Изв.вузов «ПНД», т.5, № 6, 1997 УДК 531/534(09)

КОЛМОГОРОВ, ПЕТРОВСКИЙ, ПИСКУНОВ, ФИШЕР И НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ

Д.И. Трубецков

Если оглянуться назад, то окажется, что математики упустили прекрасную возможность получить важные научные результаты только потому, что они игнорировали изучение нелинейного уравнения диффузии. Исключением была работа А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского и Н.С. Пискунова. «Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества...». Они показали, что любое начальное возмущение в виде перепада стремится к одному и тому же уединенному стационарному решению типа бегущей волны. Авторы изучили это решение с помощью фазовой плоскости и получили в явном виде выражение для скорости.

... То, что математики не сумели своевременно изучить уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова, не может быть объяснено слабостью их техники перед лицом огромных математических трудностей... Препятствие вероятно заключалось в том, что математики автоматически перенесли вывод о неволновом поведении решений линейного диффузионного уравнения на нелинейный случай.

Элвиль Скотт[1]

Уравнение, о котором пойдет речь, было впервые исследовано в 1937 году А.Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским, Н.С. Пискуновым [1] и независимо Р.Э. Фишером [2]. Так что есть повод отпраздновать шестидесятилетний юбилей уравнения, которое все чаще и чаще называют уравнением КПП.

Работа [1] была задумана авторами применительно к следующей биологической задаче. В экологической среде внезапно, в некотором очаге, локально, возникает новый тип организмов, обладающий, например, лучшей приспособленностью к условиям данной среды, большей плодовитостью (повышенный биологический потенциал) по сравнению с ранее существовавшим. Новый тип расселяется по всему пространству и вытесняет старый тип организмов. Предполагается, что в любой точке среды организм начинает

---

[1] *Элвиль Скотт.* Электрофизика нервного волокна / Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977. С. 288–289.

размножаться немедленно после возникновения (среда является активной), а вне очага активные организмы появляются за счет диффузии. В одномерном случае задача сводится к решению уравнения

$$\partial u/\partial t = D\partial^2 u/\partial x^2 + F(u), \quad D>0, \tag{1}$$

где x – координата точки на плоскости; t – время; u – плотность организмов в точке x в момент времени t. Кроме диффузии, как указано выше, имеет место возрастание плотности организмов, скорость которого в данной точке и в данный момент времени зависит от уже существующей, причем, представляют интерес значения $F(u)$ при $u\geq 0$. Предполагается, что $F(u)$ – непрерывная и необходимое количество раз дифференцируемая функция u, удовлетворяющая условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \tag{2}$$

$$F(u) > 0, \quad 0 < u < 1, \tag{3}$$

$$\partial F(0)/\partial u = \alpha > 0, \quad \partial F(u)/\partial u < \alpha, \quad 0 \leq u \leq 1. \tag{4}$$

Из (4) следует, что при достаточно малых u скорость $F(u)$ возрастает и пропорциональна u (с коэффициентом пропорциональности α). Кроме того, при приближении u к единице возрастание u прекращается. Поэтому рассматриваются только решения уравнения (1), удовлетворяющие условию

$$0 \leq u \leq 1. \tag{5}$$

Статья [1] оригинально построена: во введении изложены все основные результаты, а доказательства даны в основном тексте. Поступим также и мы, приведя здесь часть введения из [1]. «Предположим теперь, что в начальный момент $t=0$, при $x<a$ плотность $u=0$, а при $x>b\geq a$ плотность достигает своего максимального возможного значения $u=1$. Естественно, что область плотностей, близких к единице, будет с возрастанием t распространяться справо налево, оттесняя область малых плотностей влево. В частном случае $a=b$ картина будет приблизительно такова, как изображено на рис. 1. Тот участок кривой плотности (как функция x), на который приходится основная часть падения плотности от единицы до нуля, с течением времени перемещается справа налево. По формуле кривая плотности при $t\to\infty$ приближается к определенной предельной кривой. Задача заключается в том, чтобы определить эту предельную форму кривой плотности и предельную скорость ее перемещения справа налево. Оказывается, что искомая предельная скорость равна

$$\lambda_0 = 2(D\alpha)^{1/2}, \tag{6}$$

а предельная форма кривой плотности дается решением уравнения

$$\lambda_0 du/dx = Dd^2u/dx^2 + F(u), \tag{7}$$

обращающимся в нуль при $x=-\infty$ и в единицу при $x=+\infty$. Такое решение всегда существует и единственно с точностью до преобразования $x'=x+C$, не меняющего

