



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья
УДК 537.86/530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003120
EDN: LTWRTA

Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой Часть 2. Амплитудно-фазовое приближение

А. Б. Адилова^{1,2}✉, Н. М. Рыскин^{1,2}

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия

E-mail: ✉AdilovaAB@gmail.com, RyskinNM@gmail.com

Поступила в редакцию 28.02.2024, принята к публикации 26.04.2024,

опубликована онлайн 9.08.2024, опубликована 30.09.2024

Аннотация. Цель работы — развитие теории взаимной синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Учет запаздывания сигнала, распространяющегося в канале связи, принципиально необходим, в частности, при анализе синхронизации на сверхвысоких частотах, когда расстояние между генераторами не мало по сравнению с длиной волны. **Методы.** Проводится строгий бифуркационный анализ взаимной синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением в амплитудно-фазовом приближении. Результаты бифуркационного анализа сопоставляются с результатами численного моделирования системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. **Результаты.** Построена полная бифуркационная картина взаимной синхронизации на плоскости «частотная расстройка — параметр связи». Показано, что в случае малых расстройек и слабой связи с увеличением параметра связи неподвижные точки, которые соответствуют режимам с доминированием одного из генераторов, сливаются с седловыми неподвижными точками и исчезают. В случае больших расстройек одна из таких точек либо исчезает, либо теряет устойчивость в результате обратной (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа. Другая из этих точек остается устойчивой при любых значениях параметра связи, причем амплитуды колебаний обоих осцилляторов постепенно сравниваются, а разность фаз стремится к нулю, то есть режим колебаний с доминированием одного из осцилляторов постепенно трансформируется в режим нулевой синхронизации. Установлено, что в системе двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой, при увеличении параметра связи происходит трансформация бассейна притяжения устойчивой нулевой неподвижной точки, в результате которой, если в начальный момент времени колебания генераторов близки к противофазным, колебания затухают при любых начальных амплитудах. **Заключение.** Изучена картина синхронизации в системе генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Обнаружено, что помимо режимов взаимной синхронизации с примерно равными амплитудами колебаний, возможны также стационарные режимы с подавлением колебаний одного генератора другим. Изучены бифуркационные механизмы появления и исчезновения мультистабильности в системе.

Ключевые слова: связанные генераторы, автоколебательные системы с жестким возбуждением, синхронизация, запаздывание, амплитудно-фазовое приближение.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-72-00109.

Для цитирования: Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Часть 2. Амплитудно-фазовое приближение // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 574–588. DOI: 10.18500/0869-6632-003120. EDN: LTWRTA

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay

Part 2. Amplitude-phase approximation

A. B. Adilova^{1,2}✉, N. M. Ryskin^{1,2}

¹Saratov State University, Russia

²Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of the RAS, Russia

E-mail: ✉ AdilovaAB@gmail.com, RyskinNM@gmail.com

Received 28.02.2024, accepted 26.04.2024, available online 9.08.2024, published 30.09.2024

Abstract. *Aim of this work* is to develop the theory of mutual synchronization of two oscillators with hard excitation associated with a delay. Taking into account the delay of a coupling signal is necessary, in particular, when analyzing synchronization at microwave frequencies, when the distance between the oscillators is large compared to the wavelength. *Methods.* A bifurcation analysis of the mutual synchronization of two generators with hard excitation in the amplitude-phase approximation is carried out. The results of the bifurcation analysis are compared with the results of numerical simulation of the system of differential equations with delay. *Results.* A complete bifurcation pattern of mutual synchronization on the plane “frequency mismatch — coupling parameter” is presented. In the case of small mismatch and weak coupling, the fixed points, which correspond to modes with dominance of one of the oscillators, merge with saddle fixed points and disappear when the coupling parameter increases. In the case of large mismatch, one of these points either vanishes or loses stability as a result of a subcritical Andronov–Hopf bifurcation. The other of these points remains stable at any values of the coupling parameter, and the oscillation amplitudes of both oscillators gradually equalize and the phase difference tends to zero, i.e., the oscillation mode with dominance of one of the oscillators gradually transforms into the in-phase synchronization mode. It has been found that with an increase in the coupling parameter, a transformation of the basin of attraction of a stable zero fixed point occurs. As a result of this transformation, if at the initial moment of time the oscillations of the generators are close to antiphase, the oscillations decay at any initial amplitudes. *Conclusion.* The synchronization pattern in the system of delay-coupled oscillators with hard excitation has been studied. It was discovered that in addition to mutual synchronization modes with approximately equal oscillation amplitudes, stationary modes with suppression of oscillations of one generator by another are also possible. The bifurcation mechanisms of the appearance and disappearance of multistability in the system have been examined.

