторов. Она является причиной ограничения роста размерности аттракторов [31–32]. Возможность различных фазовых сдвигов синхронных осцилляторов приводит к явлению хаотической мультистабильности, кризисам хаотических аттракторов, фрактализации бассейнов притяжения и т.д. [33–34].

В последнее время эффекты, подобные синхронизации, были обнаружены в системах с более сложной хаотической динамикой, включающей нерегулярные переходы траектории из окрестности одного седлофокуса в окрестность другого [35]. В спектре таких колебаний нельзя выделить частоту, соответствующую нерегулярным перескокам между различными частями аттрактора. В данном случае представления о синхронизации связываются с поведением характерных

времен парциальных систем. Таким характерным временем служит среднее время нахождения траектории в окрестности одного из седлофокусов. С ростом связи между парциальными системами происходит выравнивание их характерных времен. Аналогичное явление синхронизации характерных времен наблюдается и в стохастических системах с многоямным потенциалом, в которых переходы между потенциальными ямами вызваны действием случайных сил. В последнем случае наблюдаемое явление получило название «стохастической синхронизации» [36–38].

Таким образом, понятие синхронизации может быть обобщено на очень широкий круг явлений, наблюдаемых не только в динамических, но и в стохастических системах. Далеко не всегда может быть в полной мере применен математический аппарат теории бифуркаций, как это сделано, например, для случая периодических колебаний. Как физики–экспериментаторы, мы зачастую можем лишь представить совокупность диагностических признаков, которые прямо или по аналогии с более простыми и изученными случаями свидетельствуют о характере предполагаемой бифуркации. Подтвердить или опровергнуть построенную на такой базе гипотезу – дело математиков.

В рамках настоящей работы мы концентрируемся на случае вынужденной синхронизации хаотического аттрактора внешним гармоническим воздействием малой амплитуды (то есть исключаем эффекты подавления собственных колебаний). Цель заключается в том, чтобы по возможности полно охарактеризовать механизм перехода от несинхронного хаоса к синхронному как особого рода бифуркацию. Сопоставление характеристик хаотического движения с аналогичными для регулярных режимов позволяет предложить гипотезу о возможном бифуркационном механизме.

1. Исследуемая модель

Как одна из простейших моделей, демонстрирующих явление хаотической синхронизации, нами был выбран осциллятор Ресслера с гармоническим внешним воздействием:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega y - z + C \sin t, \\ \dot{y} &= \omega x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \alpha + z(x - \mu),\end{aligned}\tag{1}$$

где α и μ – параметры, определяющие динамику автономного осциллятора, ω – параметр, управляющий частотой автоколебаний, C – амплитуда внешнего воздействия. Хаотическая динамика автономного осциллятора Ресслера хорошо изучена. В системе возможны два типа хаотических аттракторов. С ростом параметра μ последовательность субгармонических бифуркаций периодических движений приводит к образованию так называемого спирального аттрактора (аттрактора Ресслера), который при дальнейшем увеличении μ преобразуется в аттрактор винтового типа [39]. Осциллятор Ресслера неоднократно выбирался в качестве базовой модели для исследования взаимной хаотической синхронизации [26–28].

В спектре хаотических колебаний, соответствующих спиральному аттрактору, присутствует хорошо различимый пик на базовой частоте ω_0 , управляемой параметром ω . При $\omega=1$ базовая частота также близка к единице. Таким образом, при некоторых значениях ω возможен захват базовой частоты хаотических колебаний частотой воздействия в соотношении 1:1. Это соответствует основной области хаотической синхронизации.

2. Хаотическая синхронизация в неавтономном осцилляторе Ресслера

2.1. Двупараметрическая бифуркационная диаграмма режимов. При рассмотрении различных аспектов явления хаотической синхронизации будем опираться на результаты численного эксперимента, обобщенно представленные в виде двупараметрической бифуркационной диаграммы. Для ее построения была выбрана плоскость параметров (ω, μ) . Остальные параметры фиксировались равными $\alpha=0.2$, $C=0.02$. Был детально исследован небольшой участок плоскости управляющих параметров в окрестности границы основной области синхронизации. Полученная бифуркационная диаграмма приведена на рис.1. На ней отмечены следующие области: 1 – область существования устойчивого синхронного цикла с периодом $4T_c$, ($ST_c=2\pi$); 2 – область существования устойчивого синхронного цикла с периодом $8T_c$; 3 – область синхронного хаоса; 4 – область «четырёхоборотного» тора, соответствующего квазипериодическим колебаниям, одно из которых имеет период воздействия T_c , а другое – период автоколебаний $4T_0$ ($T_0=2\pi/\omega_0$, где ω_0 – базовая частота автоколебаний); 5 – область «восьмиоборотного» тора $8T_0$; 6 – область несинхронного хаоса с сигнатурой спектра ляпуновских характеристических показателей (ЛХП) «+, 0, -, -»; 7 – область несинхронного хаоса с сигнатурой спектра ЛХП «+, 0, 0, -».