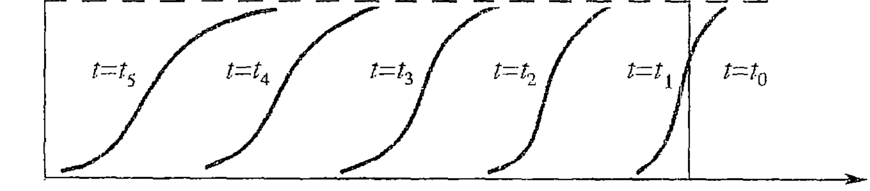


Рис. 1

форму кривой. Заметим, что уравнение (7) может быть получено следующим образом. Будем искать решение уравнения (1), обладающее тем свойством, что при изменении t форма кривой, изображающей зависимость u от x, не меняется, а сама эта кривая перемещается справа налево со скоростью λ. Такое решение имеет вид

$$u(x,t) = u(x+\lambda t). \quad (8)$$

Рассматривая теперь u как функцию одного переменного $z=x+\lambda t$, получим уравнение

$$\lambda du/dz = Dd^2u/dz^2 + F(u).$$

Уравнение это, оказывается, имеет решения, удовлетворяющие условиям, поставленным выше для уравнения (7), при всевозможных $\lambda \geq \lambda_0$. Но только при $\lambda=\lambda_0$ мы получим интересующую нас предельную форму кривой плотности при указанных выше начальных условиях».

Немного о двух авторах работы [1].

Андрей Николаевич Колмогоров – один из величайших математиков нашего века, один из крупнейших ученых в истории русской науки, гениальный человек и великий просветитель. В интересной статье [3], посвященной девяностолетию со дня рождения А.Н. Колмогорова, есть раздел «Вехи творческого пути», где указано, что список его трудов насчитывает около 500 работ. «Одно лишь перечисление математических разделов («сюжетов»), в которые Колмогоров внес фундаментальный вклад, необычайно велико. Назовем некоторые: метрическая теория функций, дескриптивная теория множеств, математическая логика, теория вероятностей, геометрия, случайные процессы, математическая статистика, функциональный анализ, теория приближений, теоретико–множественная топология, алгебраическая топология, дифференциальные уравнения, теория турбулентности, теория стрельбы, теория алгоритмов и автоматов, динамические системы, классическая механика, теория суперпозиций функций, теория информации, алгоритмическая теория вероятностей.

Существенную долю в его научных исследованиях составляют работы в области приложений к физике, биологии, геологии, океанологии, метеорологии, кристаллографии и т. п. И помимо всего этого Андрей Николаевич имел труды по вопросам педагогики, методики, стиховедения, философии, истории, естествознания, написал множество статей в различные энциклопедии» [3, с. 7–8].

Несомненно, что читателям журнала известен спектр Колмогорова – Обухова в теории турбулентности, колмогоровская энтропия как лира хаоса, теория Колмогорова – Арнольда – Мозера (КАМ–теория), эргодическая теория динамических систем и, конечно, уравнение КПП, о котором идет речь в этой статье.

Второй автор статьи [1] – академик Иван Георгиевич Петровский. Его работы относятся к теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и другим областям математики. Он заложил основы общей теории систем дифференциальных уравнений с частными производными. В области алгебраической геометрии им решена задача о расположении овалов алгебраической кривой 6–го порядка, поставленная Давидом Гильбертом. И.Г. Петровский автор неоднократно издававшихся учебников «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений», «Лекции по теории интегральных уравнений» и «Лекции об уравнениях с частными производными». В замечательных воспоминаниях И.С. Шкловского «Эшелон» есть рассказ, посвященный Петровскому – ректору МГУ (он возглавлял университет с 1951 года). Вот небольшие отрывки из этого рассказа [4].