Keywords: coupled generators, self-oscillating systems with hard excitation, synchronization, delay, amplitude-phase approximation.

Acknowledgements. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 22-72-00109.

For citation: Adilova AB, Ryskin NM. Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay. Part 2. Amplitude-phase approximation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(5):574–588. DOI: 10.18500/0869-6632-003120

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследование синхронизации в ансамблях связанных автоколебательных систем является актуальной задачей радиофизики и электроники. Как известно, взаимная синхронизация связанных сверхвысокочастотных (СВЧ) генераторов широко применяется в системах сложения мощностей [1]. Отметим, что при изучении синхронизации связанных СВЧ-генераторов принципиальную роль играет запаздывание, которое обусловлено конечным временем распространения сигнала от одного генератора к другому. Запаздывание существенно влияет на картину синхронизации связанных генераторов [2, 3]. Интерес вызывает задача о взаимной синхронизации двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Поскольку генератор с жестким возбуждением демонстрирует бистабильность, картина синхронизации в такой системе значительно усложняется по сравнению со связанными системами с мягким самовозбуждением.

В частности, появляется мультистабильность синхронных режимов. Подобное поведение характерно и для задач о вынужденной синхронизации генераторов с жестким возбуждением (см., например, [4–8]).

В первой части данной работы [9] анализ синхронизации системы двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой, был проведен в фазовом приближении, которое справедливо при слабой связи и при малых расстройках. В этом случае связь практически не изменяет амплитуды колебаний взаимодействующих подсистем, так что можно ограничиться исключительно анализом динамики разности фаз, что существенно упрощает рассмотрение. Синхронизация наступает в результате седлоузловой бифуркации (такой механизм обычно называют частотным или фазовым захватом, см., например, [10, 11]). В [9] были получены обобщенные уравнения Адлера, из которых следуют простые аналитические формулы для условий седлоузловых бифуркаций. Найдены условия, при которых связь является чисто консервативной или чисто диссипативной, что позволило проследить переход от одного типа связи к другому при изменении управляющих параметров.

Однако фазовое приближение дает лишь упрощенное описание процессов синхронизации в области малых расстройок и, соответственно, слабой связи. В данной части статьи представлено построение более полной картины синхронизации в рамках системы амплитудно-фазовых уравнений.

1. Основные уравнения и классификация неподвижных точек

В [9] была введена в рассмотрение модель генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой, которая в случае, когда время задержки мало по сравнению с характерным временем установления колебаний, описывается системой уравнений для медленно меняющихся комплексных амплитуд следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} + \frac{i\Delta}{2} A_1 &= \left(\sigma + (1 + ib) |A_1|^2 - |A_1|^4 \right) A_1 + \rho e^{-i\psi} A_2, \\ \frac{dA_2}{dt} - \frac{i\Delta}{2} A_2 &= \left(\sigma + (1 + ib) |A_2|^2 - |A_2|^4 \right) A_2 + \rho e^{-i\psi} A_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь σ — параметр возбуждения, b — параметр неизохронности, Δ — нормированная расстройка собственных частот, ρ — коэффициент связи, ψ — набег фазы сигнала, распространяющегося в канале связи. Режим жесткого возбуждения реализуется при $-1/4 < \sigma < 0$.

Несмотря на то, что (1) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в ней опосредованно учитываются эффекты запаздывания, поскольку набег фазы ψ определяется временем задержки. Условия применимости данного приближения более подробно обсуждаются в [12].

