Изв.вузов «ПНД», т.5, № 5, 1997 УДК 519.8661.2

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОДАВЦОВ И ПОТРЕБИТЕЛЕЙ

И.С. Ремпен, А.А. Короновский

Рассматривается взаимодействие продавцов, предлагающих одинаковые товары по различным ценам и покупателей, устанавливающих для себя предельно возможную цену. Получены основные уравнения, описывающие динамику данной социально-экономической системы. Описан способ нахождения функции потенциального спроса по известной функции предложения.

Введение

С развитием синергетических и статистических методов анализа многокомпонентных систем значительно облегчается работа по исследованию социальных и экономических процессов. Важную роль в подобных исследованиях играет построение и изучение моделей, описывающих прежде всего качественную динамику рассматриваемых процессов. Так, на основе методов и уравнений статистической физики и нелинейной динамики В.Вайдлихом [1–3] была создана стратегия построения качественных и полуколичественных моделей биологических, социальных и экономических систем. Тем не менее, построение моделей, на основе анализа которых возможно было бы делать не только качественные, но и количественные прогнозы для сложных социально-экономических систем, остается на сегодняшний день весьма актуальной проблемой.

Пожалуй, одними из самых актуальных на сегодняшний день являются задачи исследования таких экономических процессов, как соотношение спроса и сбыта. Проблема взаимодействия продавцов и потребителей, соотношения спроса и предложения и установления цен рассматривалась различными авторами (например, [4]). Но в существующих на сегодняшний день работах не учитываются многие условия, как, например, возможность установления различных цен на товары одного качества, на что обращалось внимание в работах [5,6]. В данной работе мы предлагаем модель, которая, во–первых, учитывает факт разброса цен на одинаковые товары, и, во–вторых, претендует на возможность проведения количественных оценок состояния рынка и его динамики, пусть даже приблизительных. Как следует из проведенных исследований, поведение системы даже при значительных допущениях оказывается весьма сложным.

1. Общий вид модели

В данной модели мы будем рассматривать взаимодействие продавцов, предлагающих один и тот же вид товара, и покупателей, желающих приобрести этот товар. Пусть на данный товар разные продавцы устанавливают различные цены x, в зависимости от своих затрат и предположений о получении прибыли. Введем функцию $p(x,t)$, которая определяет распределение товаров на рынке по ценам и для которой выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x,t)dx = 1.$$

Пусть общее количество товаров в начальный момент времени – N_0, а в момент времени t – $N(t)$. Тогда

$$K(x,t)\ dx = N(t)p(x,t)\ dx \tag{1}$$

– количество товаров, предлагаемых покупателям по цене, попадающей в интервал $[x,x+dx)$. Пусть также общее число покупателей, желающих приобрести данный товар, в начальный момент рассмотрения будет M_0. Мы считаем, что покупатели, уже приобретшие товар, выбывают из рассмотрения, поэтому в момент t их будет $M(t)<M_0$. Каждый покупатель устанавливает для себя предельную цену, выше которой он уже не станет приобретать товар. Для учета этого вводится функция $g(x,t)$, описывающая распределение покупателей по соответствующим предельным ценам. В таком случае

$$L(x,t)\ dx = M(t)g(x,t)\ dx \tag{2}$$

– число покупателей, предельная цена $x_{\max}$ у которых попадает в интервал $[x,x+dx)$, то есть это те покупатели, которые будут приобретать товар только по цене не выше x. Функция $g(x,t)$ также удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)dx = 1.$$

