



ПАРАДИГМА САМООРГАНИЗОВАННОЙ КРИТИЧНОСТИ. ИЕРАРХИЯ МОДЕЛЕЙ И ПРЕДЕЛЫ ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ

Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов

Проведено всестороннее исследование явления самоорганизованной критичности (SOC). SOC-системы изучены с точки зрения теории ветвящихся процессов. Продемонстрирована возможность перехода системы от критичного к некритичному поведению. Введена новая статистическая характеристика – масштаб, при помощи которой дано строгое определение критичности. Построена иерархия SOC-моделей от простейших ветвящихся процессов до сложной распределенной критичной системы. Особое внимание уделено вопросам принципиальной возможности прогноза в критичных системах.

Введение

В последние годы огромный интерес вызывает явление, известное как самоорганизованная критичность (SOC) [1]. Это явление характерно для многих физических, биологических, экономических, социальных и прочих систем. В качестве наиболее ярких примеров проявления SOC можно привести техногенные и природные катастрофы. Типичными представителями первых являются аварии на ядерных объектах и химических предприятиях, авиакатастрофы и гибель судов. А вторых – землетрясения, сходы лавин и селей. В этом же ряду стоят экономические кризисы и бумы, процессы биологической эволюции, этногенеза и т.п.

Для подобных явлений характерна одна и та же особенность: наибольший ущерб (или же эффект) приходится на очень редкие, но, вместе с тем, очень крупные события. В отличие от некритических систем, характеризующихся гауссовыми или схожими с ними законами распределения изучаемых величин, в критических системах имеют место степенные законы, справедливые на протяжении многих порядков (в качестве классического примера можно привести закон Рихтера – Гутенберга, определяющий количество землетрясений в зависимости от их энергии $N(E) \propto E^{-\alpha}$, где $0.8 \leq \alpha \leq 1.1$ для разных участков земной поверхности [2]). Соответственно, кардинально меняется содержание таких понятий, как характерное время или характерная длина. В связи с чем встает вопрос о фундаментальных механизмах, лежащих в основе подобного поведения, а также о введении новых количественных характеристик для SOC-систем.

Базовой моделью теории самоорганизованной критичности является куча песка. Пусть мы имеем поднос, в центр которого по одной добавляются песчинки. Если на каком-либо участке кучи наклон становится слишком велик, то песчинка соскальзывает вниз, увлекая за собой другие песчинки и срывая, тем самым, лавину, которая либо затухает, попав в область с небольшим наклоном, либо

достигает края подноса, где песчинки сваливаются с него и покидают систему.

Если средний наклон кучи не очень велик, то очередная песчинка, скорее всего, не вызовет значительных изменений (докритичное состояние). Если наклон очень большой, то куча является метастабильной, и добавление одной единственной песчинки может привести к макроскопическому оползну, в который будет вовлечена большая масса песка (сверхкритичное состояние). Но если наклон имеет некоторое промежуточное значение, то нельзя указать характерный размер лавины, вызываемой добавлением одной песчинки, и закон распределения количества лавин от их размера имеет степенной вид (критичное поведение). Независимо от начального состояния куча песка эволюционирует к критичному состоянию – «аттрактору», в котором она характеризуется вполне определенным значением среднего наклона. Эта задача может быть сформулирована на языке клеточных автоматов с соответствующим компьютерным моделированием [1]. Ряд важных результатов для других моделей, демонстрирующих самоорганизованную критичность, представлен в работах [3–5].

Раздел 1 данной работы посвящен терминологии теории и вопросу применимости чисто степенных законов. Во 2-м разделе изучается природа явления самоорганизованной критичности с точки зрения теории ветвящихся процессов. В частности, рассматривается ветвящийся процесс, демонстрирующий переход от критичного поведения к некритичному при вариации управляющего параметра, что представляется очень важным. В 3-м разделе вводится удобная для описания критичных распределений статистическая характеристика, названная масштабом. Раздел 4 посвящен изучению новой нераспределенной модели, демонстрирующей самоорганизованную критичность и характеризующейся исключительной ясностью и простотой как при компьютерном моделировании, так и при аналитическом изучении, и способной служить «полигоном» для выдвижения и проверки гипотез. Одной из принципиальных особенностей модели является наличие всего двух управляющих параметров, что позволяет легко провести ее полное исследование. Распределенный аналог этой модели строится в 5-м разделе. В 6-м разделе обсуждаются вопросы предсказуемости самоорганизованной критичности. Заключительный раздел посвящен обсуждению результатов.

1. О терминологии

Само понятие «критичность» восходит к теории фазовых переходов второго рода. Температурные зависимости многих величин вблизи критической температуры T_c имеют степенной вид $\propto (T - T_c)^{\alpha}$; кроме того, при $T = T_c$ чисто степенной вид приобретает также корреляционная функция $G(r) \propto r^{-\alpha}$ и характерная длина становится бесконечной [6]. Наличие степенных законов в задачах самоорганизованной критичности, по-видимому, послужило поводом для чисто механического переноса термина.

Подобные аналогии являются весьма поверхностными и наталкиваются на то простое возражение, что теория самоорганизованной критичности, как правило, имеет дело с распределениями *аддитивных* физических величин. Для них

моменты $\mu_r = \int_0^{\infty} N(x) x^r dx$, по крайней мере, до второго включительно, должны оставаться конечными. Таким образом, закон распределения количества событий от их размера $N(x) \propto x^{-\alpha}$ не может оставаться справедливым для достаточно больших x , во всяком случае, при $\alpha < 3$. Более того, как станет ясно из дальнейшего, принципиальным является то, как быстро он начинает нарушаться.

В свете этого понятие «самоорганизованная критичность» представляется целесообразным рассматривать как самостоятельный термин, не предполагающий наличие закона распределения строго заданного вида, хотя интуитивно ясна некоторая связь между критичностью и законами близкими к степенным. Точное определение понятия «критичность» будет предложено в 3-м разделе.

2. Критичность как ветвящийся процесс

При всем разнообразии систем, демонстрирующих самоорганизованную критичность, они имеют одно общее свойство: возможность лавинообразного роста количества (массы, объема и т.п.) ресурса, вовлеченного в динамику в рамках элементарного события. В связи с этим представляется целесообразным обратиться к теории ветвящихся процессов.

2.1. Независимые частицы. Закон «минус три вторых». Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется система невзаимодействующих частиц, каждая из которых может на очередном шаге распасться с вероятностью p или же с вероятностью p_i превратиться в i частиц, где $0 \leq i \leq n$ (здесь и далее мы будем различать распад и превращение в ноль частиц). Поставим вопрос: если в начальный момент была одна частица, сколько всего частиц распадется за время существования ее потомства? Точнее, какова вероятность того, что распадется ровно столько-то частиц? Этот вопрос равносильен вопросу, сколько частиц образуется, так как эти числа различаются на единицу. (Задача может быть наглядно проинтерпретирована, как вычисление числа погибших от эпидемии, при которой большой в течение дня может умереть с вероятностью p , выздороветь – с вероятностью p_0 или заразить еще i человек с вероятностью p_{i+1} .)

Пусть вероятность того, что распадется ровно j частиц, равна v_j . Составим из величин v_j производящую функцию

$$\varphi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j v_j. \quad (1)$$

Поскольку частицы независимы, производящая функция системы из k частиц есть просто $\varphi^k(s)$ [7]. Определив, кроме того, функцию $F(u) = \sum_{i=0}^n u^i p_i$, можно легко записать уравнение для $\varphi(s)$, соответствующее одному шагу по времени,

$$\varphi(s) = ps + F(\varphi(s)). \quad (2)$$

Для корректности задачи необходимо, чтобы потомство частицы исчезало с единичной вероятностью. Математическое ожидание числа частиц, рождающихся на очередном шаге из одной частицы, есть $F'(1)$, то есть задача является корректной, если $F'(1) \leq 1$ [7]. Интерес представляет только случай, когда $F(u)$ – полином степени не менее двух, то есть $F''(u) \neq 0$.