Бифуркационные линии, являющиеся границами областей различной динамики, обозначены следующим образом: l_1 – линия касательной бифуркации периодического движения, l_2 – линия субгармонической бифуркации (удвоения периода) периодического движения, l_3 – линия удвоения одного из периодов квазипериодического движения (линия «удвоения тора»), $l_{кр1}$ – граница хаоса в области синхронных режимов, $l_{кр2}$ – граница возникновения хаоса вне основной области синхронизации, l_4 – граница синхронизации хаоса, l_5 – граница между

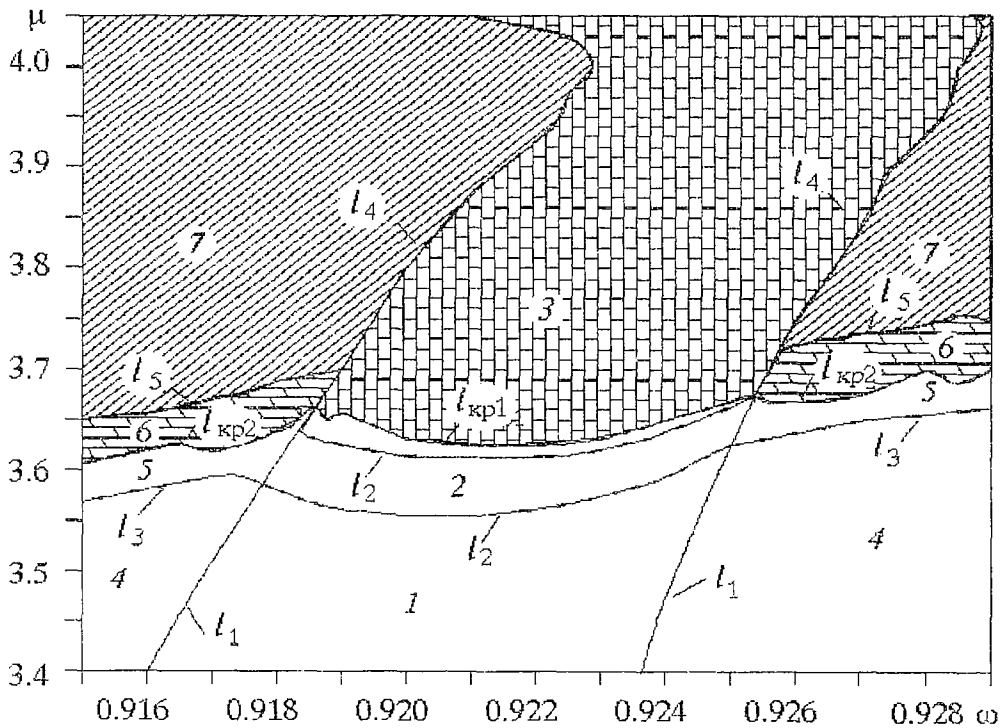


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма режимов на плоскости параметров ω, μ при $\alpha=0.2$, $C=0.02$

двумя типами хаоса вне основной области синхронизации. Бифуркационный характер линии l_5 пока не ясен. Возникновению хаоса на линии $l_{кр2}$ предшествует разрушение квазипериодических колебаний в результате кризиса тора [40].

Диаграмма наглядно показывает, что граница хаотической синхронизации является продолжением границы синхронизации регулярных режимов.

2.2. Диагностика границы области хаотической синхронизации.

Использование различных средств диагностики породило несколько характеристик перехода от несинхронного хаоса к синхронному. В работах [24–25], где широко использовалось сопоставление результатов численного и радиофизического эксперимента, хаотическая синхронизация диагностировалась по захвату базовой частоты спектра хаотического аттрактора. В [27–28] диагностика перехода основана на динамике мгновенной взаимной фазы колебаний. Наконец, в [35–38] был предложен широко используемый в данной работе метод, основанный на подсчете характерного времени системы как среднего времени возврата в секущую плоскость Пуанкаре.

Рассмотрим, как взаимосвязаны эти подходы.