Введем еще предположение о дефиците товаров

$$M_0 > N_0. \tag{3}$$

Из этого следует, что покупатель не будет обходить всех продавцов на рынке, а приобретет товар у первого же, если только цена не окажется выше предельной. Считаем также, что первоначальный запас товаров не пополняется (предположим, рассматривается один базарный день). Итак, в момент времени $t+dt$ товаров, продаваемых по цене от x до $x+dx$, останется:

$$N(t+dt)p(x,t+dt)dx, \tag{4}$$

потому что за интервал времени $[t, t+dt)$ будет куплено

$$\alpha N(t)p(x,t)M(t)\int_{x}^{\infty} g(y,t)dydxdt \tag{5}$$

товаров. Предполагается, что число купленных товаров по цене x за интервал времени от t до $t+dt$ пропорционально числу товаров, доступных на рынке в данный момент времени, длительности рассматриваемого временного интервала и числу покупателей, способных заплатить за этот товар требуемую цену x. Здесь α – коэффициент, присущий рассматриваемой системе и отвечающий за физическую возможность покупателя обойти определенное количество продавцов в единицу времени.

Получаем уравнение

$$N(t+dt)p(x,t+dt)dx = N(t)p(x,t)dx - \alpha N(t)p(x,t)M(t)\int_x^\infty g(y,t)dydxdt. \qquad (6)$$

Отсюда, устремляя dt к нулю,

$$\partial(N(t)p(x,t))/\partial t = -\alpha N(t)p(x,t)M(t)\int_x^\infty g(y,t)dy. \qquad (7)$$

Или иначе

$$\partial(K(x,t))/\partial t = -\alpha K(x,t)\int_x^\infty L(y,t)dy. \qquad (8)$$

Аналогично, покупателей в момент $t+dt$ станет

$$M(t+dt)g(x,t+dt)dx = M(t)g(x,t)dx - \alpha M(t)g(x,t)N(t)\int_{-\infty}^x p(y,t)dydxdt, \qquad (9)$$

откуда получаем уравнение

$$\partial(L(x,t))/\partial t = -\alpha L(x,t)\int_{-\infty}^x K(y,t)dy. \qquad (10)$$

Полагая, что цены не могут быть отрицательными, можно заменить нижний предел интегрирования на 0, что мы и будем делать в дальнейшем.

Определить общее число товаров и покупателей можно, воспользовавшись условиями нормировки для функций $p(x,t)$ и $g(x,t)$:

$$N(t) = \int_0^\infty K(x,t)dx, \qquad (11)$$

$$M(t) = \int_0^\infty L(x,t)dx. \qquad (12)$$

Нетрудно убедиться также в выполнении «закона сохранения»

$$\partial(N(x,t))/\partial t - \partial(M(x,t))/\partial t = 0.$$

2. Аналитическое решение в предельном случае $M_0 >> N_0$

Если предположить, что $M_0 >> N_0$ (значительный дефицит товаров), то на небольших интервалах времени можно считать функцию $L(x,t)$ неизменной.

$$L(x,t) = L(x,0) = L(x), \qquad (13)$$

что дает нам возможность получить аналитическую зависимость от x и t для функции предложения $K(x,t)$.

Из уравнения (8) получаем

$$\partial/\partial t[\ln K(x,t)] = -\alpha\int_x^\infty L(y,t)dy,$$

$$\ln K(x,t) - \ln K(x,0) = -\alpha\int_0^t\int_x^\infty L(y,t)dydt, \qquad (14)$$

$$K(x,t) = K(x,0)\exp[-\alpha\int_0^t\int_x^\infty L(y,t)dydt].$$

Теперь, предполагая, что функция L не зависит от времени, получаем

$$K(x,t) = K(x,0)\exp[-\alpha t\int_x^\infty L(y)dy]. \qquad (15)$$

3. Эволюция рынка

Рассмотрим динамику рынка при различных начальных формах функций спроса и предложения (1) и (2). Для численного моделирования нам достаточно рассмотреть отрезок цен $[0;\ X]$. Правомерно считать, что разброс цен имеет определенный предел $X<\infty$. Без ограничения общности можно принять $X=1$.

Виды распределения выбираются следующие.