Дифференцируя (2) по s , имеем

$$\varphi'(s) (1 - F'(\varphi)) = p, \quad (3)$$

следовательно, $\varphi' = p/[1 - F'(\varphi)]$. Поскольку функции $\varphi(s)$ и $F'(u)$ являются строго возрастающими, то существует такое $s_0 > 1$, что

$$F'(\varphi(s_0)) = 1. \quad (4)$$

Обозначим $\varphi_0 = \varphi(s_0)$. Очевидно, что φ_0 конечно, иначе при $s \rightarrow s_0$ правая часть (2) будет расти быстрее левой. Из конечности φ_0 автоматически следует и конечность s_0 . С другой стороны, из (4) ясно, что $\varphi'(s_0) = \infty$. По сути дела, s_0 представляет собой ближайшую к началу координат особенность функции $\varphi(s) = 1 + p \int_1^s dz/[1 - F'(\varphi(z))]$, определяющую радиус сходимости ряда Лорана (1).

Представим $\varphi(s)$ в окрестности точки s_0 в виде

$$\varphi(s) = \varphi_0 - w(s_0 - s)^\gamma + \dots \quad (5)$$

Тогда при $s \rightarrow s_0$ уравнение (3) запишется в виде

$$w\gamma(s_0-s)^{\gamma-1}[1-F'(\varphi_0) -F''(\varphi_0) (\varphi-\varphi_0) -\dots]=p,$$

что с учетом (4) и (5) дает

$$\gamma w^2(s_0-s)^{2\gamma-1}F''(s_0)=p.$$

Чтобы левая часть имела конечный ненулевой предел, необходимо выполнение соотношения $\gamma=1/2$. Следовательно, $w^2=2p/F''(s_0)$. Далее, пользуясь разложением функции $(s_0-s)^{1/2}$ в ряд Лорана

$$(s_0-s)^{1/2} = s_0^{1/2} - s_0^{1/2}/(2\pi^{1/2})\sum_{j=0}^{\infty}(s/s_0)^j \Gamma(j-1/2)/\Gamma(j+1), \quad (6)$$

окончательно получаем асимптотическое соотношение при $j \rightarrow \infty$

$$v_j \cong \{ps_0/[2\pi F''(s_0)]\}^{1/2}j^{-3/2}\exp(-j\ln s_0). \quad (6a)$$

Тот факт, что асимптотическое поведение коэффициентов ряда Лорана определяется характером ближайшей к началу координат особенности, позволяет использовать при разложении в нуле формулу, верную в окрестности точки s_0 .

Таким образом, доказан закон «минус три вторых», гласящий, что распределение числа распавшихся частиц в ветвящихся процессах с независимыми частицами имеет в асимптотике при $j \rightarrow \infty$ вид

$$v_j \propto j^{-3/2}\exp(-\beta j) \quad (7)$$

вне зависимости от конкретных значений параметров процесса, что особенно полезно в тех случаях, когда их не удастся вычислить. Приведенное доказательство представляет собой развитие идей, изложенных в работах [3,8].

Здесь следует сразу оговориться, что подобные процессы не могут рассматриваться как *самоорганизованная* критичность, поскольку значения всех параметров жестко заданы и никакая самоорганизация не имеет места. Тем не менее, как будет показано в разделе 4, к ним может сводиться рассмотрение «полноценных» SOC-моделей.

2.2. Зависимые частицы. Переход критичность – некритичность.

Несмотря на универсальность закона «минус три вторых» наблюдаемые во многих SOC-системах законы распределения не удовлетворяют формуле (7) и обычно характеризуются значениями показателя $\alpha < 3/2$. Таким образом, возможностей, предоставляемых аппаратом ветвящихся процессов с независимыми частицами, недостаточно для анализа этих моделей. Провести сколько-нибудь серьезное аналитическое исследование влияния взаимодействия частиц на статистические свойства ветвящегося процесса и вывести какие-либо закономерности не удастся. Поэтому ограничимся рассмотрением простейшего ветвящегося процесса со взаимодействием, дающего, тем не менее, глубокое представление о природе распределений, возникающих в теории самоорганизованной критичности.

Итак, пусть на очередном шаге ветвящегося процесса, если частиц было две или больше, одна из них с вероятностью \tilde{p} распадается, а с вероятностью $\tilde{q}=1-\tilde{p}$ превращается в две частицы; если же имелась всего одна частица, то с ней происходит то же самое, но с вероятностями p и $q=1-p$, соответственно. Ограничиваясь случаем $q \geq \tilde{q}$, введем величину

$$\xi = \tilde{q}/q, \quad \xi \in [0;1]$$

как меру независимости частиц в ветвящемся процессе. Вопрос остается тем же, что и в начале этого раздела: какова вероятность того, что за время существования потомства одной частицы произойдет определенное число распадов? Компьютерный анализ этой задачи показывает, что закон распределения может быть удовлетворительно приближен формулами вида

$$N(x) \propto x^{-\alpha} \exp(-\beta x), \quad (8)$$

причем параметр α изменяется от 0 до $3/2$ при изменении ξ от 0 до 1, как показано на рис. 1, а, б.

Таким образом, имеет место плавный переход между критичным и некритичным законами распределения по мере изменения величины ξ . В свете этого само понятие «критичность» должно рассматриваться не как качественное, а как присущее системе в большей или меньшей степени с соответствующей количественной характеристикой, которая будет предложена в 3-м разделе.

Сформулированная выше задача может быть легко сведена к ветвящемуся процессу с независимыми частицами. Для этого переформулируем ее условие следующим образом: имеется материнская частица, которая с вероятностью p распадается, а с вероятностью q сохраняется, порождая при этом одну дочернюю частицу, которая в свою очередь распадается или делится на две (опять же дочерние) частицы с вероятностями \tilde{p} и \tilde{q} , соответственно; материнская и дочерние частицы полностью независимы друг от друга; когда все потомство дочерних частиц исчезает, то очередь вновь доходит до материнской частицы и т.д. Обозначим через $\phi(s)$ производящую функцию материнской частицы, а через $\psi(s)$ — дочерней (неважно какой именно, так как они полностью равноценны). Поскольку материнская и дочерние частицы независимы, то, как нетрудно понять из сказанного выше, $\phi = ps + q\psi\phi$, то есть

$$\phi(s) = ps / [1 - q\psi(s)]. \quad (9)$$

Для функции ψ , в свою очередь, запишем уравнение по образцу (2): $\psi = \tilde{p}s + \tilde{q}\psi^2$, откуда имеем