Колебания автономного хаотического осциллятора можно представить в виде

$$x(t) = A(t)\cos\Phi(t), \quad (2)$$

где $A(t)$ и $\Phi(t)$ – мгновенные амплитуда и фаза колебаний. Для мгновенной фазы имеем

$$\Phi(t) = \langle\Phi(t)\rangle + \delta\phi(t), \quad (3)$$

где $\delta\phi$ – флуктуация фазы относительно среднего значения $\langle\Phi\rangle$. Если предположить, что среднее значение мгновенной частоты

$$\langle\omega(t)\rangle = \langle d\Phi(t)/dt \rangle = \omega_{cp} \quad (4)$$

постоянно, то можно представить

$$\langle\Phi(t)\rangle = \Phi_0 + \omega_{cp}t, \quad (5)$$

где Φ_0 – начальная фаза колебаний. Базовая частота хаотических колебаний ω_b , наблюдаемая в измеряемом или численно моделируемом спектре спирального хаоса, должна быть близка к ω_{cp} . Действительно, считая флуктуации $\delta\phi$ малыми, можно получить, что ковариационная функция процесса $x(t)$ в первом приближении содержит слагаемое вида $1/2(A_{cp})^2\cos(\omega_{cp}\tau)$, которому соответствует наличие в спектре мощности колебаний δ -выброса на частоте $\omega_b = \omega_{cp}$. Если флуктуации фазы перестают быть малыми (как в случае винтового хаоса), то пик в спектре исчезает.

Захват средней частоты колебаний ω_{cp} (или же базовой частоты) внешней силой $f(t) = \sin(\omega_c t + \Phi_c)$ сопровождается захватом фазы. Среднее значение разности мгновенных фаз колебаний и воздействия

$$\langle\Phi\rangle = \langle\omega_{cp}t + \Phi_0 + \delta\phi(t) - (\omega_c t + \Phi_c)\rangle = (\omega_{cp} - \omega_c)t + \Phi_0 - \Phi_c \quad (6)$$

при условии, что $\omega_{cp} = \omega_c$, будет равно начальной разности фаз $\Phi_0 - \Phi_c = \text{const}$.

За характерное время хаотических колебаний разумно принять среднее время возврата $\langle T \rangle$ фазовой траектории к секущей поверхности, задаваемой условием $\Phi_1(t) = \text{const}$ (где Φ_1 – фаза колебаний, определенная в интервале $[0, 2\pi]$). В этом случае характерное время однозначно определяется средней частотой колебаний

$$\langle T \rangle = 2\pi/\omega_{cp}. \quad (7)$$

Отношение среднего времени возврата к периоду вынуждающей силы можно рассматривать как усредненное число вращения $\langle \theta \rangle$. Основная область хаотической синхронизации соответствует $\langle \theta \rangle = 1:1$.

Очевидно, что все указанные критерии хаотической синхронизации полностью эквивалентны, по крайней мере в области слабого хаоса. С точки зрения осуществления численных экспериментов наиболее удобным критерием хаотической синхронизации представляется синхронизация характерного времени. Численный расчет среднего времени возврата к секущей плоскости значительно проще и точнее расчета частот спектра и мгновенной фазы. Вычисляя отношение характерных времен, легко построить зависимость числа вращения от любого параметра системы, т.н. «чертовой лестницы», и определить границы не только основной области синхронизации, но и областей синхронизации более высокого порядка. Для рассматриваемой модели число вращения определяется как

$$\langle \theta \rangle = \langle T \rangle / 2\pi. \quad (8)$$

На рис. 2 представлены графики зависимости числа вращения от ω в окрестности основной области синхронизации для случаев регулярной динамики (а) слабого хаоса (б), развитого хаоса (в). В качестве секущей выбиралась плоскость $x=0$, что соответствует постоянной фазе $\Phi_1(t)=0$ колебаний переменной x . Надо отметить, что хаотическая динамика в системе (1) при близком к резонансному воздействии возникает при меньших значениях параметра μ , по сравнению с автономным осциллятором Ресслера, а граница хаоса в пространстве параметров определяется не только параметрами α , μ , но также амплитудой воздействия C и параметром ω . На графиках «чертовой лестницы», представленных на рис. 2, а, б, можно различить ступеньку, соответствующую числу вращения $\langle \theta \rangle = 1:1$. В случае (в) зависимость $\langle \theta \rangle$ от ω становится немонотонной и ступенька, соответствующая основной области синхронизации, едва заметна, при этом в спектре колебаний уже отсутствует четкий пик на базовой частоте, и говорить о захвате частоты становится трудно.

2.3. Описание колебаний в терминах мгновенных амплитуды и фазы.

Чтобы однозначно ввести мгновенные значения амплитуды и фазы сигнала $x(t)$, можно воспользоваться представлением

$$x(t) = A(t)\cos\Phi(t), \quad (9)$$

$$H\{x(t)\} = A(t)\sin\Phi(t),$$

где $A(t)$, $\Phi(t)$ – мгновенная амплитуда и мгновенная фаза, соответственно, $H\{\dots\}$ –