«22 года Иван Георгиевич руководил самым крупным университетом страны. У него ничего не было более близкого, чем университет, бывший ему родным домом и семьей. Ради университета он забросил даже любимую математику. Вместе с тем Иван Георгиевич – человек высочайшей порядочности и чести никогда не был полным хозяином в своем доме. Могущественные «удельные князья» на факультетах гнули свою линию, и очень часто Иван Георгиевич ничего тут не мог поделать... Он всегда любил повторять: «Поймите – моя власть далеко не безгранична!» На ветер обещаний бесчисленным «ходокам» он никогда не давал. Но если говорил: «Попробую что-нибудь для вас сделать»,– можно было не сомневаться, что все, что в человеческих силах, будет сделано... Судьба ректора Московского университета академика Ивана Георгиевича Петровского была глубоко трагична. Это ведь древний сюжет – хороший человек на трудном месте в тяжелые времена. Надо понять, как было ему тяжело. Я был свидетелем многих десятков добрых дел, сделанных этим замечательным человеком. Отсюда, будучи достаточно хорошо знакомым со статистикой, я с полной ответственностью могу утверждать, что количество добрых дел, сделанных им за все время пребывания на посту ректора должно быть порядка 10^4! Много ли найдется у нас людей с таким жизненным итогом? Некий поэт по фамилии Куняев написал такие туманные строчки: «... Добро должно быть с кулаками...» Это ложь! Добро должно быть прежде всего конкретно. Нет ничего хуже абстрактной доброты. Эту простую истину следовало бы усвоить нашим «радикалам». И было бы справедливо, если бы на надгробьи Ивана Георгиевича, что на Новодевичьем, была высечена простая надпись: «Здесь покоится человек, совершивший 10000 хороших поступков».

Покажем теперь, как получаются результаты решения уравнения КПП, приведенного выше. Будем следовать работе Фишера в изложении Дж. Марри [2]. Несколько слов и о Фишере.

Рональд Эймлер Фишер родился в Лондоне в 1890 году. Он окончил в 1912 году Кембриджский университет, где изучал физику и математику. В 1919 году он стал сотрудником Экспериментальной станции (до этого он преподавал и занимался статистикой), где столкнулся с проблемой статистической обработки массовых опытов по селекции сельскохозяйственных культур и генетике. Именно тогда он написал свою известную книгу «Методы статистики для научных работников». На протяжении всей своей жизни Фишер занимался разработкой, пропагандированием и внедрением методов математической статистики в биологию и другие области экспериментальных исследований. Он занимал Гальтоновскую кафедру в Лондоне, затем – кафедру генетики в Кембридже. После своей отставки в 1957 году Фишер переехал в Австралию; он умер в Аделаиде в 1962 году.

Фишер сформулировал основные концепции популяционной генетики, что было важно для объяснения механизмов эволюционного процесса. Его книга «Генетическая теория естественного отбора» (1930) стала классическим сочинением, с которого началось развитие популяционной генетики.

Предпошлем непосредственному изложению работы Фишера простой иллюстративный пример, имеющий методическое значение. Пусть скалярная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$du/dt = u(1-u), \tag{9}$$

причем, $u(0,x)=1/(1+e^{-sx})$, $s=\text{const}>0$, а пространственная переменная x рассматривается как параметр. Уравнение (9), как известно, называется логистическим уравнением и описывает, например, рост популяции бактерий, мушек и т. п. Стационарные состояния получаются из условия $du/dt=0$ и, следовательно, $u_{\text{ст}}=0$ и $u_{\text{ст}}=1$. Исследуем каждое из них на устойчивость, полагая $u=u_{\text{ст}}+\tilde{u}$, где $\tilde{u}<<u_{\text{ст}}$. Тогда для $u_{\text{ст}}=0$ имеем