Разделив систему (1) на уравнения для вещественных амплитуд и фаз, полагая $A_{1,2} = R_{1,2} \exp(i\varphi_{1,2})$, можно в итоге прийти к системе трех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= (\sigma + R_1^2 - R_1^4) R_1 + \rho R_2 \cos(\psi + \varphi), \\ \dot{R}_2 &= (\sigma + R_2^2 - R_2^4) R_2 + \rho R_1 \cos(\psi - \varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\Delta + b(R_2^2 - R_1^2) + \rho \left[\frac{R_1}{R_2} \sin(\psi - \varphi) - \frac{R_2}{R_1} \sin(\psi + \varphi) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз, точка сверху означает дифференцирование по времени t . Отметим, что близкие по структуре уравнения возникают в задачах, где рассматриваются связанные осцилляторы различной (физической, химической, биологической) природы [6, 13–15].

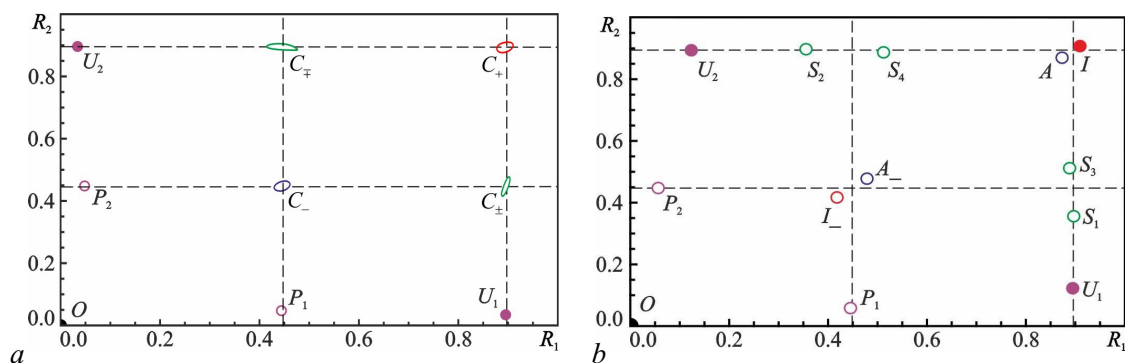


Рис. 1. Проекция неподвижных точек и предельных циклов системы (2) на плоскость R_1, R_2 при $\sigma = -0.16, b = 0, \psi = 0.2\pi, \rho = 0.02, \Delta = 0.5$ (a) и $\Delta = 0$ (b) (цвет онлайн)

Fig. 1. Projection of the fixed points and limit cycles of the system (2) onto the R_1, R_2 plane at $\sigma = -0.16, b = 0, \psi = 0.2\pi, \rho = 0.02, \Delta = 0.5$ (a) и $\Delta = 0$ (b) (color online)

Перейдем к анализу неподвижных точек (состояний равновесия) данной системы. Как известно, в случае отсутствия связи (автономные генераторы) решения системы (2) имеют вид

$$R_{1,2}^2 = R_{\pm}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sigma}}{2}. \quad (3)$$

Решение R_+ является устойчивым, а R_- — неустойчивым [10]. Помимо этого, при $\sigma < 0$ устойчивым является также нулевое решение $R_{1,2} = 0$. Выберем параметр возбуждения равным $\sigma = -0.16$, так чтобы $R_+ = \sqrt{0.8} \approx 0.894, R_- = \sqrt{0.2} \approx 0.447$.

При введении слабой связи в фазовом пространстве образуются четыре предельных цикла. На рис. 1, a приведен пример проекции неподвижных точек и циклов на плоскость R_1, R_2 , построенный для случая $\Delta = 0.5$ и малой связи $\rho = 0.02$. Горизонтальные и вертикальные штриховые линии соответствуют значениям $R_{1,2} = R_{\pm}$. Как видно из рис. 1, a, имеется цикл с примерно равными амплитудами $R_{1,2} = R_+$, который будем обозначать C_+ и цикл C_- с амплитудами примерно равными $R_{1,2} = R_-$. Первый из этих циклов является устойчивым, второй — неустойчивым. Существует также еще два неустойчивых цикла, для которых $R_1 \approx R_+, R_2 \approx R_-$ и наоборот. Их будем обозначать C_{\pm} и C_{\mp} соответственно.