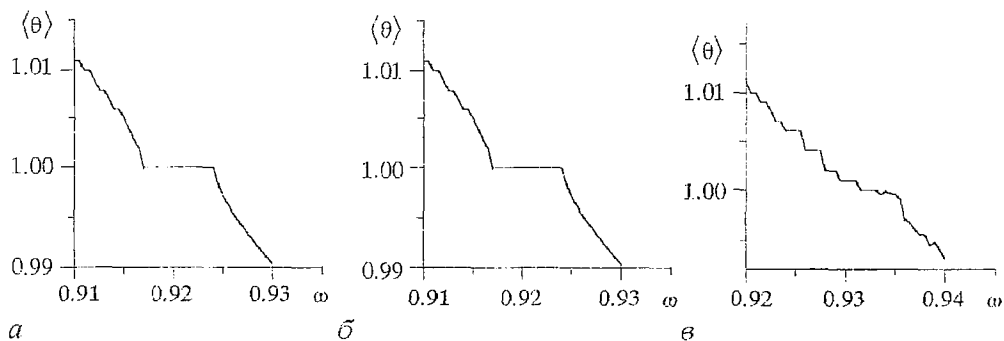


Рис. 2. Зависимости числа вращения от параметра ω при а – $\mu=3.5$ (случай регулярной динамики); б – $\mu=4.0$ (слабый хаос); в – $\mu=6.5$ (развитый хаос). Другие параметры: $\alpha=0.2$, $C=0.02$

преобразование Гильберта [41]. В исследовании хаотической синхронизации такой подход использован в [27]. Заметим, что численное моделирование процессов $A(t)$ и $\Phi(t)$ оказывается при таком подходе довольно сложным.

В тех случаях, когда динамические переменные $x(t)$ и $y(t)$ являются осцилляторными переменными, связанными линейно (как в случае осциллятора Ресслера) можно поступить проще, воспользовавшись представлением

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t)\cos\Phi(t), \\ y(t) &= A(t)\sin\Phi(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда $A(t)$ и $\Phi(t)$ – есть полярные координаты изображающей точки на плоскости XU . Недостаток такого подхода состоит в том, что мгновенные амплитуда и фаза определяются для процесса $x(t)$ неоднозначно, так как зависят от выбора второй переменной – $y(t)$. Однако для системы (1) представление (10) обосновано и позволяет адекватно фиксировать эффекты фазового захвата, так же как и представление (9) [27]. Применяя замену (10) к системе (1), легко получить систему Ресслера в новых переменных:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \alpha A + (C\sin\Phi - \alpha A\cos\Phi - z)\cos\Phi, \\ \dot{\Phi} &= \omega - (1/A)(C\sin\Phi - \alpha A\cos\Phi - z)\sin\Phi, \\ \dot{z} &= \alpha + z(A\cos\Phi - \mu). \end{aligned} \quad (11)$$

Поведение разности фаз колебаний и воздействия $\Delta\Phi(t)=\Phi(t)-t$ в области синхронизации и вне ее представлено на рис. 3 для случаев слабого и сильного хаоса. Для слабого хаоса (рис. 3, а) в области синхронизации (кривая 1) разность фаз незначительно колеблется вокруг постоянного среднего уровня. Вне области синхронизации (кривая 2) происходит неограниченный рост разности фаз во времени. Граница захвата фазы хаотических колебаний в точности совпадает с границей синхронизации среднего времени возврата траектории к секущей плоскости $X=0$.

С увеличением параметра μ и соответствующим развитием хаоса винтового типа фазовые сбой становятся все более значительными. При достаточно больших значениях μ говорить о захвате фазы становится невозможно (рис. 3, б)

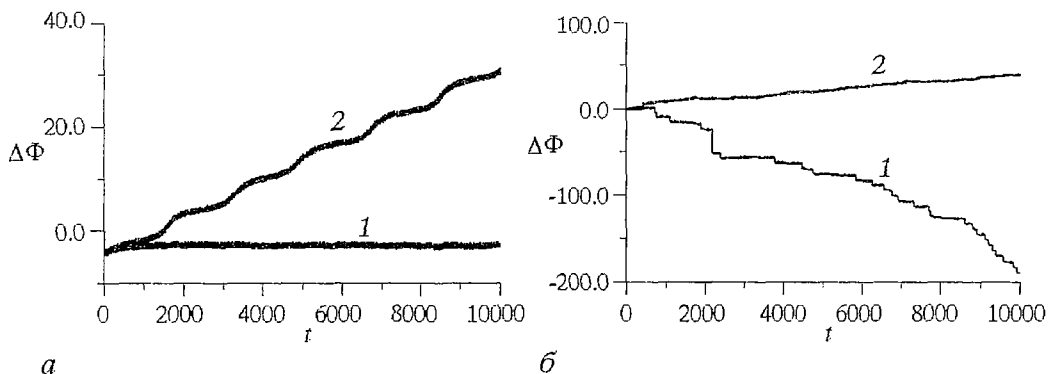


Рис. 3. Зависимости от времени мгновенной разности фаз хаотических колебаний и воздействия a – при $\mu=4.0$ в области синхронизации (кривая 1, $\omega=0.927$) и вне области синхронизации (кривая 2, $\omega=0.930$); b – при $\mu=6.5$, кривая 1 соответствует $\omega=0.933$, кривая 2 – $\omega=0.937$. Другие параметры: $\alpha=0.2$, $C=0.02$