$$d\tilde{u}/dt=\tilde{u},\quad \tilde{u}\sim e^{pt} \text{ и } p=1,$$

то есть состояние $u_{\text{ст}}=0$ является неустойчивым. Для $u_{\text{ст}}=1$

$$d\tilde{u}/dt=-\tilde{u},\quad p=-1$$

и состояние устойчиво. Уравнение (9) допускает аналитическое решение. Действительно,

$$du/[u(1-u)] = dt, \quad t = \int du/[u(1-u)] + F(x).$$

Проводя интегрирование и полагая $F(x)=\ln f(x)$, находим

$$u = 1/[1-f(x)e^{-t}]\,.$$

Используя выражение для $u(0,x)$ и вводя обозначение $z=t+sx$, окончательно получаем

$$u(x,t) = 1/(1+e^{-z}). \qquad (10)$$

Нетрудно видеть, что при $z=0$ $u(x,t)=1/2$, при $z\to-\infty$ $u(x,t)\to 0$, при $z\to+\infty$ $u(x,t)\to 1$. Таким образом, решение (10) представляет собой волну, которая движется влево с постоянной скоростью и имеет вид, представленный на рис. 2. Понятно, что такое решение структурно неустойчиво, потому что его форма и скорость полностью зависят от начального условия. Могут ли решения, подобные изображенному на рис. 2, быть устойчивыми? Может ли, например, стабилизировать такую волну диффузия? Наверное, хотя возможна и диффузионная неустойчивость, которая может порождать пространственные структуры конечной амплитуды.

Фишер исследовал частный случай уравнения КПП (1) с квадратичной нелинейностью, то есть

$$\partial u/\partial t = ku(1-u) + D\partial^2 u/\partial x^2, \qquad (11)$$

k и D – положительные постоянные. Уравнение (11) можно рассматривать как простейшую диффузионную модель логистического роста популяции. Исследуем существование и форму решений уравнения (11) типа бегущей волны, для которых $0\le u\le 1$, и найдем скорость распространения таких волн. Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = f(z), \quad z = x + ct\,, \qquad (12)$$

где c – скорость волны, которая может быть и положительной и отрицательной, поскольку уравнение (11) инвариантно относительно замены x на $(-x)$. Пусть для определенности $c>0$, то есть волна, описываемая соотношениями (12), движется в отрицательном направлении x. Очевидно, что

$$\partial u/\partial x = \partial u/\partial z, \quad \partial u/\partial t = c\partial u/\partial z$$

и, следовательно, уравнение (11) принимает вид

$$Dd^2f/dz^2 - cdf/dz + kf(1-f) = 0. \qquad (13)$$

Мы хотим найти значения c (или одно значение) такие, что у уравнения (13) существует решение, удовлетворяющее условиям

$$0 \le f \le 1, \quad \lim_{z\to-\infty} f(z) = 0, \quad \lim_{z\to+\infty} f(z) = 1. \qquad (14)$$

Перепишем уравнение (13) следующим образом:

$$df/dz = F, \quad DdF/dz = cF - kf(1-f).$$

Тогда траектории на фазовой плоскости подчиняются уравнению

$$dF/df = [cF - kf(1-f)]/(DF), \qquad (15)$$

которое имеет две особые точки на плоскости (F,t): (0,0) и (0,1). Это

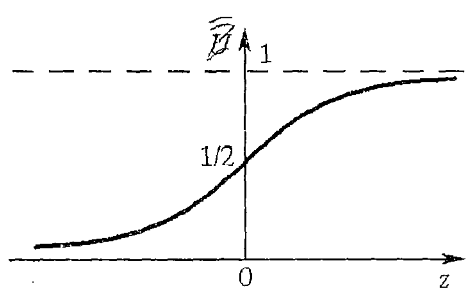


Рис. 2

следует из уравнений $F(z)=0$ и $cF(z)-kf(z)[1-f(z)]=0$. Исследуем характер этих особых точек.