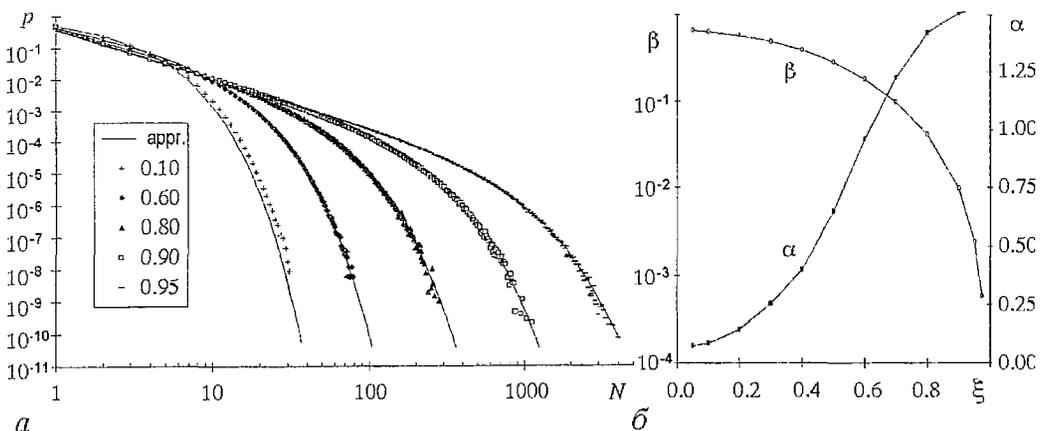


Рис. 1. Распределения числа распадов при различных значениях ξ и их аппроксимации зависимостями вида (8). При приближении ξ к 1 распределение становится похожим на характерное для критичности степенное, но при малых ξ оно имеет отнюдь не степенной вид. Результаты приведены для $q=0.5$ (а). Поведение параметров α и β при изменении ξ от 0 до 1; налицо переход от некритичного поведения к критичному. Результаты приведены для $q=0.5$ (б)

$$\psi(s) = [1 \pm (1-4\tilde{p}\tilde{q}s)^{1/2}]/(2\tilde{q}) = [1 - (1-4\tilde{p}\tilde{q}s)^{1/2}]/(2\tilde{q}). \quad (10)$$

Перед корнем был выбран знак «минус», чтобы выполнялось условие нормировки $\psi(1)=1$.

Далее, вводя обозначения $s_0=1/(\tilde{4}\tilde{p}\tilde{q})$ и $s_1=(q-\tilde{q})/(\tilde{p}q^2)$ и подставляя (10) в (9), получим

$$\varphi(s) = ps[1+[1-(1-s/s_0)^{1/2}]/[2(1-\xi)]]/(1-s/s_1). \quad (11)$$

Как и при выводе закона «минус три вторых», через v_j будем обозначать коэффициенты разложения $\varphi(s)$ в ряд Лорана. Введем, кроме того, обозначение

$$h(s)=1+[1-(1-s/s_0)^{1/2}]/[2(1-\xi)]=\sum_{i=0}^{\infty} s^i h_i.$$

Тогда (11) запишется в виде

$$\varphi(s) = [ps/(1-s/s_1)]h(s) = ps \sum_{i=0}^{\infty} s^i h_i \sum_{i=0}^{\infty} (s/s_1)^i,$$

отсюда имеем

$$v_{j+1} = p \sum_{i=0}^j s_1^{-j-i} h_i = ps_1^{-j} \sum_{i=0}^j s_1^i h_i = ps_1^{-j} [h(s_1) - \sum_{i=j+1}^{\infty} s_1^i h_i]. \quad (12)$$

Пользуясь формулой (6), легко получить $h_i \approx -i^{-3/2} s_0^{-i} / [4(1-\xi)\pi^{1/2}]$. С учетом чего второе слагаемое в скобках в (12) можно приблизить интегралом

$$-\sum_{i=j}^{\infty} s_1^i h_i \approx 1/[4(1-\xi)\pi^{1/2}] \sum_{i=j}^{\infty} i^{-3/2} (s_1/s_0)^i \approx I(j, s_0/s_1) / [4(1-\xi)\pi^{1/2}],$$

где $I(j, \mu) = \int_j^{\infty} x^{-3/2} \mu^{-x} dx$. Для $I(j, \mu)$, учитывая соотношение $s_1/s_0 = 4\xi(1-\xi) \leq 1$, при $\xi=1/2$ имеем $I(j, 1) = j^{-1/2}$, а при $\xi \neq 1/2$ $I(j, s_0/s_1) \approx (s_0/s_1)^{-j-3/2} / [4(1-\xi)\ln(s_0/s_1)]$. Поскольку

$$h(s_1) = \begin{cases} (1-2\xi)/(1-\xi), & \text{если } \xi < 1/2, \\ 0, & \text{если } \xi \geq 1/2, \end{cases}$$

окончательно находим

$$v_j \approx \begin{cases} [p(1-2\xi)/(1-\xi)] \exp(-j \ln s_1), & \text{если } \xi < 1/2, \\ [p/\pi^{1/2}] j^{-1/2} \exp(-j \ln s_0), & \text{если } \xi = 1/2, \\ pj^{-3/2} \exp(-j \ln s_0) / \{4(\xi-1) \ln[4\xi(1-\xi)] \pi^{1/2}\}, & \text{если } \xi > 1/2. \end{cases} \quad (13)$$

Полученная формула дает значение главного члена асимптотики коэффициентов v_j при $\xi \in [0; 1]$. Как мы видим, он существенным образом зависит от ξ . Строго говоря, формула (8) совпадает с (13) только при трех значениях $\xi=0; 1/2; 1$, а при всех остальных ξ представляет собой не более чем аппроксимацию. Тем не менее подобное приближение является вполне разумным, поскольку сами зависимости в отличие от главных членов их асимптотик меняются плавно при изменении параметра, а не скачком.

В 1-м разделе было указано на формальную неприменимость чисто степенных формул для законов распределения в критичных системах. Теперь мы столкнулись с более общим ограничением. Квазистепенные законы вида $N(x) \propto x^{-\alpha} u(\beta x)$, где $u(t)$ достаточно быстро убывает при больших t и приблизительно постоянна при малых, могут быть использованы лишь в том случае, если мы имеем априорную информацию (например, из теории) о функции $u(t)$. В противном случае перед нами неизбежно встает весьма сложная задача выделения области

средней асимптотики, где, с одной стороны, степенная зависимость $N(x) \propto x^{-\alpha}$ уже начала выполняться, а с другой – влияние поправки $y(\beta x)$ еще несущественно. Эта задача еще более осложняется тем, что область изменения аргумента в экспериментально получаемых зависимостях ограничена справа из-за конечности статистической выборки, размер которой может существенно повлиять на получаемое значение α .

Применительно к рассмотренной задаче формулы вида (8) пригодны, если мы хотим иметь всего лишь компактную приближенную запись закона распределения. Однако входящие в них величины α и β представляют собой не более чем параметры аппроксимации, поскольку, как уже было сказано, зависят от объема имеющихся статистических данных. То есть они не применимы, если мы хотим иметь характеристику изучаемой системы, которой можно придать конкретный физический смысл. Построению подобной характеристики посвящен следующий раздел.

3. Среднее и масштаб. Что такое самоорганизованная критичность?

Предположим, что в результате некоторого эксперимента мы установили, что случайная величина η значение x принимала $N(x)$ раз. Простейшей ее статистической характеристикой служит математическое ожидание $M\eta = \mu_1 / \mu_0$, где $\mu_i = \int N(x)x^i dx$. Однако применительно к SOC-моделям величина математического ожидания не дает *никакого* представления о масштабе происходящих в системе событий. Для модели, которая будет описана в разделе 4, $M=1$ вне зависимости от значений управляющих параметров и того, насколько критичным является ее поведение.

Помимо того, что среднее малоинформативно, во многих естественных системах, демонстрирующих критичное поведение, оно *в принципе не может быть определено* по данным, полученным в результате наблюдений или эксперимента. Это обусловлено тем, что, как правило, существует минимальное регистрируемое событие, определяемое чувствительностью приборов или методик. А поскольку в SOC-системах, имеющих «широкие» законы распределения, значение нормировочного интеграла набирается, главным образом, при малых x , момент μ_0 , а с ним и среднее, зачастую не могут быть определены по экспериментальным данным. (По этой причине сейсмологи, например, приводя среднее значение энергии зарегистрированных землетрясений, обычно указывают минимальное значение магнитуды.)