1. p и g – функции Дирака.

$$p(x,0)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \infty, & x=a,\\ 0, & x>a,\end{cases}\qquad g(x,0)=\begin{cases}0, & x<b,\\ \infty, & x=b,\\ 0, & x>b.\end{cases}\tag{16}$$

Это будет означать, что все товары имеют одинаковую цену (жесткий государственный контроль).

2. Прямоугольное распределение.

$$p(x,0)=\begin{cases}0, & x<a,\\ A, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b,\end{cases}\qquad g(x,0)=\begin{cases}0, & x<c,\\ B, & c\le x\le d,\\ 0, & x>d.\end{cases}\tag{17}$$

A и B определяются из условия нормировки

$$A=1/(b-a),\qquad B=1/(d-c).$$

Разброс по ценам существует, но по каждой цене предлагается одно и то же количество товаров. Такое предположение скорее всего не соответствует реальной ситуации, но удобно для наглядного пояснения данной модели.

3. $p(x,0)$, $g(x,0)\sim xe^{-kx}$.

Пусть $p(x,0)=Axe^{-kx}$. Из условия нормировки получаем $A=k^2$.

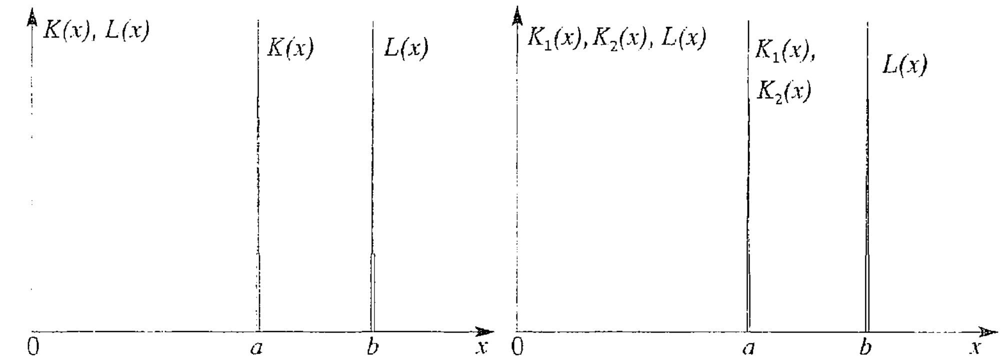
$$p(x,0)=k^2xe^{-kx},\qquad g(x,0)=s^2xe^{-sx}.\tag{18}$$

Такая форма распределений выбирается не случайно. Вполне естественным является предположение, что функция распределения товаров имеет максимум при некотором значении цены, а самые дешевые и самые дорогие товары представлены на рынке в минимальном количестве. Численные значения параметров выбирались нами из соображений удобства рассмотрения свойств данной модели, так как выбранные формы начальных распределений не совпадают с какими-либо реальными функциями, а имеют значение «контрольных задач».

На рис. 1–3, *а* представлен вид функций $K(x)$, $L(x)$ в начальный момент времени, а на рис. 1–3, *б* – те же функции через промежуток времени T, полученные численно с помощью уравнений (8) и (10), а также функция $K(x)$, рассчитанная по формуле (15). На всех рисунках, если нет специальных пояснений, индекс «1» соответствует функциям, подсчитанным по точным формулам (8) и (10), а индекс «2» – по асимптотической формуле (15). Во всех случаях положим $N_0=1$, а $M_0/N_0=3$. На интересующих нас временах рассмотрения такое соотношение M_0/N_0 оказывается вполне удовлетворительным.

Случай 1. Как видно из рис.1, в случае распределения (16) форма функций $L(x)$, $K(x)$ не изменяется со временем. Поскольку в нашей модели мы не учитываем такой факт, что в течение дня продавцы сами будут изменять цену на свой товар, то такое поведение функций вполне естественно: изменяется число товаров, представленных на рынке и число покупателей, но не их распределения по ценам.