Вблизи особой точки (0,0) уравнение (13) для малого возмущения $\tilde{f}$ ($f=f_{\text{ст}}+\tilde{f}$) становится таким

$$Dd^2\tilde{f}/dz^2 - cd\tilde{f}/dz + k\tilde{f} = 0.$$

Тогда $\tilde{f} \sim e^{pt}$ и характеристическое уравнение

$$p^2 - (c/D)p + k/D = 0$$

имеет решение

$$p_{1,2} = c/(2D) \pm \{[c/(2D)]^2 - k/D\}^{1/2}.$$

Поскольку k и $D > 0$, при $c^2>4kD$, то есть при

$$c \geq c_{\min} = 2(kD)^{1/2}$$

оба корня характеристического уравнения положительны, и особая точка (0,0) – неустойчивый узел. Если $0<c<c_{\min}$, то $p_{1,2}=c/(2D)\pm j\{k/D-[c/(2D)]^2\}^{1/2}$, $j=(-1)^{1/2}$ и особая точка – неустойчивый фокус; при $c=0$ особая точка – центр. В двух последних случаях вблизи точки (0,0) на любой траектории найдутся точки, для которых $f<0$, то есть решений, удовлетворяющих требуемым условиям (14), быть не может.

Уравнение (15) вблизи точки (0,0) приближенно можно записать следующим образом:

$$dF/df \approx (cF-kf)/(DF).$$

Вблизи особой точки (0,1) $f=1+\tilde{f}$; уравнение (13) выглядит так

$$Dd^2\tilde{f}/dz^2 - cd\tilde{f}/dz - k\tilde{f}=0$$

и, соответственно,

$$p_{1,2} =c/(2D) \pm \{[c/(2D)]^2 + k/D\}^{1/2}.$$

Поскольку для любых $c\geq 0$ и $p_1>0$, и $p_2>0$, особая точка (0,1) – седло, вблизи которого

$$dF/df \approx (cF+kf)/(DF).$$

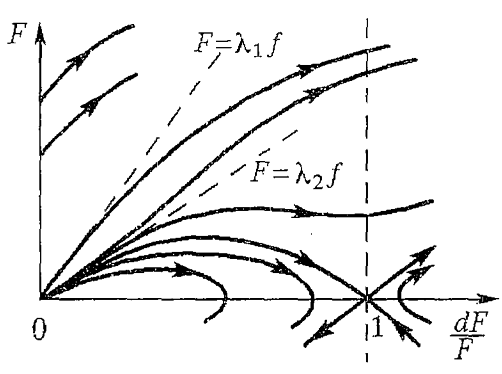


Рис. 3

На рис. 3, взятом из книги Марри, качественно представлены траектории волновых решений уравнения (13) на фазовой плоскости при $c>2(kD)^{1/2}$. Таким образом, из приведенного анализа и рис. 3 следует, что для каждого $c>c_{\min}$ есть единственная траектория, начинающаяся в точке $f=0$ и движущаяся к $f=1$ в полосе $0\leq f\leq 1$, у которой $F>0$, за исключением точек $f=0$ и $f=1$, где $F=0$ [2]. При $c=c_{\min}$ узел в точке (0,0) вырожденный с двумя наклонами $\lambda_{1,2}=[1/(2D)][c\pm(c^2-4kD)^{1/2}]$, сливающимися в $c_{\min}/(2D)=(kD)^{1/2}$.

Фишер предложил простое доказательство того, что начальные данные,

[2] Строгое доказательство этого есть как в работе [1], так и в монографии [5] в разделе «Задача А.Н. Колмогорова, И.Г. Петровского, Н.С. Пискунова».