Как и в случае изолированных генераторов, существует устойчивое нулевое решение O . Помимо этого, имеется еще четыре неподвижных точки. Для первой пары таких точек амплитуда одного генератора близка к R_+ , а второго — к нулю, и наоборот. Будем обозначать их $U_{1,2}$ соответственно. Данные точки будут устойчивыми, поскольку, как уже отмечалось выше, R_+ — устойчивое решение в случае изолированных генераторов. Для второй пары точек, которые будем обозначать $P_{1,2}$, амплитуда одного генератора близка к нулю, а второго — к R_- , и наоборот. Эти точки, очевидно, будут неустойчивыми, поскольку R_- — неустойчивое состояние. Таким образом, в фазовом пространстве существует две устойчивые точки и устойчивый цикл, отвечающий режиму биений.

При уменьшении расстройки между генераторами на циклах $C_{\mp}, C_{\pm}, C_-, C_+$ происходят седлоузловые бифуркации, в результате которых последовательно рождаются пары точек S_2 и S_4, S_1 и S_3, I_- и A_-, I и A соответственно (см. рис. 1, b)¹. На рисунке темными кружками отмечены устойчивые точки, светлыми — неустойчивые. Следуя [9], точки A, A_-, I и I_- будем называть

¹Более строго, в данном случае имеет место исчезновение предельного цикла и рождение пары состояний равновесия в результате бифуркации петли сепаратрисы седлоузла [16].

Таблица. Классификация неподвижных точек системы (2)

Table. Classification of fixed points of the system (2)

	$R_1 = 0$	$R_1 = R_-$	$R_1 = R_+$
$R_2 = 0$	O	P_1	U_1
$R_2 = R_-$	P_2	I_-, A_-	$S_{1,3}$
$R_2 = R_+$	U_2	$S_{2,4}$	I, A

составим Таблицу, в которой в первой строке приведены значения амплитуды первого генератора в отсутствие связи, в первом столбце — значения амплитуды второго, а в остальных ячейках Таблицы показаны обозначения для неподвижных точек системы (2), которые возникают при ненулевой связи.

Отметим, что при $\Delta = 0$ для симметричных точек I, A, I_-, A_- значения R_1 и R_2 равны, в то время как пары несимметричных точек $U_{1,2}, P_{1,2}, S_{1,2}$ и $S_{3,4}$ инвариантны относительно замены

$$(R_1, R_2, \varphi) \rightarrow (R_2, R_1, -\varphi).$$

2. Бифуркационный анализ

Бифуркационный анализ системы (2) в амплитудно-фазовом приближении был проведен при помощи пакета XPPAUT [17]. Как показано в работах [2, 3, 9], картина синхронизации во многом определяется набегом фазы в канале связи ψ . В зависимости от ψ связь может носить либо диссипативный, либо консервативный характер. В случае, когда доминирует диссипативная связь, синхронизация возможна только на синфазной моде. Когда доминирует консервативная связь, в системе появляется фазовая бистабильность, то есть появляются области противофазной синхронизации. Для начала будем считать осцилляторы изохронными ($b = 0$) и рассмотрим ситуацию, когда набег фазы $\psi = 0.2\pi$. В этом случае связь носит по преимуществу диссипативный характер [2–4].

На рис. 2 построены линии седлоузловых бифуркаций SN и бифуркаций Андронова–Хопфа AH на плоскости параметров Δ, ρ .

Как было показано в [9], в системе связанных генераторов с жестким возбуждением наряду с режимом синхронизации, в котором амплитуды колебаний в обеих подсистемах примерно равны (ему в данном случае отвечает неподвижная точка I на рис. 1, b), возможны также синхронные режимы, в которых амплитуда одного генератора значительно больше, чем другого (неподвижные точки $U_{1,2}$ на рис. 1, b). Соответственно, на рис. 2 различными цветами закрашены области плоскости параметров, где система (2) имеет одно (голубой), два (розовый) или три (фиолетовый) устойчивых решения. Белым цветом показана область биений, где режим синхронизации отсутствует.