Случай 2. Вид функций для такого распределения представлен на рис. 2. Видно, что с течением времени лучше всего раскупаются самые дешевые товары, поскольку их охотно приобретают как бедные, так и богатые покупатели. Самые



а *б*

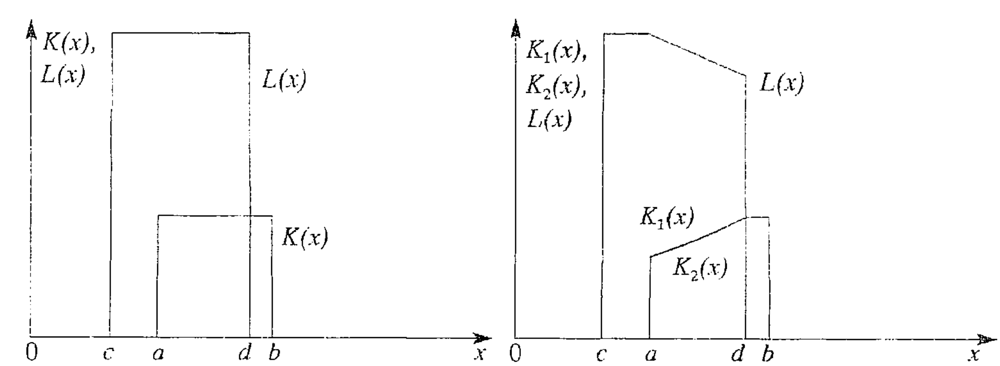
Рис. 1. *а* – начальные распределения продавцов $K(x)$ и покупателей $L(x)$ в виде δ–функций (16). Все товары имеют одинаковую цену, приемлемую для всех покупателей. a=0.5, b=0.75, α=0.05; *б* – эволюция распределения (16) за время T=20. Значения общего числа покупателей и товаров следующие: $N_1(T)$=0.37437, $N_2(T)$=0.36938, $M_1(T)$=2.37437, $M_2(T)$=2.36938

дорогие товары рискуют остаться нераспроданными. Функция $K_2(x)$, подсчитанная по асимптотической формуле (15), лежит немного ниже, чем точная функция $K_1(x)$. Это объясняется тем, что, согласно предположению (14), число покупателей не изменяется со временем, и, следовательно, в этом случае, число проданных товаров оказывается завышенным по сравнению с реальным. Однако, на интересующих нас временах рассмотрения различие между асимптотической и точной функциями невелико.

Случай 3. До сих пор мы предполагали, что функции распределения покупателей и товаров «перекрываются». Рассмотрим теперь случай, когда цены на предлагаемые товары лежат гораздо выше возможностей большинства покупателей. Для учета этого формулы (18) переписываются в виде

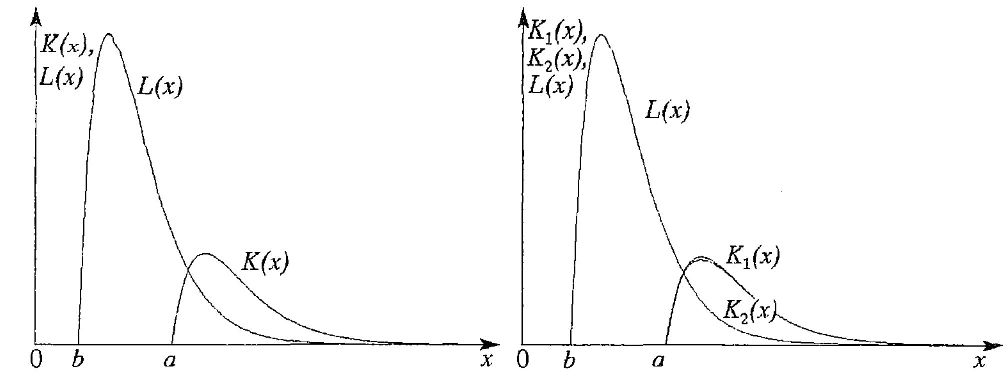
$$p(x) = k^2(x-a)e^{-k(x-a)}, \qquad g(x) = s^2(x-b)e^{-s(x-b)}. \tag{18a}$$

Этот случай иллюстрируется на рис. 3. Как и следовало ожидать, раскупается лишь небольшое количество товаров, которые приобретают самые богатые слои населения.