выражаемые, например, условием

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \qquad (16)$$

приводят к решению, которое будет эволюционировать в волновое со скоростью $c=c_{\min}$. Идея доказательства в том, что, по предположению, решение эволюционирует в волновое решение постоянной формы, подобное представленному на рис. 2. Общая площадь под кривой в любой момент времени t слева от точки $x=-R<0$ равна

$$U = \int_{-\infty}^{-R} u(x,t)dx, \qquad R>0. \qquad (17)$$

В анализируемой задаче U означает общее число особей слева от $x=-R$. Для достаточно большого R и конечного t значения u слева от $x=-R$ малы, а при выполнении (16) вообще $u=0$. Фишер предложил зафиксировать некоторое произвольно малое значение U и найти из (17) R как функцию времени так, чтобы U оставалось равным выбранному значению. Если определена функция $R(t)$, то можно найти и скорость распространения dR/dt. Случаи малых u и больших R соответствуют области $0<u<<1$, поэтому в уравнении можно пренебречь слагаемым ku^2 по сравнению с ku. В результате получаем линейное уравнение

$$\partial u/\partial t = ku + D\partial^2 u/\partial x^2. \qquad (18)$$

Для упрощения выкладок Фишер рассмотрел двумерную симметричную задачу с радиальной координатой $r\geq 0$ и функцией $u=u(r,t)$, которая вместо (18) удовлетворяет уравнению

$$\partial u/\partial t = ku + D[\partial^2 u/\partial r^2 + (1/r)\partial u/\partial r], \qquad u(r,0) = \delta(r), \qquad (19)$$

где $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака. В такой постановке задачи вместо (17) требуем, чтобы площадь под u вне круга $r=R$ была постоянной, то есть

$$2\pi \int_{r=R(t)}^{\infty} u(r,t)rdr = U = \text{const}. \qquad (20)$$

Пусть $u(r,t)=e^{kt}\varphi$. Тогда из (19) следует, что

$$\partial\varphi/\partial t = D[\partial^2\varphi/\partial r^2 + (1/r)\partial\varphi/\partial r], \qquad \varphi(r,0) = \delta(r). \qquad (21)$$

Решение задачи (21) известно (см., например, [6]) и имеет вид

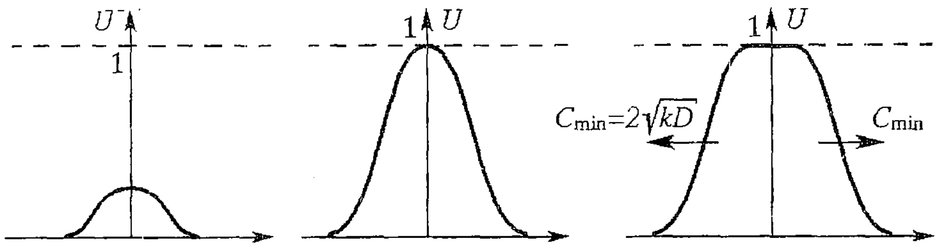
$$u(r,t) = [1/(4\pi Dt)]\exp[kt-r^2/(4Dt)]. \qquad (22)$$

Подставляя решение (22) в уравнение (20) и проводя интегрирование, после простых преобразований находим, что

$$R(t) = [4kDt^2 - 4D(\ln u)t]^{1/2} \approx 2(kD)^{1/2}t,$$

поскольку второе слагаемое под корнем мало. Следовательно, скорость распространения волны $dR/dt=c_{\min}=2(kD)^{1/2}$. Если вернуться к общей постановке задачи, то легко проследить, что в формуле (6) для нашего случая $\alpha=k$. Так как уравнение (11) инвариантно относительно изменения знака x, имеется и решение волны, бегущей направо: $u(x,t)=u(x-ct)$, $c>0$, $f(-\infty)=1$, $f(+\infty)=0$. Типичная картина развития во времени решения уравнения (11), демонстрирующая постоянство волновых фронтов, показана на рис. 4, взятом из книги Марри.

Годом позже работы [1] появилась статья Я.Б. Зельдовича и Д.А. Франк-Каменецкого [7]. В ней была описана нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло. Рассматривалась среда, в которой при высокой температуре