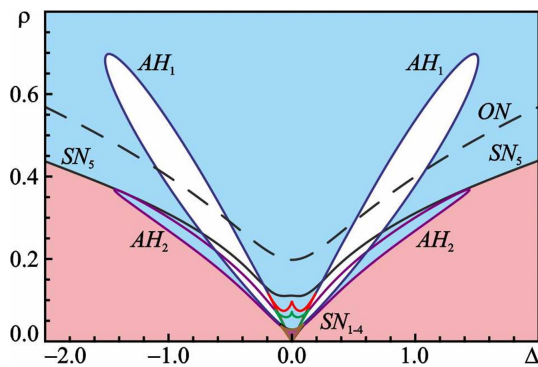


Рис. 2. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) и бифуркаций Андронова–Хопфа (AH) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16, \psi = 0.2\pi, b = 0$. Области устойчивости синхронных режимов закрашены различными цветами (цвет онлайн)

Fig. 2. Boundaries of saddle-node bifurcations (SN) and Andronov–Hopf bifurcations (AH) on the parameter plane Δ, ρ at $\sigma = -0.16, \psi = 0.2\pi, b = 0$. Domains of stability of synchronous modes are shaded in different colors (color online)

Из рис. 2 видно, что области устойчивости синхронных режимов имеют сложную структуру, которая значительно отличается от случая связанных генераторов с мягким самовозбуждением, рассмотренного в работе [3]. В частности, области биений оказываются замкнутыми. Отметим, что похожая структура на плоскости параметров наблюдалась в задаче о синхронизации двухмодовой автоколебательной системы внешним сигналом [18].

Далее рассмотрим более подробно случаи малых и больших расстроек.

2.1. Случай малых расстроек. Рассмотрим вначале случай малых расстроек, когда имеют место седлоузловые бифуркации, которые были подробно проанализированы в первой части настоящей работы [9]. Динамику системы наглядно иллюстрируют однопараметрические бифуркационные диаграммы, построенные для различных значений расстройки собственных частот (рис. 3). Сплошными линиями показаны устойчивые состояния, штриховыми — неустойчивые. Обозначения особых точек введены в соответствии с Таблицей.

На рис. 3, а приведена бифуркационная диаграмма для амплитуды колебаний первого генератора R_1 в случае $\Delta = 0$. Видно, что существует пять седлоузловых бифуркаций, соответствующих слиянию разных неподвижных точек. При $\rho \approx 0.028$ происходят две седлоузловые бифуркации, в результате которых устойчивые точки U_1 и U_2 сливаются с седловыми точками S_1 и S_2 , соответственно и исчезают. Таким образом, вместо четырех устойчивых режимов остаются два: режим синхронизации на синфазной моде (точка I) и точка O в начале координат.

При $\rho \approx 0.071$ неустойчивые точки P_1 и P_2 сливаются с точкой I_- . Далее эта точка при $\rho \approx 0.197$ сливается с точкой O в начале координат, которая теряет устойчивость. После этого единственным устойчивым режимом остается синфазная синхронизация. Кроме того, при $\rho \approx 0.098$ точки S_3 и S_4 сливаются с точкой A , а затем при $\rho \approx 0.111$ — с точкой A_- .

Условие потери устойчивости точкой O нетрудно найти аналитически. Проводя стандартную процедуру линеаризации уравнений (1) относительно малых возмущений, приходим к характеристическому уравнению, которое имеет вид

$$(p - \sigma)^2 + (\Delta/2)^2 = \rho^2 e^{-2i\psi}. \quad (4)$$

Поскольку на границе потери устойчивости корень характеристического уравнения является чисто мнимым, $p = i\omega$, разделяя (4) на вещественную и мнимую части и исключая из полученных соотношений ω , получим выражение, определяющее границу устойчивости на плоскости Δ, ρ :

$$\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 = \rho^2 \cos 2\psi + \frac{\rho^4 \sin^2 2\psi}{4\sigma^2} - \sigma^2. \quad (5)$$

