Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД», т.5, № 5, 1997 УДК 517.39

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЛПЫ ПРИ ПОМОЩИ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

Г. Г. Малинецкий, М. Е. Степанцов

Полное математическое описание поведения отдельно взятого человека на данном этапе развития науки не представляется возможным, поскольку его действия определяются очень большим количеством факторов, как рациональных, так и иррациональных. Однако известно, что поведение достаточно большой группы людей в стандартной ситуации легко поддается предсказанию и хорошо описывается вероятностным образом.

Предлагаемый авторами клеточный автомат позволяет моделировать поведение толпы людей, стремящихся двигаться в определенном направлении (например, в переходе метро, в дверях магазина, при панике в случае пожара и т.п.) при наличии препятствий (стен, ограждений, турникетов). Предлагается модификация этого автомата: учитывающая различные скорости участников движения.

Одной из наиболее серьезных проблем наших дней является обеспечение безопасности людей в нештатных ситуациях. Во многих таких ситуациях главной угрозой здоровью и жизни людей часто оказывается возникающая при этом паника.

При проектировании сооружений, рассчитанных на нахождение в них большого количества людей, полезно было бы смоделировать беспорядочное движение большой неорганизованной группы людей (которую в дальнейшем будем называть для краткости толпой) в условиях паники и устранить особенности конструкций, которые могут привести к заторам и давке.

Кроме того, жители крупных городов ежедневно сталкиваются с проблемой движения в толпе при пользовании общественным транспортом (например, в подземных переходах, в турникетах и на эскалаторах метро). Планирование строительства городских пешеходных коммуникаций целесообразно было бы вести, не только учитывая общий поток пассажиров, но и детально рассматривая движение людей на конкретных участках пути.

При математическом моделировании процессов, в которых активно действуют люди, возникает проблема, заключающаяся в том, что на данном этапе развития науки полное математическое описание поведения отдельно взятого человека не представляется возможным, поскольку его действия определяются очень большим количеством факторов как рациональных, так и иррациональных.

Однако поведение большой группы людей в стандартной ситуации легко поддается предсказанию и хорошо описывается вероятностным образом. Здесь работает закон больших чисел: даже если один человек по каким-то причинам решит действовать нетривиально, его действия никак не повлияют на группу в целом.

Для математического моделирования динамики толпы оказалось возможным применить класс крайне упрощенных дискретных моделей – клеточные автоматы [1], которые ранее успешно использовались во многих других областях исследований, в частности, для решения задач газодинамики [2–4].

Необходимый нам клеточный автомат должен, по–видимому, иметь два состояния клетки, соответствующие наличию и отсутствию в этой точке человека, и учитывать две составляющие движения толпы – хаотичную и направленную.

В книге Тоффоли и Марголуса [1] предлагается клеточный автомат, моделирующий диффузионные процессы, в котором правила заданы особым образом (рассматривается так называемая окрестность Марголуса).

1. В качестве поля клеточного автомата выбирается плоскость, разбитая на одинаковые квадраты – клетки; каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: «1» – в ней есть частица и «0» – в ней пусто.

2. Массив клеток разбит на блоки 2×2 двумя способами, которые будем называть четным и нечетным разбиениями (рис. 1, *а*).

3. На очередном шаге каждый из блоков четного разбиения поворачивается на $\pi/2$ по или против часовой стрелки с равной вероятностью (направление поворота выбирается при помощи генератора случайных чисел). Затем то же самое проделывается с блоками нечетного разбиения (рис. 1,*б*).

Модифицируем эти правила, добавив к диффузионной составляющей движения направленную. Для этого на каждом временном шаге будем производить перемещение частиц внутри блоков в некотором заданном направлении, если соответствующие соседние клетки свободны (то есть, там нет частиц), как показано на рис. 1, *в*.

Кроме этого, объявим некоторые области поля клеточного автомата запрещенными, то есть не будем выполнять в них этих перемещений частиц. Такие области будут соответствовать непроходимым стенам или другим препятствиям.

Найдем распределение плотности людей вдоль оси x (направления движения). Рассмотрим движение частицы (человека) вдоль этой оси как суперпозицию случайного блуждания и направленного движения.