Перечисленных выше недостатков лишена величина $Sc\eta$, названная масштабом и определяемая как

$$Sc\eta = \mu_2 / \mu_1. \quad (14)$$

Значения интегралов для μ_1 и μ_2 набираются при больших x , и ограничение области регистрации слева несущественно для их вычисления по экспериментальным данным. В частности, если мы пытаемся приблизить закон распределения формулами вида (8), то проблем с вычислением μ_1 и μ_2 не возникает (в отличие от μ_0), и для масштаба легко находим $Sc = (2-\alpha)/\beta$ (то есть масштаб, в частности, описывает скорость нарушения чисто степенного закона).

Значение масштаба предлагается рассматривать как основную характеристику динамики SOC-системы. Более того, здесь появляется возможность дать четкое определение того, что такое критичная система и ввести численную характеристику ее критичности

$$C = Sc\eta / M\eta. \quad (15)$$

Для некритичных систем $M\eta \propto Sc\eta$ (то есть $C \ll 1$), в то время как для критичных систем выполняется $M\eta \ll Sc\eta$ (то есть $C \gg 1$). Таким образом, критичная система – это система, явления в которой имеют два характерных размера, сильно различающихся по порядку величины: среднее и масштаб. Значение последнего определяют, событий какого масштаба (отсюда и название) следует ожидать от данной системы. В этом смысле на масштаб можно смотреть как на среднее, взятое с весом λ . В некритичных системах масштаб будет, естественно, совпадать по порядку величины со средним.

Остановимся чуть подробнее на свойствах масштаба. Пусть мы имеем N одинаково распределенных независимых случайных величин η_i , тогда

$$Sc \sum_{i=1}^N \eta_i = Sc\eta + (N-1)M\eta \approx Sc\eta. \quad (16)$$

Данное соотношение непосредственно следует из очевидных формул

$$D \sum_{i=1}^N \eta_i = ND\eta, \quad M \sum_{i=1}^N \eta_i = NM\eta, \quad Sc\eta - M\eta = D\eta/M\eta$$

и позволяет использовать масштаб для описания даже тех сильно критичных систем, в которых не удается четко отделить друг от друга отдельные события. В силу (16) их взаимное разделение может быть проведено достаточно произвольным образом, без существенного влияния на точность определения масштаба.

Для процесса с производящей функцией (1) легко можно вывести формулы для среднего

$$Mj = \sum_{j=0}^{\infty} j v_j = \phi'(1) \quad (17)$$

и масштаба

$$Scj = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 v_j / \sum_{j=0}^{\infty} j v_j = 1 + \phi''(1)/\phi'(1). \quad (18)$$

Отсюда с учетом (2) для задачи, сформулированной в начале раздела 2, получаем

$$M = p/[1 - F'(1)], \quad (19)$$

$$Sc = 1 + [F''(1)/p]M^2, \quad (20)$$

то есть масштаб квадратичен по среднему.

Теоретически, в качестве характеристики SOC-систем можно использовать и другие отношения вида μ_{r+1}/μ_r , где $r > 1$, которые могут быть вычислены по экспериментальным данным и имеют ту же размерность, что и изучаемая величина. Однако, во-первых, точность их вычисления по экспериментальным данным будет тем ниже, чем больше r . Во-вторых, они будут отличаться от масштаба лишь числовым множителем, несущественным при качественном рассмотрении. И, наконец, в-третьих, для них не будет справедлив закон сложения (16), имеющий место для масштаба.

На формулу (16) можно взглянуть еще и следующим образом. Согласно теореме Берри – Эссена, отклонение распределения суммы N случайных величин от нормального закона определяется значением $R = \mu_3/(\sigma^3 N^{1/2})$, где σ – корень из дисперсии [9]. Если $C \gg 1$, то $\mu_3/\mu_2 \ll \mu_2/\mu_1$, а $\sigma^2 \approx \mu_2$, отсюда $R \propto (C/N)^{1/2}$. Таким образом степень критичности C получает простую интерпретацию: C – это число событий, которые надо взять, что бы их сумма начала приобретать нормальный закон распределения.

4. Локальная модель

Рассмотрим систему, состоящую из N одинаковых ячеек, состояние которых может меняться в дискретные моменты времени. Если на очередном шаге ячейка либо пуста, либо содержит одну частицу, то она считается устойчивой и ее состояние не меняется. Если же число частиц в какой-либо ячейке становится больше 1, то из нее изымаются 2 частицы. Каждая из них с вероятностью p объявляется распавшейся и покидает систему, а с вероятностью $q=1-p$ добавляется в случайно выбранную ячейку. Так продолжается до тех пор, пока во всех ячейках останется не более одной частицы.

Начальное возмущение создается добавлением в произвольно выбранную ячейку одной частицы (которая при этом тоже с вероятностью p может распаться). Предмет исследования представляет собой распределение количества частиц, выбывших при ее добавлении в систему. Однако мы больше не будем изучать сам закон распределения, а ограничимся лишь величинами M и Sc , исходя из посылки, что значения масштаба и среднего вполне характеризуют SOC-систему.

Очевидно, что в стационарном режиме систему покидает в среднем одна частица на одну добавленную, то есть среднее $M=1$. Это позволяет, с одной стороны, следить только за масштабом, а с другой – дает возможность простой проверки по значению величины $\Delta M=|M-1|$ точности выхода системы на стационар и достоверности набранной при компьютерном моделировании статистики.

Кроме того, предложенная модель лишена общего недостатка большинства SOC-моделей, предполагающих, что добавляемый в систему ресурс покидает ее через границу. В этом случае размер системы определяет, с одной стороны, количество ячеек в системе и степень малости их размеров по сравнению с системой в целом, а с другой – механизм и скорость выбытия частиц из системы. Зацепленность этих двух разноплановых характеристик чрезвычайно затрудняет исследование моделей. В нашем же случае соответствующие параметры – число ячеек N и вероятность распада p – независимы.

Распределенность описанной модели, очевидно, чисто условна. Ее текущее состояние может быть описано всего двумя числами. Наиболее просто это можно сделать при помощи общего числа частиц в системе – i и числа пассивных частиц – k , причем значения i и k удобнее отсчитывать не от нуля, как станет ясно из дальнейшего, а от $N/2$. Под пассивными частицами здесь понимаются те частицы, которые лежат в своих ячейках, в отличие от активных, то есть тех, которым предстоит упасть в какую-либо ячейку или распаться. В этих терминах модель может быть легко сведена к ветвящемуся процессу с двумя типами взаимодействующих частиц. За один шаг с вероятностью p происходит распад одной возбужденной частицы, соответственно общее число частиц уменьшается на единицу $i \rightarrow i-1$; с вероятностью $q(1/2-k/N)$ происходит превращение одной пассивной частицы в активную, то есть $k \rightarrow k+1$, и, наконец, с вероятностью $q(1/2+k/N)$ одна активная частица становится пассивной, то есть $k \rightarrow k-1$. Начальное возмущение создается присвоением $i \leftarrow k+1$, и процесс завершается, как только i становится равным k .

Кардинальное отличие этого ветвящегося процесса от описанных в разделе 2 состоит в том, что здесь мы уже имеем настоящую самоорганизацию. Количество частиц k не является заданным извне, а самостоятельно эволюционирует к критическому значению по мере добавления частиц в систему и в дальнейшем остается вблизи этого значения.