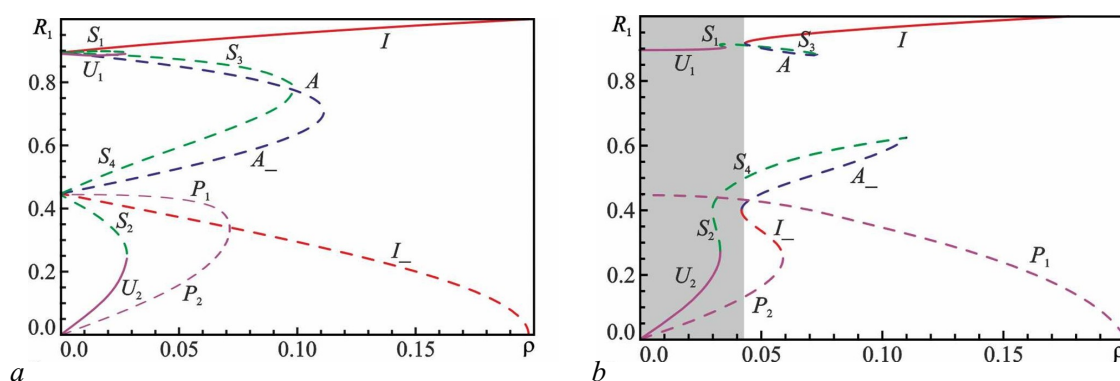


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы при $\sigma = -0.16$, $b = 0$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0$ (а) и $\Delta = 0.07$ (б). Сплошными линиями показаны устойчивые точки, пунктирными — неустойчивые (цвет онлайн)

Fig. 3. Bifurcation diagrams at $\sigma = -0.16$, $b = 0$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0$ (a) and $\Delta = 0.07$ (b). Stable points are plotted by solid lines, unstable points — dotted lines (color online)

На рис. 2 эта граница показана штриховой линией ON .

Из полученного соотношения видно, при $\psi \rightarrow \pi/2$, то есть когда связь приобретает чисто реактивный характер, граница устойчивости смещается в область больших значений ρ . При чисто реактивной связи нулевое решение всегда устойчиво. Действительно, при $\Delta = 0$ из (5) нетрудно найти

$$\rho = |\sigma| \frac{\sqrt{2(1 - \cos 2\psi)}}{\sin 2\psi}, \quad (6)$$

откуда видно, что $\rho \rightarrow \infty$ при $\psi = \pi/2$. При $\psi = 0$, когда связь чисто диссипативная, получаем $\rho = |\sigma|$.

Обсудим теперь особенности синхронизации при ненулевой расстройке. На рис. 3, *b* построена бифуркационная диаграмма для $\Delta = 0.07$. Видны некоторые отличия от случая $\Delta = 0$. Прежде всего, как уже отмечалось выше, при малых значениях ρ в фазовом пространстве существует четыре предельных цикла, один из которых устойчив (см. рис. 1, *a*). При увеличении связи происходят четыре седлоузловые бифуркации, в результате которых последовательно рождаются пары точек: S_2 и S_4 ; S_1 и S_3 ; I_- и A_- ; I и A . При дальнейшем увеличении параметра связи видно, что вместо тройного слияния точек $P_{1,2}$ и I_- (см. рис. 3, *a*) происходит слияние точек I_- и P_2 , а точка P_1 сливается с точкой O при $\rho \approx 0.21$ (при $\Delta < 0$, наоборот, точка I_- сливается с P_1 , а O — с P_2). Аналогично вместо бифуркации, в результате которой одновременно сливаются точки S_3, S_4 и A , при $\rho \approx 0.073$ сливаются точки S_3 и A , а при $\rho \approx 0.109$ — точки S_4 и A_- .

На рис. 4 в увеличенном масштабе построена наиболее сложно устроенная часть плоскости параметров рис. 2, соответствующая малым значениям расстройки и связи. На этом рисунке обозначено, какие точки рождаются или исчезают при тех или иных седлоузловых бифуркациях.

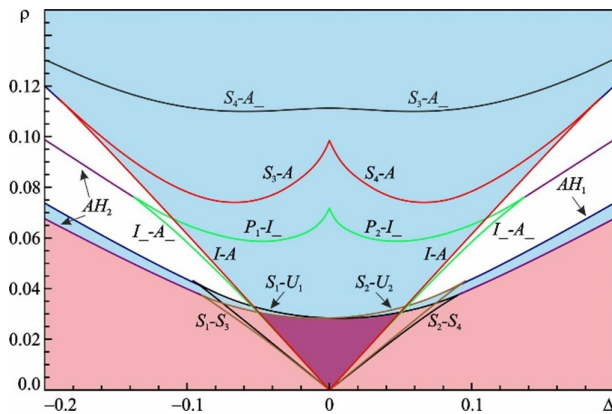


Рис. 4. Увеличенный фрагмент плоскости параметров Δ, ρ в области малых расстройек. Параметры те же, что на рис. 2 (цвет онлайн)