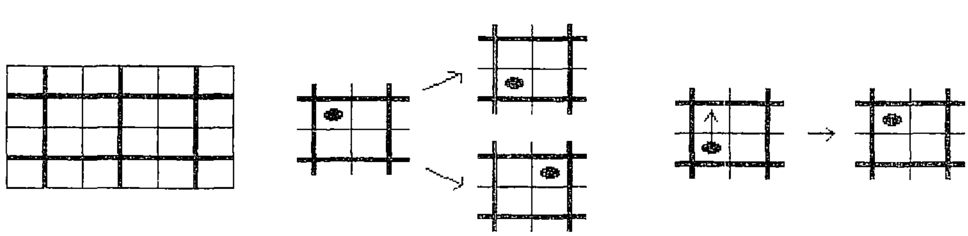
Такое движение описывается, как показано в [5], уравнением Фоккера – Планка

$$\partial\rho/\partial t + \partial/\partial x[A(x)\rho] - \partial^2/\partial x^2[B(x)\rho] = 0,$$

где координата одной из частиц выступает в качестве случайной величины, ρ – ее функция плотности вероятности, ее моменты

$$A(x) = \lim_{\Delta t\to 0}\overline{(x-x')}/\Delta t, \qquad B(x) = \lim_{\Delta t\to 0}\overline{(x-x')^2}/\Delta t \neq 0.$$

Из правил автомата найдем, с какой вероятностью частица переместится за один временной шаг в направлении оси x. Рассмотрев все возможные комбинации поворотов блоков и количества частиц в блоке, получим, что изменение координаты частицы за один шаг может принимать значения от –2 до 4 с вероятностями



а *б* *в*

Рис. 1

$$P(\Delta x{=}4) = {}^1/_8(1-\rho)^2,$$

$$P(\Delta x{=}3) = {}^1/_4(1-\rho),$$

$$P(\Delta x{=}2) = {}^1/_4 - {}^1/_8\,\rho^2,$$

$$P(\Delta x{=}1) = {}^1/_4,$$

$$P(\Delta x{=}0) = {}^1/_8 + {}^1/_4\,\rho - {}^1/_8\,\rho^2,$$

$$P(\Delta x{=}-1) = {}^1/_4\,\rho,$$

$$P(\Delta x{=}-2) = {}^1/_8\,\rho^2.$$

Примем приближенно $\lim_{\Delta t\to 0}[f(x)/\Delta t]=f(x)|_{\Delta t=1}$, откуда для $A(x)$ и $B(x)$ получим:

$$A(x) = {}^7/_2 - 2\rho(x), \qquad B(x) = 11/2 - 6\rho(x) + 2\rho^2(x)$$

и подставим эти выражения в уравнение Фоккера – Планка. Получаем:

$$\rho_t = (11/2 - 12\rho + 6\rho^2)\rho_{xx} - 12(1-\rho)(\rho_x)^2 - ({}^7/_4 - 4\rho)\rho_x.$$

Найдем распределения плотности частиц $u(x)$ вдоль оси x как среднее по ансамблю от функции распределения одной частицы:

$$u_t = (11/2 - 12u + 6u^2)u_{xx} - 12(1-u)(u_x)^2 - ({}^7/_4 - 4u)u_x.$$

Проведя аналогичные рассуждения для оси y, мы получим для распределения плотности частиц вдоль этой оси $v(y)$ параболическое уравнение

$$v_t = {}^3/_2 v_{yy},$$

поскольку движение в этом направлении задано в модели как чистая диффузия.

Если бы мы рассматривали задачу при помощи традиционных подходов, теперь необходимо было бы решать эти уравнения, являющиеся существенно нелинейными. Вместо этого на компьютере был реализован непосредственно сам разработанный клеточный автомат, и, с его помощью, был исследован ряд модельных задач.

На рис. 2 изображено движение толпы в сужающемся проходе. При этом измеряется временная зависимость плотности числа людей до сужения и после (в областях, выделенных прямоугольниками и отмеченных цифрами *1* и *2*). На рис. 3 показана та же ситуация в случае иной конфигурации сужения. В этом случае

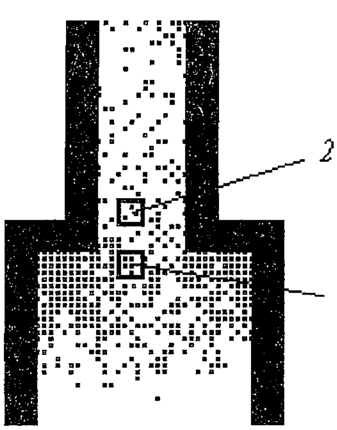


Рис. 2

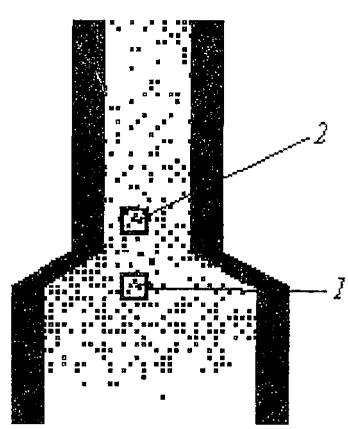
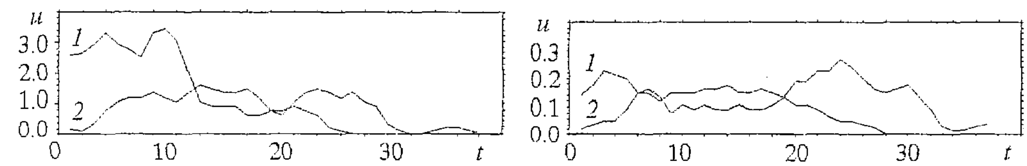