а *б*

Рис.2. *а* – прямоугольная форма начального распределения (17). Цены на часть товаров лежат выше возможностей самых богатых покупателей. a=0.3, b=0.55, c=0.2, d=0.5, α=0.05; *б* – вид функций $K(x)$, $L(x)$ спустя время T=20. Число покупателей и количество товаров по доступным ценам уменьшается. $N_1(T)$=0.76280, $N_2(T)$=0.75692, $M_1(T)$=2.76280, $M_2(T)$=2.75692



а б

Рис. 3. *а* – экспоненциальная форма начального распределения (18а). k=7.0, s=8.0, a=0.3, b=0.1, α=0.05; *б*, – эволюция распределения (18а) спустя время T=20. Раскуплено очень небольшое количество товаров. $N_1(T)$=0.97305, $N_2(T)$=0.97279, $M_1(T)$=2.97305, $M_2(T)$=2.97279

4. Определение потенциального спроса

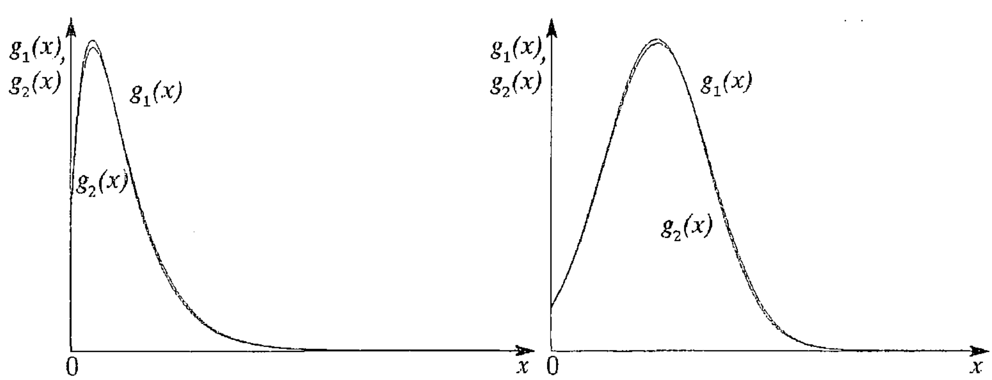
Как правило, гораздо проще получить реальную функцию предложения, чем определить распределение «намерений» покупателей, подобное тому, которое мы вводим в нашей модели. Будем считать теперь, что нам известна функция распределения товаров на рынке $K(x,t)$ в два различных момента времени t=0 и t=T. С помощью данной модели можно определить функцию $g(x)$ в тех случаях, когда правомерно предположение (13). Из (2), (14) и (12) получаем:

$$L(x) = (1/\alpha T)(\partial/\partial x)\{\ln[K(x,T)/K(x,0)]\},$$

$$M = \int_0^\infty L(x)dx,$$

$$g(x) = \ln_x'[K(x,T)/K(x,0)]/\int_0^\infty \ln_x'[K(x,T)/K(x,0)]dx. \qquad (19)$$

На рис. 4 представлен вид функции $g(x)$, полученной по формулам (8), (10) для момента времени T_1 и рассчитанной по формуле (19). Функция $K(x,T_1)$ была предварительно получена численно из (8), (10) для тех же самых значений параметров для наперед заданных функций $K(x,0)$ и $L(x,0)$. Рис. 4, *а* соответствует



а б

Рис. 4. Точное ($g_1(x)$) и асимптотически определенное ($g_2(x)$) распределение покупателей для случая: *а* – начального распределения (18), k=7.0, s=8.0, α=0.05, T=10; *б* – начального распределения (20), σ_p=1.8, σ_g=2.2, a=2.5, b=3.5, α=0.05, T=10