Fig. 4. Enlarged fragment of the Δ, ρ parameter plane in the domain of small mismatch. The other parameters are the same as in 2 (color online)

Области устойчивости точек $U_{1,2}$, то есть области устойчивости режимов, в которых один из генераторов доминирует, при малых расстройках ограничены сверху линиями, на которых происходит слияние точек $S_1 - U_1$ и $S_2 - U_2$, а при больших расстройках — линиями бифуркаций Андронова–Хопфа AH_2 . Эти линии заканчиваются на линиях седлоузловых бифуркаций $I_- - A_-$ (сверху), $S_1 - S_3$ и $S_2 - S_4$ (снизу слева и справа соответственно). Линии бифуркаций Андронова–Хопфа AH_1 заканчиваются на линиях бифуркаций $I - A$ (сверху), $S_1 - U_1$ и $S_2 - U_2$ (снизу слева и справа соответственно). В точках коразмерности два, где соединяются линии AH_1 и $I - A$, имеет место бифуркация Богданова–Тakensа [10, 19]. Ситуация в точках соединения линий AH_1 и $S_1 - S_3$ и $S_2 - S_4$ требует более детального изучения.

2.2. Случай больших расстройек. Теперь обратимся к случаю больших расстройек. На рис. 5 приведены бифуркационные диаграммы для амплитуд колебаний первого R_1 и второго R_2 генераторов в случае $\Delta = 1.8$. Как уже отмечалось выше (см. рис. 1), при слабой связи существует два устойчивых состояния $U_{1,2}$, две неустойчивые точки $P_{1,2}$, устойчивое нулевое решение O и четыре предельных цикла. Области существования цикла C_+ показаны на рис. 5 серым цветом, области существования циклов C_- , C_{\pm} и C_{\mp} — штриховкой. Инвариантные многообразия неустойчивых циклов C_- , C_{\pm} и C_{\mp} разграничивают бассейны притяжения четырех существующих аттракторов

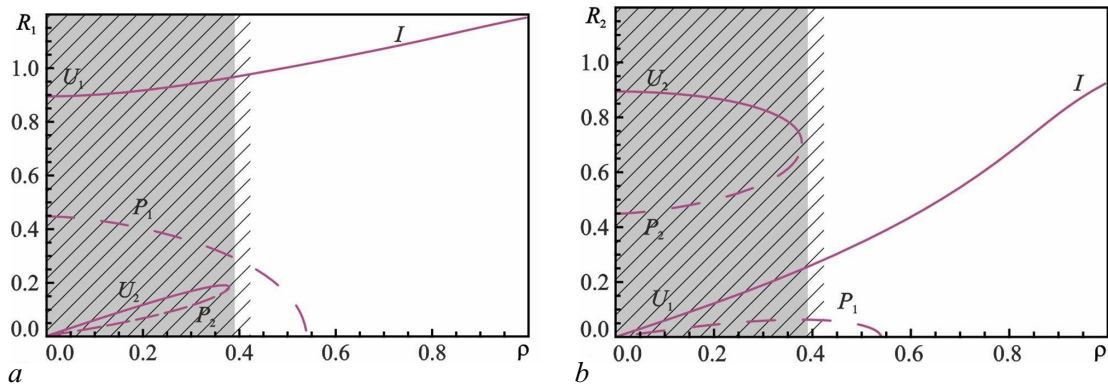


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы для амплитуды первого (а) и второго (б) генераторов при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ и $\Delta = 1.8$. Серым показана область существования устойчивого предельного цикла, штриховкой – неустойчивых (цвет онлайн)

Fig. 5. Bifurcation diagrams for the amplitude of the first (a) and second (b) oscillators at $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ and $\Delta = 1.8$. The domain of existence of a stable limit cycle is plotted in gray, and unstable ones are hatched (color online)

(точки O , $U_{1,2}$ и цикл C_+). Анализ показывает, что при увеличении ρ вначале (при $\rho \approx 0.39$) происходит слияние циклов C_+ и C_{\pm} , а затем – слияние циклов C_- и C_{\mp} .