Рис. 3



а *б*

Рис. 4

«пробки» нет. На рис. 4 показаны временные зависимости плотности числа людей в областях *1* и *2* в этих двух случаях. В первом из них (см. рис. 4, *а*) плотность толпы перед сужением (в широкой части прохода) в течение некоторого отрезка времени устойчиво превышает плотность после сужения, что соответствует наличию «пробки». Во втором случае (см. рис. 4, *б*) этого явления нет.

Построенная модель, однако, не отражает того важного факта, что люди в толпе движутся с различными скоростями. Присвоение каждой частице индивидуальной скорости свело бы на нет такие достоинства модели, как простоту и однородность правил. Поэтому авторы применили подход, уже использованный ими в [3]. В модель были введены два сорта частиц: быстрые и медленные, что можно интерпретировать, например, как наличие в толпе людей с тяжелыми сумками или хозяйственными тележками, которым трудно двигаться быстро.

На четных шагах по времени оба сорта частиц двигались совершенно одинаково по ранее изложенным правилам. На нечетных же шагах двигались лишь быстрые частицы, а медленные оставались неподвижными и рассматривались наравне с непроходимыми стенами, мешая движению быстрых.

Известно, что в пешеходных переходах существует эффект «отрицательной вязкости», а именно: при прохождении сужения перехода скорость потока людей у стенок выше, чем в середине прохода. Не обнаружив этого эффекта у односкоростной модели, мы предположили, что он обусловлен различием средних скоростей отдельных людей. При проведении модельных расчетов с помощью модифицированного автомата это предположение подтвердилось: измерения потока частиц через сечение перехода устойчиво давали два максимума вблизи стенок и минимум в середине прохода. На рис. 5 показан характерный профиль усредненного значения потока частиц f в сечении перехода.

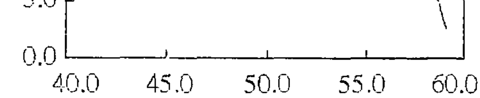


Рис. 5

Представляется, что описанная модель может оказаться полезной при проектировании сооружений, рассчитанных на значительные потоки людей, а также при оценке безопасности зданий и помещений.

Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 96–01–01161 и 96–02–18689) и ГНТП «Безопасность».

Библиографический список

1. *Тоффоли Т., Марголус Н.* Машины клеточных автоматов. М.: Мир, 1991.
2. *Frisch U., Hasslacher B., Pomeau Y.* Lattice–gas Automata for Navier–Stokes equation // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 56. P. 1505.
3. *Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е.* Клеточные автоматы для расчета

некоторых газодинамических процессов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36, № 5. С. 137.

4. *Малинецкий Г.Г., Степанцов М.Е.* Применение моделей класса решеточных газов для решения задач газодинамики // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т. 4, № 4,5. С. 59.

5. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. М.: Изд–во МГУ, 1991.

Институт прикладной математики РАН *Поступила в редакцию 11.07.97*

CELLULAR AUTOMATA FOR SIMULATIONS OF CROWD DYNAMICS

G. G. Malinetskii, M. Ye. Stepantsov

A full mathematical description of the behaviour of a person is not available at present time, because of a great number of factors, both rational and irrational, that have influence on it. On the other hand, the behaviour of a group in a simple situation can be easily predicted and described statistically.

A cellular automaton presented in the paper allows simulations of a crowd of people with an intention to move in a certain direction (i. e. in an underground passage, in a building in case of panic etc.) with some obstacles (walls, for example) on their way. We also propose a variation of the cellular automaton considering the difference of velocities of the difference of velocities of people in the crowd.

Малинецкий Георгий Геннадьевич родился в 1956 году в Уфе, окончил физический факультет МГУ (1979), защитил кандидатскую диссертацию на тему «Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных средах» (1982) и докторскую диссертацию на тему «Диффузионный хаос и новые типы упорядоченности в нелинейных средах» (1990) в Институте прикладной математики. В настоящее время работает там же заведующим сектором нелинейной динамики. Автор большого количества статей в области исследования хаоса и нелинейных явлений, а также учебника «Структуры, хаос, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику».

Степанцов Михаил Евгеньевич родился в 1972 году в Куйбышеве. Окончил физический факультет МГУ (1995). В настоящее время является аспирантом кафедры математики физического факультета МГУ. Автор 2 статей, посвященных применению клеточных автоматов для моделирования нелинейных явлений.