$t=0$ $t>0$ t велико

Рис. 4

происходят необратимые химические реакции, сопровождающиеся выделением энергии. В этом случае оказывается возможным эстафетный механизм передачи тепла, когда тепло, выделившееся в некотором слое x_1, передается в следующий слой x_2 (рис. 5, здесь T – температура). При этом нелинейная температурная волна (достигаемая температура определяется теплотворной способностью и теплоемкостью вещества) распространяется без затухания и с постоянной скоростью. Определение скорости распространения и структуры переходной зоны есть предмет теории равномерного распространения пламени как части теории горения. Математическая теория сводится к решению уравнения для температуры, которое имеет вид

$$\partial T/\partial t = D\partial^2 T/\partial x^2 + W(T), \qquad (23)$$

с граничными условиями $T=T_0$ при $x=+\infty$, $T=T_b$ при $x\to-\infty$ и $W(T_b)=0$, D – коэффициент диффузии. Следуя [8], удобно перейти в (23) к безразмерным величинам $T=T_0+(T_b-T_0)\theta$, так что $0\leq\theta\leq1$, $y=x/D^{1/2}$, $w=W/(T_b-T_0)$. Тогда приходим к уравнению

$$\partial\theta/\partial t = \partial^2\theta/\partial y^2 + w(\theta), \qquad (24)$$

решения которого будем искать в виде $\theta=\theta(y-vt)=\theta(\xi)$, $\xi=y-vt$, $v=\text{const}$. Подставляя θ в виде такой бегущей волны, находим

$$-v\, d\theta/d\xi = d^2\theta/d\xi^2 + w(\theta).$$

Положим далее $(-v\, d\theta/d\xi) = p$. Учитывая, что $d/d\xi = (d\theta/d\xi)(d/d\theta) = (-p/v)d/d\theta$, $d^2\theta/d\xi^2=(-1/v)dp/d\xi=(p/v^2)dp/d\theta$, окончательно получаем

$$p = (p/v^2)dp/d\theta + w(\theta) \text{ и } dp/d\theta = (v^2/p)[p - w(\theta)]. \qquad (25)$$

Граничное условие $\theta=0$ и $\theta=1$ при $\xi=\pm\infty$ включает и условие $d\theta/d\xi=0$ при при $\xi=\pm\infty$, то есть на уравнение (25) первого порядка для $p(\theta)$ наложены два условия $p(0)=0$ и $p(1)=0$. Следовательно, можно найти v. Для случая, когда $w(\theta)$ имеет вид, показанный на рис. 6, Я.Б. Зельдович и Д.А. Франк-Каменецкий предложили

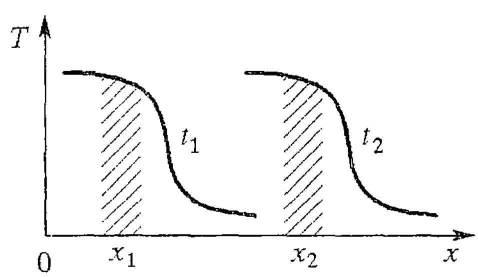


Рис. 5

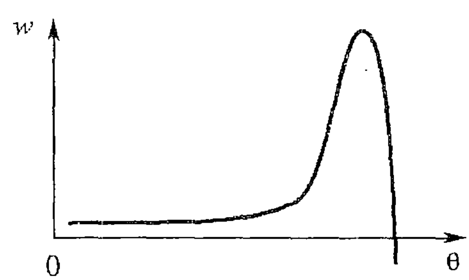


Рис. 6

следующий изящный способ решения. Пренебрежем в квадратных скобках уравнения (25) величиной p по сравнению с $w(\theta)$. Получаем в области изменения θ от 1 до максимума

$$pdp \approx -v^2 w(\theta)d\theta, \quad p_1 = v[\int_{\theta_1}^{1} w(\theta)d\theta]^{1/2}.$$

При этом максимальное значение p_{max} достигается уже при $(1-\theta_{max})<(1-\theta_1)<<1$ и равно

$$p_{max} = v[\int_0^1 w(\theta)d\theta]^{1/2}.$$

В области, где $w(\theta)$, пройдя максимум, стало малым, пренебрегаем $w(\theta)$ по сравнению с p. Тогда имеем

$$dp/d\theta \approx v^2, \quad p = p_1 - v^2(\theta_1-\theta) \approx p_{max} - v^2(1-\theta).$$

Последнее решение удовлетворяет условию θ=1, p=0. Продолжение его до θ=0 дает $p(0)=p_{max}-v^2$, и из условия $p(0)=0$ находим искомую скорость

$$v = [2\int_0^1 w(\theta)d\theta]^{1/2}.$$

В настоящее время параболическое уравнение типа уравнения КПП является базовой моделью, используемой для описания однокомпонентных активных сред, в которых энергия, расходуемая на поддержание автоволн (АВ) [3] не восстанавливается. В такой среде АВ представляет собой волну переключения из состояния с высокой энергией в низкоэнергетическое состояние.