В общем случае получить какие-либо точные аналитические результаты для данной модели не удастся, однако при $N \rightarrow \infty$ задача может быть сведена к уже решенной. Для бесконечно большой системы очевидно, что $k/N = \text{const} = f^{-1/2}$, где f – среднее заполнение ячейки. В этом случае о существовании пассивных частиц

можно забыть и рассматривать только ветвящийся процесс с независимыми частицами (активными). Для него уравнение (2) запишется в виде

$$\varphi = ps + q[(1-f) + f\varphi^2].$$

Из (17) получаем $M = p/(1-2qf)$ и, поскольку $M=1$, имеем

$$f = 1/2. \quad (21)$$

Что в совокупности с (18) окончательно дает

$$Sc = 1/p. \quad (22)$$

С уменьшением N значение масштаба будет уменьшаться, а среднего заполнения – расти (именно поэтому уместно отсчитывать i и k от $N/2$), то есть при уменьшении размеров системы она будет становиться все менее критичной. Влияние размеров системы легко проследить при помощи следующего рассуждения. На один перескок частицы (в терминах ветвящегося процесса: на одно превращение пассивной частицы в активную) приходится в среднем $1/p$ распадов, поэтому при $N=\infty$

$$Sc(\text{jumps}) = Sc(\text{decays})/p = 1/p^2.$$

Чтобы размеры системы не оказывали влияния на ее динамику необходимо, чтобы при перескоках из ячейки в ячейку частицы «не повторялись», то есть должно выполняться условие

$$Sc(\text{jumps}) \ll N.$$

Иными словами, систему можно вполне охарактеризовать величиной ее эффективного размера

$$Q = p^2 N. \quad (23)$$

Если $Q \gg 1$, то можно считать систему бесконечно большой, и справедливы формулы (21) и (22).

Компьютерное исследование модели проводилось при значениях N от 10 до 100000 (с логарифмическим шагом $10^{1/2}$) и при значениях p от $1.0 \cdot 10^{-4}$ до 0.18 (с логарифмическим шагом $10^{1/4}$) – всего 126 точек. Значение Q при этом изменялось от $1.0 \cdot 10^{-7}$ до $3.2 \cdot 10^3$. Следует отметить, что количество вбрасываемых частиц, необходимое для получения достоверных результатов, при этом соответственно возросло от 10^4 до 10^9 . На рис. 2 представлен масштаб как функция вероятности распада при различных значениях числа ячеек в системе.

На рис. 3, а показана зависимость масштаба от величины Q при различных p . Подобное представление результатов ничуть не нагляднее, чем приведенное на рис. 2. Но если вместо Sc по оси ординат отложить величину $Sc \cdot p^a$, как это сделано на рис. 3, б, то все точки лягутся на одну кривую

$$Sc \cdot p^a \propto \begin{cases} Q^{1/2}, & \text{если } Q \ll 1, \\ 1, & \text{если } Q \gg 1. \end{cases} \quad (24)$$

Наилучшее совмещение достигается при $a=0.92$. Рис. 3, а, б позволяют легко проследить переход системы от критичного к некритичному поведению, имеющий место при уменьшении величины Q .

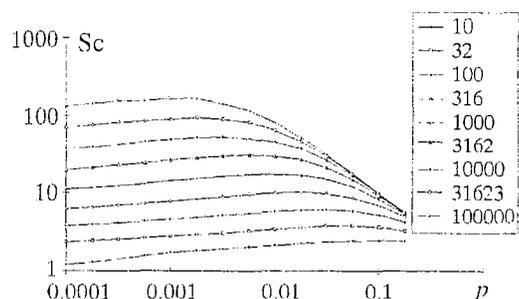


Рис. 2. Масштаб как функция вероятности распада при различных значениях числа ячеек

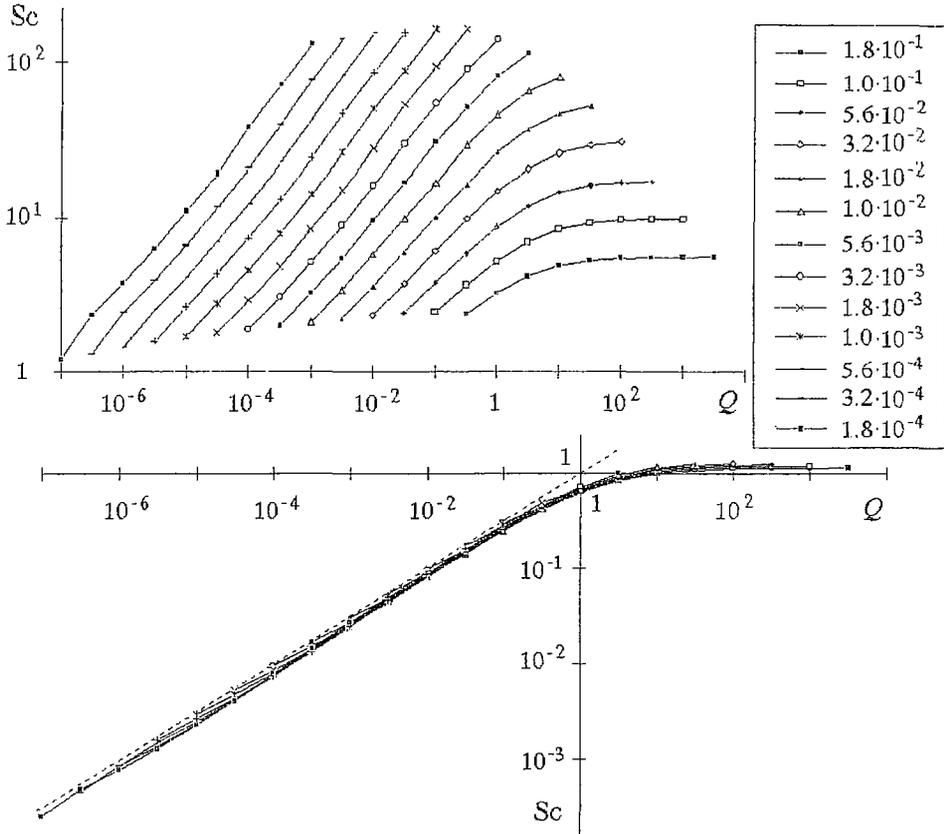


Рис. 3. Масштаб как функция эффективного размера системы при различных значениях вероятности распада (а). Произведение $Sc \cdot p^a$ как функция эффективного размера системы; при $a=0.92$ все точки легли на одну кривую; наклон левого участка графика равен $1/2$ (б)

Для области $Q \gg 1$ аппроксимация (24) дает $Sc \propto p^{-a}$ вместо (22), что можно считать удовлетворительным, поскольку выбор масштабирующего множителя в виде чисто степенной функции p^a произволен. Если положить приблизительно $a \approx 1$, то (24) запишется в виде

$$Sc/Sc^\infty \propto \begin{cases} Q^{1/2}, & \text{если } Q \ll 1, \\ 1, & \text{если } Q \gg 1. \end{cases}$$

где $Sc^\infty = 1/p$ значение масштаба при $Q = \infty$. Как легко видеть, величина Q однозначно определяет степень реализации потенциальной критичности системы.

Заслуживает внимания тот факт, что в области $Q \ll 1$ при постоянном p имеет место формула $Sc \propto N^{1/2}$. Такая зависимость легко может быть объяснена следующим образом с использованием описания модели в терминах ветвящегося процесса.

Соотношение $Q = p^2 N \ll 1$ обозначает, что вероятность распада p и размер системы N достаточно малы, чтобы за время жизни активной частицы успело установиться равновесное распределение θ_k значений числа k за счет превращений активных частиц в пассивные и обратно. От того факта, что на оси значений k имеется «ловушка» и при достижении равенства $i=k$ ветвящийся процесс обрывается, можно отвлечься. Это вполне корректно, поскольку в тех случаях, когда обрыв происходит быстро, частиц распадается очень мало, и соответствующая лавина практически не влияет на значение масштаба.