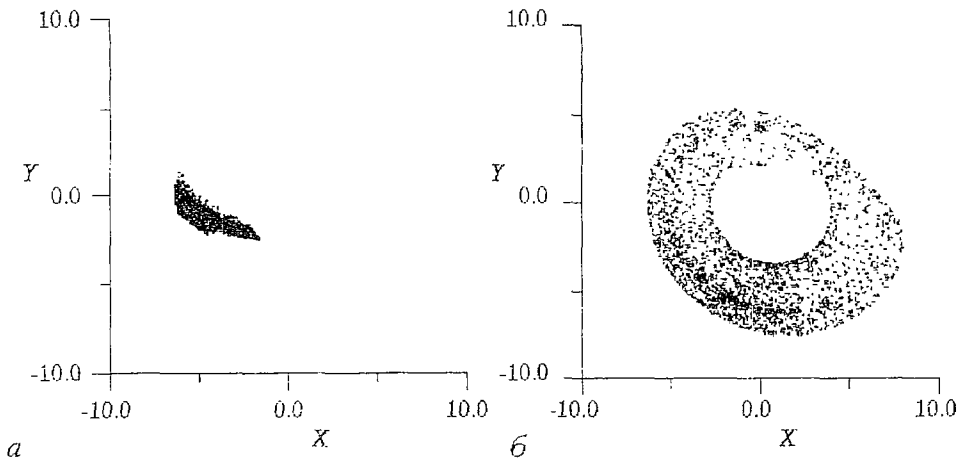


Рис. 4. XY -проекции стробоскопического сечения аттракторов в области синхронного (а) и несинхронного (б) хаоса при $\mu=4.0$, $C=0.02$, $\alpha=0.2$

На рис. 4 приведены XY -проекции стробоскопического сечения аттракторов системы (1), соответствующих фазовым зависимостям, представленным на рис. 3, а. Эффект хаотической синхронизации хорошо прослеживается по внешнему виду сечения аттрактора. В случае синхронного хаоса (рис. 4,а) точки сечения группируются в некоторой области, соответствующей незначительным изменениям фазы $\Phi(t)$. При выходе из области синхронизации (рис.4,б) изображающая точка в сечении начинает совершать вращения со средней скоростью $\langle\theta\rangle=\langle T\rangle/2\pi$.

2.4. Бифуркационный механизм синхронизации хаоса. Как мы видим, синхронизация хаоса, диагностируемая по захвату характерных времен, мгновенных фаз и базовых частот спектра имеет место как в связанных хаотических осцилляторах [26–28], так и в осцилляторах с внешним гармоническим воздействием [24–25]. Граница синхронизации достаточно четко диагностируется, вид хаотического аттрактора претерпевает на ней существенную перестройку. Очевидно, здесь имеет место некая бифуркация хаотического множества. Каков ее характер?

В [25] на основании численных исследований было обнаружено, что граница области синхронизации на плоскости параметров расположена в области, где скапливаются линии касательных бифуркаций всевозможных седловых предельных циклов, существующих в бассейне притяжения хаотического аттрактора автономной системы. Действительно, хаос в области синхронизации должен иметь структуру, подобную структуре автономного хаоса, а она во многом определяется седловыми циклами и их многообразиями. Поскольку вне области синхронизации этих циклов не существует, то они должны рождаться на границе области синхронизации в результате касательных бифуркаций. Как показывают численные эксперименты, при движении по параметру ω эти циклы появляются не одновременно. Важная информация о структуре и качественных перестройках режима исследуемой системы может быть получена с использованием ЛХП. В [28] для случая взаимной синхронизации хаотических осцилляторов было обнаружено, что вне области синхронизации в спектре ЛХП имеются два близких к нулевому значению. В результате синхронизации один из них становится отрицательным. Мы, в свою очередь, провели детальное исследование поведения спектра ЛХП вблизи границы хаотической синхронизации в системе (1), для различных хаотических режимов, управляемых параметрами μ и C . На рис. 5 приведены