Для анализа автоволновых процессов в средах с диффузией в настоящее время чаще всего используются квазилинейные параболические уравнения

$$\partial\mathbf{u}/\partial t = \mathbf{f}(\mathbf{u}) + D\Delta\mathbf{u}, \tag{26}$$

где **u** и **f** – векторы, D – диагональная матрица, Δ – лапласиан [9].

Закончим цитатой из книги [9, с. 6–7]: «Уравнение (26) весьма общего вида, и такого типа уравнениями описываются самые разнообразные активные среды в физике, химии, биологии: распределенные химические системы, физические системы с инверсной населенностью (активные тела лазеров), цепочки мультивибраторов, линии туннельных диодов, биологические распределенные системы (нейронные структуры, нервные и мышечные волокна, сердечный синцитий, популяции организмов)».

Вот такое богатство. А началось все с уравнения КПП, полученного и решенного для частной задачи.

Библиографический список

1. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической задаче // Бюллетень МГУ. Математика и механика. 1937. Т. 1, сер. А, № 16. С. 1. Позднее статья перепечатана в сб. Вопросы кибернетики. Проблемы биомедицинской кибернетики. М., 1975. Вып. 12. С. 3.

2. *Fisher R.A.* The wave of advance of advantageous genes. Ann. Eugenics. 1937.

[3] Напомним, что АВ называют самоподдерживающиеся волны в активных средах, сохраняющие свои характеристики (период, длина волны, амплитуда, форма) постоянными за счет распределенного в среде источника энергии [9].

Vol. 7. P. 355. Изложение работы Фишера есть в монографии Дж. Марри. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

3. *Тихомиров В.* Андрей Николаевич Колмогоров. Квант. 1993. №3/4. С.3.

4. *Шкловский И.С.* Эшелон. Химия и жизнь. 1989. № 2. С. 82.

5. *Зельдович Я.Б., Баренблат Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.

6. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1964.

7. *Зельдович Я.Б., Франк-Каменицкий Д.А.* Теория теплового распространения пламени. ЖФХ. 1938. Т. 12, вып. 1. С. 100.

8. *Зельдович Я.Б.* Горение: нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло // Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М.: Наука. 1981. С. 30.

9. Автоволновые процессы в системах с диффузией. Сб. науч. тр. Горький, 1981.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 14.07.97

Трубецков Дмитрий Иванович родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Ректор СГУ, заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской Академии наук, заслуженный деятель науки РФ. В Саратовском государственном университете в разное время подготовил и прочитал общие курсы лекций «Основы электроники сверхвысоких частот», «Квантовая электроника», «Методы математической оптимизации», «Теория волновых процессов», а также специальные курсы «Введение в специальность (радиофизика и электроника)», «Теория СВЧ электронных приборов О и М-типа», «Вакуумная микроэлектроника», «Высокочастотная релятивистская электроника», «Хаос и структуры», «Линейные волны», «Нелинейные волны». Некоторые из спецкурсов читал в Санкт-Петербургском государственном техническом университете и Ростовском государственном университете. Научный руководитель Колледжа прикладных наук СГУ. Соросовский профессор (1994, 1995). Автор учебных пособий «Введение в теорию колебаний и волн» (М.: Наука, 1984; The Nitherland: Kluver Academic Publishers, 1989; М.:Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем); «Нелинейная динамика в действии» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995; совместно с А.А. Короновским) и «Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996; совместно с А.Г. Рожневым и Д.В. Соколовым), «Колебания и волны для гуманитариев» (Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1997).