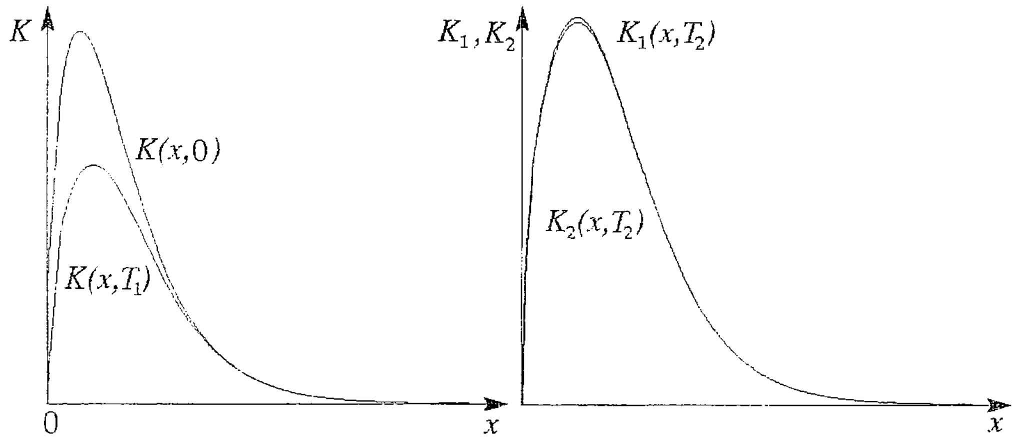


Рис. 5. Функция предложения (распределения товаров на рынке): *а* – полученная для двух различных моментов времени $T=0$ и $T_1=4$ для случая распределения (18). $N(0)=1.0$, $N(T_1)=0.71540$; *б* – определенная асимптотически ($K_2(x)$) и точно ($K_1(x)$) в момент времени $T_2=6$, $N_1(T_2)=0.63749$, $N_2(T_2)=0.63217$

форме начального распределения (18), а на рисунке 4, *б* представлена Гауссова форма распределения:

$$p(x) = [1/(2\pi\sigma_p^2)^{1/2}]\exp[(x-a)^2/2\sigma_p^2)], \quad g(x) = [1/(2\pi\sigma_g^2)^{1/2}]\exp[(x-b)^2/2\sigma_g^2)]. \quad (20)$$

В этом случае для выполнения условий нормировки нам приходится считать, что цены могут быть отрицательными. Для вида распределения (16) и (17) с помощью данной модели нельзя определить функцию спроса, так как уравнение (19) требует, чтобы функции $K(x,0)$ и $K(x,T)$ были непрерывны и не равны нулю ни в какой точке x.

Можно также, при заданных формах распределения $K(x,0)$ и $K(x,T_1)$, определить вид функции $K(x)$ в любой момент времени T_2. Подставляя (19) в (15), получаем:

$$K(x,T_2) = K(x,0)[K(x,T_1)/K(x,0)]^{T_2/T_1}. \quad (21)$$

На рис. 5, *а* изображена функция $K(x)$ в моменты времени 0 и T_1 (входные данные), а на рис. 5, *б* – в момент времени T_2, подсчитанная по формуле (21) и по формулам (8), (10). Видно, что для относительно небольших значений T_1 и T_2 результаты хорошо совпадают.

6. Прибыль

Представляется также интересным рассмотреть график прибыли, которая будет определяться, как разница между первоначальным числом товаров и оставшимся еще непроданным на данный момент времени, умноженная на цену, по которой эти товары были проданы*:

$$V(x,t) = (N(0)\,p(x,0) - N(t)\,p(x,t))x. \quad (22)$$

* Здесь мы рассматриваем чистую прибыль, без учета затрат продавцов на приобретение товара, транспортировку его на рынок и т.д.