Запишем для θ_k условие детального равновесия

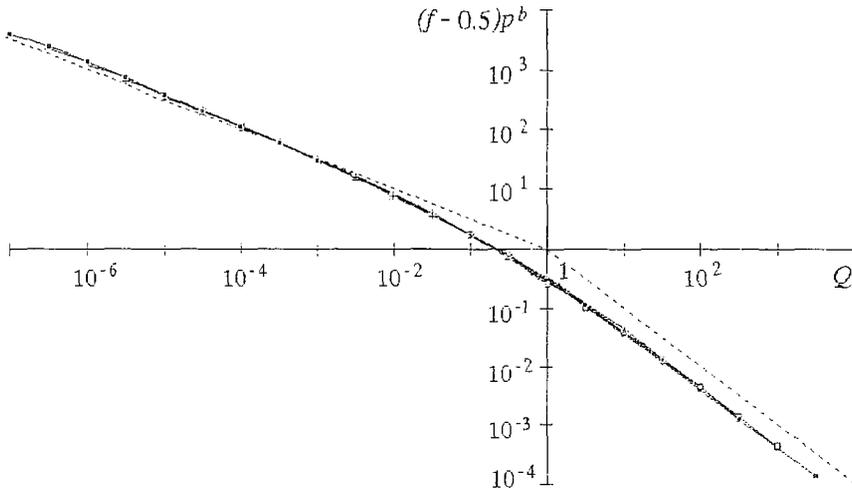


Рис. 4. Произведение $(f-0.5)p^b$ как функция Q . При $b=-0.97$ все точки легли на одну кривую. Наклон составляет $-1/2$ для левого участка графика и -1 для правого участка

$$\theta_k(1/2 - k/N) = \theta_{k+1}(1/2 + (k+1)/N).$$

Откуда находим

$$N(\theta_k - \theta_{k+1})/2 = (k+1)\theta_{k+1} + k\theta_k.$$

Суммируя обе части полученного равенства по k от нуля до бесконечности, получаем

$$N\theta_0/4 = \sum_{k=0}^{\infty} k\theta_k = |\bar{k}|. \quad (25)$$

С другой стороны, очевидно, $\theta_0|\bar{k}| \ll 1$, что в совокупности с (25) дает

$$|\bar{k}| \propto N^{1/2}. \quad (26)$$

Таким образом, диапазон изменения числа пассивных частиц, а с ним и число распадов, происходящих в ходе развития больших лавин, $\propto N^{1/2}$. Соответственно и масштаб как мера больших лавин $Sc \propto N^{1/2}$.

На рис. 4 изображена зависимость $(f-0.5)p^b$ от Q при $b=-0.97$. Если положить $b \approx -1$, то график можно аппроксимировать зависимостью

$$(f-0.5)/p \propto \begin{cases} Q^{-1/2}, & \text{если } Q \ll 1, \\ Q^{-1}, & \text{если } Q \gg 1. \end{cases}$$

Откуда находим

$$\bar{k} = N(f-0.5) \propto \begin{cases} N^{1/2}, & \text{если } Q \ll 1, \\ 1/p, & \text{если } Q \gg 1, \end{cases}$$

что хорошо согласуется с формулами (22) и (26).

5. Иерархия критичных моделей

Мы изучили явление критичности на уровне ветвящихся процессов с независимыми и со взаимодействующими частицами, а затем на уровне

нераспределенной модели самоорганизованной критичности. Теперь перейдем к описанию распределенной модели. Это тем более оправдано, что подавляющее большинство рассматриваемых в литературе моделей являются распределенными [1–5,10].

Пусть ячейки единичного размера расположены в виде d -мерного куба с ребром L (всего $N=L^d$ ячеек). Условия на границе будем полагать периодическими (топология тора). Если число частиц в какой-либо ячейке превышает 1, то она становится неустойчивой и из нее изымаются 2 частицы. Каждая из них с вероятностью p объявляется распавшейся и покидает систему, а с вероятностью $q=1-p$ добавляется в ячейку, отстоящую от исходной на случайное расстояние с нулевым средним и дисперсией σ^2 . Конкретный вид распределения вероятностей для расстояний не принципиален, поскольку после некоторого числа последовательных прыжков оно становится нормальным. Начальное возмущение создается добавлением в произвольно выбранную ячейку одной частицы.

Таким образом, модель имеет четыре параметра: p , L , d и σ . При $\sigma \gg 1$ она переходит в локальную модель, описанную в разделе 4. В самом деле, можно считать, что частицы перераспределяются по всей системе и ее топология становится несущественной.

Модели легко может быть придана следующая сейсмическая интерпретация. Каждая ячейка представляет собой элементарный участок земной коры с напряжением равным числу частиц в этой ячейке. Если напряжение какого-либо участка превышает порог равный единице, то происходит его перераспределение между соседями, в процессе которого часть энергии выделяется в виде толчков, соответствующих распаду частиц.

Следует заметить, что компьютерное исследование данной модели сложнее исследования локальной модели настолько же, насколько решение уравнений в частных производных сложнее решения обыкновенных. Обратим внимание лишь на то, что для выхода распределенной SOC-системы на стационар зачастую требуется много большее число вброшенных частиц, чем на последующее получение самих результатов. Вывести ее на стационар можно искусственно, следя за отклонением $\Delta M = |M-1|$ и «вручную» меняя число частиц в системе, пока не станет достоверно выполняться $\Delta M \ll 1$. Задача по быстрому выводу на стационар модели, для которой величина среднего M заранее неизвестна, представляется нам практически невыполнимой.

Компьютерное исследование проводилось для случая $L^d p^2 \gg 1$, то есть размеры системы можно считать бесконечными. Число частиц, вбрасываемых после выхода на стационар, составляло $\approx 10^6 \div 10^7$. Результаты для $p=0.025$, приведенные на рис. 5, позволяют проследить увеличение степени критичности по мере роста σ . Графики не дают оснований утверждать, что явление самоорганизованной критичности качественно меняется, когда размерность пространства достигает порогового значения [11]. Исторически явление перехода от некритичного поведения к критичному было обнаружено при изучении именно этой модели [8].

Рассмотренная модель не так далека от привычных SOC-моделей с открытыми условиями на границе, как может показаться с первого взгляда. В таких моделях частице, чтобы покинуть систему, нужно пройти фиксированное расстояние от точки вбрасывания до края, а в нашей – фиксировано лишь среднее значение этого расстояния равно σ/p . Кроме того, с известной степенью огрубления частными случаями данной модели можно считать модели, в которых ресурс перераспределяется только между непосредственными соседями распавшейся ячейки, так как принципиальное значение имеет только дисперсия расстояния σ^2 .

К сожалению, данная модель, равно как и полученные численные результаты, слишком сложна, и установить какие-нибудь аналитические или эмпирические зависимости пока что не удастся. Тем не менее, мы включили ее

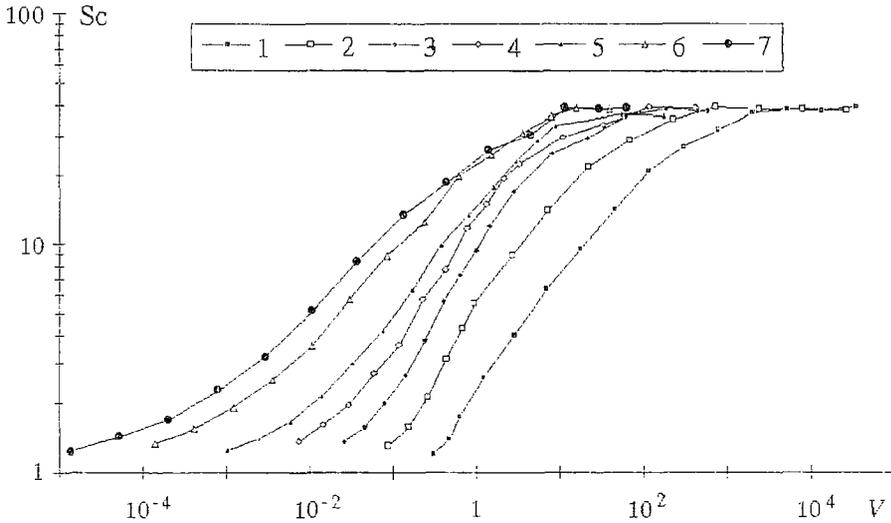


Рис. 5. Масштаб Sc как функция доступного объема $V=\sigma^d$ при различных размерностях пространства d . Данные приведены для $p=0.025$. При больших значениях V графики выходят на предельное значение равное $1/p$ (см. (22))

описание в настоящую работу для завершения иерархии SOC-моделей, позволяющей исследовать явление самоорганизованной критичности на различных уровнях общности и с различной степенью подробности.