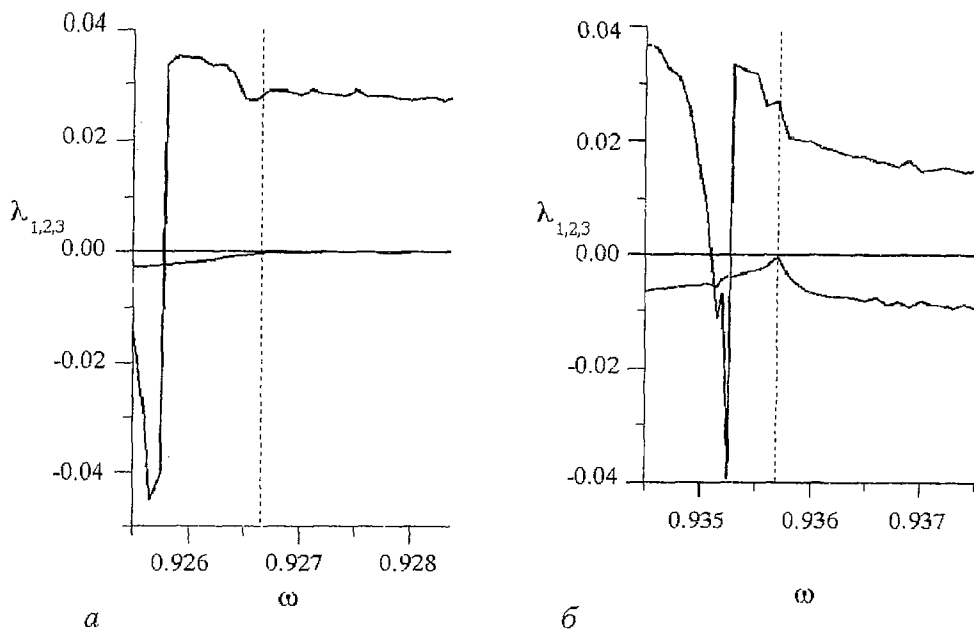


Рис. 5. Зависимости двух старших ляпуновских показателей λ_1 и λ_2 от параметра ω при $\alpha=0.2$, $\mu=3.8$ и $C=0.02$ (а); $C=0.08$ (б). Штриховой линией отмечена граница синхронизации хаоса

зависимости двух старших ляпуновских показателей от параметра ω . Один показатель в спектре ЛХП связан с периодическим воздействием всегда строго равен нулю. Прямая, соответствующая нулевому уровню, также нанесена на графиках. Старший показатель – положителен и не реагирует на переход границы синхронизации (в области синхронных режимов он может становиться отрицательным в окнах устойчивости периодических движений). Второй показатель (всюду отрицательный в области синхронизации) демонстрирует два варианта поведения:

1) на границе он обращается в ноль и остается равным нулю в пределах точности вычислений (10^{-5} – 10^{-6}) на некотором интервале значений управляющего параметра ω (см.рис. 5, а);

2) на границе он обращается в ноль, но затем вновь становится отрицательным (см.рис. 5, б).

Следует отметить, что в любом случае в момент пересечения границы хаотической синхронизации второй ляпуновский показатель обращается в ноль, подобно тому, как ведет себя один из ляпуновских показателей синхронного периодического движения в момент касательной бифуркации на границе области синхронизации.

Вся совокупность обсужденных выше экспериментальных результатов (эволюция вида сечения Пуанкаре и фазовых проекций, вид зависимости для числа вращения $\langle \theta \rangle$ – «чертова лестница», динамика взаимной фазы, поведение ляпуновских показателей) позволяет провести аналогию изучаемой перестройки, соответствующей синхронизации хаоса, с касательной бифуркацией на торе, приводящей к возникновению резонансной структуры предельных циклов.

Если увеличивать параметр μ , оставаясь в области синхронизации, то можно наблюдать каскад субгармонических бифуркаций синхронных предельных циклов на торе, причем не только устойчивых, но также и седловых. В результате этого в области синхронизации должен формироваться не только хаотический аттрактор, но вместе с ним и непритягивающее хаотическое множество траекторий. На границе области хаотической синхронизации притягивающее и непритягивающее хаотическое множества претерпевают некий аналог касательной бифуркации. При

этом характеристики притягивающего хаотического множества ведут себя подобно случаю регулярных режимов. С этой точки зрения становится понятным возникновение второго нулевого ляпуновского показателя – еще одного направления нейтральной устойчивости. В недавней работе [30] для модельного отображения было показано, что бифуркационный механизм хаотической синхронизации состоит в слиянии хаотического аттрактора и хаотического репеллера. В более общем случае потоковой системы непритягивающее хаотическое множество, участвующее в бифуркации, будет иметь хотя бы одно устойчивое направление (то есть не будет репеллером) и потому численно реконструировать его, используя инверсию времени, невозможно.

Несинхронный хаос с сигнатурой спектра ЛХП «+,0,0,-» мы назовем «тор-хаосом», так как он представляет собой аналог эргодического движения на торе, но с дополнительным направлением неустойчивости. Как и эргодическое квазипериодическое движение, тор-хаос не может быть грубым, но может характеризоваться ненулевой мерой в пространстве параметров.

Численные эксперименты показали, что такой хаотический режим типичен при слабой амплитуде воздействия. Его негрубость незаметна на графике, приведенном на рис. 5, а, по-видимому, из-за чрезвычайной узости областей синхронизации высших порядков.