Рис. 6. Прибыль, получаемая продавцами в зависимости от существующей функции возможностей покупателей. Высокой покупательной способности (18) соответствует функция $V_1(x,T)$, а низкой покупательной способности (18а) – функция $V_2(x,T)$. k=7.0, s=8.0, a=0.3, b=0.1, α=0.05, T=10

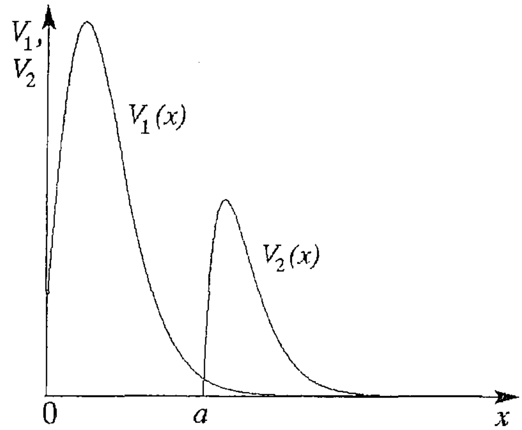


График прибыли представлен на рис. 6 для формы распределения (18), соответственно для случаев низкой и высокой покупательной способности населения. Можно видеть, что максимальную прибыль получают не те продавцы, которые продают товар по максимальной цене.

Выводы

Рассмотренная модель интересна тем, что может иметь прямое практическое применение. Зная динамику функции предложения, мы имеем возможность определить функцию спроса на данный товар. Согласно полученным результатам можно изменять функцию предложения с целью извлечения максимальной прибыли. Прежде, чем начинать массовую продажу, удобно было бы провести вышеописанное исследование для небольшой пробной партии товара.

Интересно, отметить также такой факт, что казалось бы весьма простой процесс распродажи товаров, при условии, что число товаров не возобновляется, описывается сложной системой нелинейных интегрально–дифференциальных уравнений, решение которых удается отыскать только для асимптотического случая.

Библиографический список

1. *Weidlich W., Haag G.* Concepts and models of a quantitative sociology. Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag, 1983.

2. *Weidlich W.* Stability and cyclity in social systems // Behavioral Science. Vol.33, 1988.

3. *Weidlich W.* The use of the statistical models in sociology // Collect. Phenom. 1972.

4. *Волгин Л.Н.* Модель оптимизации договорной цены // Экономика и математические методы. 1995. Т.34, вып.4.

5. *Стинглер Дж.Дж.* Экономическая теория информации // Экономика и математические методы. 1994. Т.30, № 1.

6. *Короновский А.А.* О механизмах установления рыночной цены // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 4,5. С.92.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 17.04.97
после переработки 8.07.97

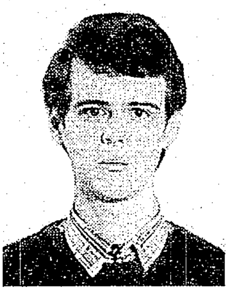
NONLINEAR MODEL OF CUSTOMERS AND SELLERS INTERACTION

I.S. Rempen, A.A. Koronovskiy

In this work the interaction of customers and sellers is examined. Goods of the same kind may be selled by different prices and every customer sets the limit price he is

able to pay. The dynamics of the system with different initial forms of supply and demand functions is examined. The method of deriving the demand and the profit functions by the given supply function is described.

Ремпен Ирина Сергеевна – родилась в 1974 году. Закончила Саратовский Государственный университет имени Н.Г.Чернышевского в 1996 году. Аспирантка СГУ. Область научных интересов – колебания и волны в активных нелинейных средах; моделирование экономических и биологических процессов. Имеет семь научных публикаций.



Короновский Алексей Александрович – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально–экономических процессов. В Издательстве ГосУНЦ «Колледж» вышла монография в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым «Нелинейная динамика в действии» (1996). Автор нескольких статей в центральной печати.