Дальнейшие исследования, вероятно, будут связаны именно с этой моделью, поскольку она потенциально способна демонстрировать свойства, не наблюдавшиеся в более простых системах, рассмотренных ранее.

6. Предсказуемость самоорганизованной критичности

Корректное использование таких понятий, как распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия, масштаб и т.п. предполагает статистическую независимость изучаемых случайных величин. Поэтому, как и в большинстве исследований, посвященных самоорганизованной критичности, в представленной работе до настоящего момента события, происходящие в системе, рассматривались как независимые. Это, конечно же, справедливо лишь приближенно.

Статистическая зависимость последовательных событий напрямую связана с вопросом построения предиктора, то есть алгоритма, позволяющего предсказывать дальнейшее поведение системы на основе наблюдения за ним в течение некоторого времени. Один из возможных путей в этом направлении подробно изучен в работе [10].

Однако, поскольку построение предикторов является самостоятельной сложной задачей, а их конкретные особенности, по-видимому, должны существенным образом варьироваться для различных SOC-систем, представляется целесообразным остановиться не на построении предиктора для какой-либо конкретной модели, а на принципиальных возможностях предсказания в критичных системах. Это удобнее всего сделать на примере локальной модели из раздела 4.

6.1. Горизонт прогноза. Пусть на i -м шаге в систему, содержащую k_i частиц, добавляется одна частица, после чего количество частиц в системе становится k_{i+1} . При этом распадается и покидает систему

$$\eta_i = k_i - k_{i+1} + 1 \quad (27)$$

частиц. Усреднением формулы (27) по i получим очевидное соотношение $\langle \eta \rangle = 1$. Если бы последовательные события были независимы, выполнялось бы равенство $\langle \eta_i \eta_j \rangle = \langle \eta_i \rangle \langle \eta_j \rangle = 1$ при $i \neq j$. Поэтому в качестве меры их зависимости естественно выбрать величину

$$\delta_i = 1 - \langle \eta_i \eta_{i+1} \rangle. \quad (28)$$

Сколь-нибудь надежное практическое определение δ_i требует неприемлемо большого объема компьютерных вычислений. Поэтому мы ограничимся лишь той информацией, которая может быть получена без непосредственного нахождения δ_i .

Просуммировав (27) по i , имеем

$$\sum_{i=-n}^n \eta_i = (2n+1) + k_{-n} - k_n. \quad (29)$$

Умножая (29) на η_0 и усредняя по i , получим

$$\langle \eta^2 \rangle + 2 \sum_{i=1}^n \langle \eta_0 \eta_i \rangle = (2n+1) + \langle k_{-n} \eta_0 \rangle - \langle k_n \eta_0 \rangle,$$

подставив сюда (28) и устремляя n к бесконечности, окончательно находим

$$D\eta = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i. \quad (30)$$

С другой стороны, возведя (29) в квадрат и проделав ту же самую процедуру, получим

$$Dk = \sum_{i=1}^{\infty} i \delta_i. \quad (31)$$

Величина Dk , фигурирующая в последней формуле, не была рассмотрена при изучении локальной модели. Но поскольку для нее в отличие от масштаба или среднего заполнения нет никаких характерных значений управляющих параметров, ее зависимость от них должна быть чисто степенной. Как показывает моделирование, имеет место равенство

$$Dk = (0.19 \pm 0.01) N^{1.11 \pm 0.01} p^{0.25 \pm 0.01},$$

незначительно нарушающееся лишь при малых N (рис. 6).

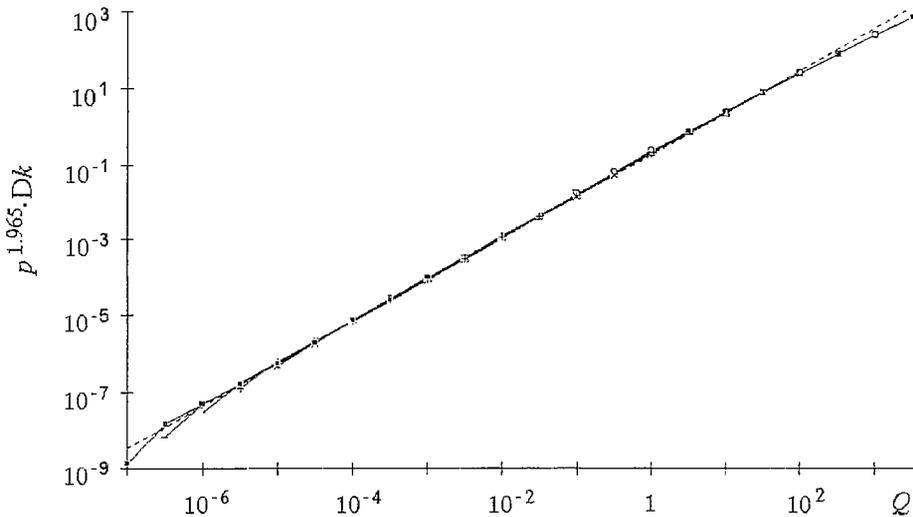


Рис. 6. Произведение $p^{1.965} \cdot Dk$ как функция Q . Наклон графика составляет 1.108 ± 0.003

Для завершения выкладок поделим (31) на (30) и получим характерное время системы

$$\tau = \sum_{t=1}^{\infty} t \delta_t / \sum_{t=1}^{\infty} \delta_t = 2Dk/D\eta. \quad (32)$$

На временах $t \ll \tau$ система «помнит» свое прошлое, и в этом диапазоне времен возможен прогноз. А на временах $t \gg \tau$ события становятся статистически независимыми и, следовательно, непрогнозируемыми. Вообще говоря, формула (32) применима не только к модели из раздела 4, но и к любой другой, ресурс в которой сохраняется в процессе его перераспределения (источники и стоки будем считать частью системы), то есть является осмысленной величиной. Для модели кучи песка, рассмотренной в работе [1], это не так (см. [12]), что является ее существенным недостатком.

По аналогии с (24) для характерного времени системы τ можно построить эмпирическую аппроксимацию

$$\tau^{0.95} \propto \begin{cases} Q, & \text{если } Q \ll 1, \\ Q^{1/2}, & \text{если } Q \gg 1, \end{cases}$$

однако значительно интересней рассмотреть отношение

$$T = \tau/S\epsilon. \quad (33)$$

Крупные, порядка масштаба, события происходят с вероятностью $\propto 1/S\epsilon$, поскольку $M=1$. Если сделать вполне естественное предположение, что «забывание» в системе обусловлено главным образом сильно «перетряхивающими» ее крупными событиями, то становится понятно, что величина T может зависеть только от Q . Действительно, как видно из рис. 7,

$$T \propto \begin{cases} 1, & \text{если } Q \ll 1, \\ Q, & \text{если } Q \gg 1. \end{cases} \quad (34)$$

В случае $Q \ll 1$ система мала и для «перетряхивания» хватает одного крупного события, поскольку оно захватывает ее всю, а при $Q \gg 1$ их необходимо столько, на сколько хватает размеров системы, то есть Q (см. объяснения к формуле (23)).