Менее понятен случай, когда вне области синхронизации сигнатура спектра ЛХП остается «+,0,-,-», что имеет место в непосредственной близости от границы возникновения хаоса или при достаточно сильном внешнем воздействии. Можно предположить, в этом случае на плоскости параметров образуется зона, в которой мера несинхронных режимов равна нулю (зона перекрытия областей хаотической синхронизации). Однако, подтвердить или опровергнуть такое предположение на данный момент не удастся, так как два типа хаоса вне основной области синхронизации, различающиеся сигнатурой спектра ЛХП, по другим критериям не имеют сколь-нибудь существенных различий.

Выводы

На основании представленных здесь результатов, а также результатов других авторов, известных из публикаций, мы можем сделать следующие выводы. Можно говорить о синхронизации хаоса (по крайней мере спирального типа) в классическом смысле, понимая под синхронизацией следующие взаимосвязанные эффекты: захват базовых частот спектра, захват мгновенных фаз и захват характерных времен взаимодействующих систем. В пространстве параметров существует область синхронных колебаний, в том числе хаотических. Граница области синхронизации соответствует бифуркации аттрактора. В области регулярных режимов – это хорошо известная касательная бифуркация предельных циклов, приводящая к исчезновению резонансной структуры циклов и возникновению эргодического движения на торе при выходе из области синхронизации. На границе синхронизации хаоса имеет место некий аналог касательной бифуркации, состоящий в слиянии хаотического аттрактора с непритягивающим хаотическим множеством. В пользу нашего предположения говорит поведение ляпуновских показателей хаотического аттрактора. Строго на границе области синхронизации один из отрицательных показателей синхронного аттрактора становится равен нулю.

Вне области синхронизации возможны два типичных хаотических режима, отличающихся спектром характеристических ляпуновских показателей: хаос с одним нулевым показателем, наблюдающийся вблизи границы разрушения квазипериодических колебаний и хаос с двумя нулевыми показателями, занимающий значительную область в пространстве параметров. Сущность различия этих двух типов хаоса а также механизм перехода к хаосу вне области синхронизации нуждаются в дальнейшем исследовании.

Работа частично финансировалась грантом Госкомвуза России по фундаментальному естествознанию (грант 95-0-8.3-66).

Библиографический список

1. *Hugenii C.* Horologium Oscilatorium. Parisiis, France, 1673.
2. *Van der Pol B.* Theory of the amplitude of free and forced triod vibration // Radio Rev. 1920. Vol. 1. P. 701.
3. *Гапонов В.И.* Два связанных генератора с мягким возбуждением // ЖТФ. 1936. Т. 6, вып.5. С. 801.
4. *Теодорчик К.Ф.* К теории синхронизации релаксационных автоколебаний // ДАН СССР. 1943. Т. 40, вып. 2. С. 63.
5. *Хохлов Р.В.* К теории захватывания при малой амплитуде внешней силы // ДАН СССР. 1954. Т. 97, вып.6. С. 411.
6. *Андронов А.А., Витт А.А.* К теории захватывания Ван-дер-Поля // Собрание тр. А.А.Андропова. М.:Изд-во АН СССР, 1956.
7. *Минакова И.И., Теодорчик К.Ф.* К теории синхронизации автоколебаний произвольной формы // ДАН СССР. 1956. Т. 106, вып.4. С. 658.
8. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.:Мир, 1968.
9. *Блехман И.* Синхронизация динамических систем. М.:Наука, 1971.
10. *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.:Наука, 1981.
11. *Ланда П.С., Ларионцев Е.Г.* Режимы биений и синхронизации встречных волн во вращающемся кольцевом газовом лазере // РЭ. 1970. Т. 15, № 6. С. 1214.
12. *Романовский Ю.М.* О взаимной синхронизации многих автоколебательных систем, связанных через общую среду // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15, № 5. С. 718.
13. *Демьянченко А.Г.* Синхронизация генераторов гармонических колебаний. М.:Энергия, 1976.
14. *Скупой В.Ф., Копылов В.П.* О синхронизации ЧМ-автогенератора // РЭ. 1979. Т. 24, № 7. С. 1374.
15. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.:Наука, 1980.
16. *Кузнецов Ю.А., Ланда П.С., Ольхововой А.Ф.* Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах // ДАН СССР. 1985. Т. 281, вып.2. С. 1164.
17. *Ланда П.С., Рендель Ю.С., Шер В.А.* Синхронизация колебаний в системе Лоренца // Изв.вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32, № 9. С. 1172.
18. *Dykman G., Landa P., Neimark Y.* Synchronising of chaotic oscillations by external force // Chaos, Solitons & Fractals. 1992. Vol. 1, № 4. P. 339.
19. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 29, № 9. С. 1050.
20. *Волковский А.Р., Рульков Н.Ф.* Экспериментальное исследование бифуркаций на пороге стохастической синхронизации // Письма в ЖТФ. 1989. Т.15, вып. 7. С. 5.
21. *Pecora L., Carroll T.* Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
22. *Chua L., M. Itoh., L. Kocarev, Eckert K.* Chaos synchronization in Chua's circuit // Chua's Circuits: A Paradigma for Chaos / Ed. R.N. Madan. Singapore: World Scientific, 1993. P. 309.
23. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Сущик М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // УФН. 1996. Т. 166, № 4. С. 365.
24. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14, вып. 6. С. 569.

25. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonova M.A.* Synchronization of chaos // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1992. Vol. 2, № 3. P. 633.
26. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E.* Synchronization of chaos: Proc. First International Conference on Applied Synergetic and Synergetic Engineering, June 21–23, 1994, Erlangen, Germany. P.200.
27. *Rosenblum M., Picovsky A., Kurths J.* Phase synchronization of chaotic oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 76. P. 1804.
28. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Effect of phase synchronization in driven chaotic oscillators // *IEEE Trans. CAS-I*. 1997.
29. *Shalfeev V.D., Osipov G.V.* Chaotic phase synchronization of coupled PLLS: Proc. 5-th International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, June 26–27, 1997, Moscow, Russia. P.139–144.
30. *Pikovsky A., Osipov G., Rosenblum M., Zaks M., Kurths J.* Attractor–repeller collision and cyclelet intermittency at the transition to phase synchronization // *Phys.Rev.Lett.* 1997. Vol. 79. (in print).
31. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // *ДАН СССР*. 1986. Т. 286, вып. 5. С. 1120.
32. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rossler oscillators // *Phys. Rev. E*. 1997. Vol. 55, № 3. P. 2353.
33. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Гуляев Ю.В., Селезнев Е.П.* Мультистабильные режимы в системах Фейгенбаума с диссипативной связью // *Письма в ЖТФ*. 1989. Т. 15, № 3. С. 60.
34. *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E., Astakhov V.V., Sosnovtseva O.V., Wu C.W., Chua L.O.* Dynamics of two coupled Chua's circuits // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1995. Vol. 5, № 6. P. 1677.
35. *Анищенко В.С., Сильченко А.Н., Хованов И.А.* Взаимная синхронизация процессов переключений в связанных системах Лоренца // *Письма в ЖТФ*. 1997. Т. 23, № 8. С. 14.
36. *Neiman A.B.* Synchronizationlike phenomena in coupled stochastic bistable systems // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49. P. 3484.
37. *Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S.* Mean switching frequency locking in stochastic bistable systems driven by periodic force // *Phys.Rev.Lett.* 1995. Vol. 75. P. 4157.
38. *Хованов И.А., Анищенко В.С.* // *Письма в ЖТФ*. 1996. Т. 2. С. 854.
39. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
40. *Heagy J.F. and Hammel S.M.* The birth of strange nonchaotic attractors // *Physica D*. 1994. Vol. 70. P. 140.
41. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989.

*Саратовский государственный
университет*

Поступила в редакцию 25.09.97

BIFURCATION OF CHAOTIC SYNCHRONIZATION IN ROSSLER SYSTEM WITH HARMONIC EXITATION

A.G. Balanov, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, O.N. Sosnovtzeva

Synchronization of chaotic oscillations in nonautonomous Rossler system from the point of view its universality for regular and chaotic regimes is investigated. Comparative analysis of different methods of the boundary of chaotic synchronization diagnostics, namely, the locking of basic frequencies, the stabilisation of difference of instant phases

of oscillations, and the levelling of mean time of returning to a secant surface, shows the equivalence of the mentioned approaches for spiral chaos. A set of results from numerical simulation allows us to suggest and substantiate hypothesis that there is a bifurcation of chaotic regime as an analogue of a tangent bifurcation for a limit cycle. Analysing the spectrum of Lyapunov exponents two types of chaos outside synchronization region which differ by number of zero Lyapunov exponents are found.



Баланов Александр Геннадьевич – родился в 1973 году. Окончил физический факультет СГУ (1995). Работает инженером на кафедре радиофизики. Область научных интересов – нелинейная динамика и стохастические процессы. Автор 5 научных работ.



Вадивасова Татьяна Евгеньевна – родилась в 1958 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1981), аспирантуру на кафедре радиофизики СГУ и защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук (1986). В настоящее время является доцентом кафедры радиофизики Саратовского университета. Имеет 29 публикаций в отечественной и зарубежной печати.



Постнов Дмитрий Энгелевич в 1983 году окончил физический факультет Саратовского государственного университета по специальности «радиофизика и электроника», до 1987 года – инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 году окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 года работал старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета, с 1995 года занимает должность доцента на той же кафедре. Автор 27 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.



Сосновцева Ольга Владимировна – родилась в 1966 году. Окончила физический факультет Саратовского университета (1989). Работала инженером в НИИ механики и физики при Саратовском университете (1989–1992). Защитила диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1996) по структурам и свойствам аттракторов неавтономных и связанных динамических систем. Имеет 12 публикаций в отечественной и зарубежной печати.