Из формул (33) и (34) можно сделать качественный вывод, который, по-видимому, должен быть верен для большинства SOC-систем: чем более критична

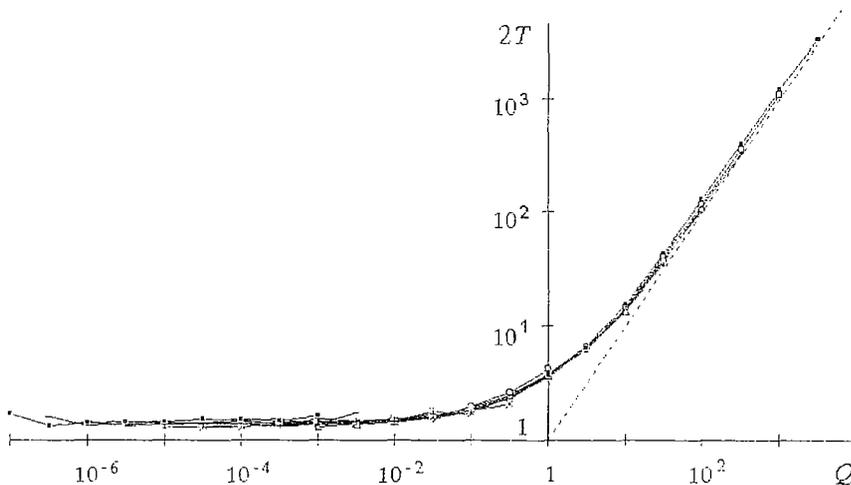


Рис. 7. Отношение $T=\tau/S\epsilon$ как функция Q . Наклон правого участка графика равен 1. Множитель 2 по оси ординат введен исключительно из эстетических соображений

система, тем дольше она «помнит» свою историю. Другими словами, горизонт прогноза увеличивается с ростом критичности системы.

6.2. Об одном подходе к предсказанию. Если в п. 6.1 под прогнозом мы неявно понимали предсказание поведения системы на некоторый срок в будущее, то под собственно предсказанием будем понимать только получение информации о том, что произойдет непосредственно в следующий момент, то есть сейчас.

Изучение предсказуемости следует начинать с вопроса о том, какой объем такой информации следует считать предсказанием. Для рассмотренных в разделе 2 ветвящихся процессов «сделать предсказание» означает просто выписать распределения вероятности (6а) и (13). Больше никакой информации о том, что произойдет на очередном шаге, очевидно, получить нельзя.

Соответственно, возможной целью, к которой следует стремиться и в более сложных системах, является возможность сказать, каково распределение вероятностей в данный момент времени. В случае модели из раздела 4 текущее состояние однозначно определяется k – количеством частиц в системе. И хотя оно нам не известно, можно считать, что мы знаем его с точностью до аддитивной константы. В силу (27) мы можем определить его изменение, наблюдая за лавинами. А раз так, то для каждого значения k по данным наблюдений можно получить экспериментальное распределение вероятностей лавин, происходящих при этом k . И чем дольше время наблюдения за системой, тем точнее будут эти распределения.

Таким образом, для локальной модели и ей подобных возможно *сколь угодно точное* (в указанном выше смысле) предсказание на основе достаточно длительного наблюдения.

Следует признать, что описанный подход имеет ряд недостатков. Он перестанет работать, если мы не сможем регистрировать наиболее мелкие события (например, из-за ограниченной чувствительности приборов). В случае распределенных систем ситуация также не очень благоприятна, поскольку, с одной стороны, текущее состояние характеризуется не одной величиной, а целым их набором (вообще говоря, бесконечным), а с другой – необходимо уметь ответить не только на вопрос, *что* сейчас произойдет, но и *где*. Тем не менее этот подход может оказаться перспективным, поскольку позволяет понять, что именно мы можем предсказать.

Выводы и обсуждение

В настоящей работе продемонстрирована глубокая связь самоорганизованной критичности и ветвящихся процессов. Доказано, что любой ветвящийся процесс с независимыми частицами описывается статистикой вида $N(x) \propto x^{-3/2} \exp(-\beta x)$ – законом «минус три вторых». На примере простейшего ветвящегося процесса с зависимыми частицами продемонстрирован переход системы от критичного поведения к некритичному при вариации управляющего параметра.

Указано на неприменимость для SOC-систем чисто степенных законов распределения, а также на весьма ограниченную применимость квазистепенных законов и математического ожидания как статистической характеристики. Вместо них введена новая статистическая характеристика, названная масштабом и представляющая собой меру больших событий. На основе понятия масштаба даны новое определение критичности и ее численная мера.

Построена иерархия SOC-моделей, позволяющая проследить весь спектр свойств самоорганизованной критичности на разных уровнях сложности, дающих, соответственно, разный уровень понимания явления самоорганизованной критичности вообще и конкретных ее деталей в частности.

Изучены также некоторые вопросы, касающиеся принципиальных возможностей прогноза в критичных системах и предсказания их поведения. В

частности, указана связь между критичностью системы и временами, на которые принципиально возможен прогноз ее поведения.

В основе самоорганизованной критичности лежат достаточно тривиальные процессы, что делает ее не каким-то экзотическим цветком синергетики, а вполне заурядным и повседневным явлением. Подобный взгляд носит не только чисто научный, но и мировоззренческий характер и заставляет по-иному взглянуть на безопасность проектирования сложных технических систем, предсказание стихийных бедствий, причины и динамику вооруженных конфликтов, экономические кризисы, биологическую эволюцию, этногенез и многие другие явления.

Библиографический список

1. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. // Phys. Rev. A. 1988. Vol. 38. P. 364.
2. Sornette F., Sornette D. // Europhys. Lett. 1989. Vol. 9, № 2. P. 197.
3. Bak P., Flyvbjerg H. // Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45. P. 2192.
4. Pietronero L., Tartaglia P., Zhang Y.-C. // Physica A. 1991. Vol. 173. P. 22.
5. Dhar D., Ramaswamy R. // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 63 P. 1659.
6. Ма Ш. Современная теория критических явлений. М.: Мир, 1980. С. 26, 62.
7. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966. С. 17, 22.
8. Подлазов А.В. Препринт ИПМ РАН 86, 1995.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2. М.: Мир, 1967. С. 620.
10. Pepke S.L., Carlson J.M. // Phys. Rev. E. 1994. Vol. 50. P. 236.
11. Janosi I.M., Cziroc A. // Fractals. 1994. Vol. 2, № 1. P. 153.
12. Малинецкий Г.Г., Митин Н.А. // Журнал физической химии. 1995. Т. 69, № 8. P. 1513.

Институт прикладной
математики РАН

Поступила в редакцию 30.07.97

PARADIGM OF SELF-ORGANIZED CRITICALITY. HIERARCHY OF MODELS AND LIMITS OF PREDICTABILITY

G.G. Malinetskii, A.V. Podlazov

We considered the phenomenon of self-organized criticality (SOC). The SOC-systems are studied from the point of view of the branching processes theory. Transition from the critical behavior to non-critical one is demonstrated. The strict definition of criticality is given on the base of the «scale» value – a new statistical characteristic proposed. The hierarchy of SOC-models from the simplest branching processes to complex distributed system is built. The particular attention in the paper is paid to the problem of predictability in critical systems.



Подлазов Андрей Викторович – родился в Москве (1973), окончил Московский физико-технический институт (1996). Работает в Институте прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, аспирант Московского физико-технического института. Область интересов – нелинейная динамика, теория самоорганизованной критичности.