Как видно из бифуркационных диаграмм, при $\rho \approx 0.381$ режим, когда второй генератор доминирует над первым, исчезает в результате слияния точек U_2 и P_2 . Что касается режима, в котором доминирует первый генератор (точка U_1), то он сохраняет устойчивость при любых значениях параметра связи. Однако стоит отметить, что с увеличением ρ амплитуда колебаний второго генератора R_2 увеличивается и становится примерно такой же, как R_1 , а разность фаз при этом приближается к нулю. Таким образом, при больших расстройках режим с сильно различающимися амплитудами колебаний плавно переходит в режим синфазной синхронизации и существует при любом значении параметра связи.

Более сложное поведение имеет место при меньших значениях расстройки, когда, двигаясь вверх по плоскости параметров Δ, ρ , мы пересекаем линии бифуркаций Андронова–Хопфа. На рис. 6 приведены бифуркационные диаграммы для случая $\Delta = 1.0$. При слабой связи ситуация такая же, как и при $\Delta = 1.8$: в фазовом пространстве существует пять неподвижных точек

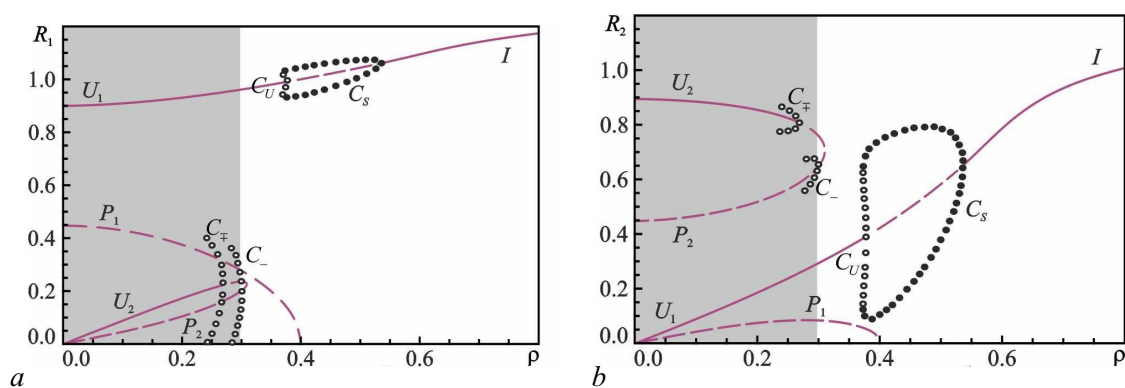


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы для первого (а) и второго (б) генераторов при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ и $\Delta = 1.0$. Серым закрашена область существования устойчивых предельных циклов (цвет онлайн)

Fig. 6. Bifurcation diagrams for the first (a) and second (b) oscillators at $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ and $\Delta = 1.0$. The domain of existence of stable limit cycles is shaded in gray (color online)

и четыре предельных цикла. Отличие состоит в том, что с увеличением ρ циклы C_{\mp} и C_{-} уменьшаются в размерах и стягиваются к точкам U_2 и P_2 . На рис. 6 они показаны кружками². При $\rho \approx 0.269$ происходит обратная бифуркация Андронова–Хопфа: цикл C_{\mp} сливается с точкой U_2 , в результате чего она теряет устойчивость (линия AH_2 на рис. 2). Неустойчивый цикл C_{-} сливается с точкой P_2 при $\rho \approx 0.301$. Что касается циклов C_{+} и C_{\mp} , то они сливаются друг с другом и исчезают так же, как и при $\Delta = 1.8$. После этого устойчивыми остаются только режим синхронизации, в котором доминирует первый осциллятор (точка U_1), и режим отсутствия колебаний (точка O).

Однако при дальнейшем увеличении происходит бифуркация образования еще одной пары предельных циклов из сгущения фазовых траекторий ($\rho \approx 0.327$). Один из этих циклов является устойчивым, другой — неустойчивым. Будем обозначать их C_s и C_S соответственно. Когда мы пересекаем линию AH_1 на рис. 2 ($\rho \approx 0.377$), цикл C_U в результате обратной бифуркации Андронова–Хопфа сливается с точкой U_1 и она теряет устойчивость. Однако устойчивым остается режим биений, которому соответствует цикл C_S . Этот цикл при $\rho \approx 0.536$ стягивается к точке U_1 , в результате чего она снова становится устойчивой. Таким образом, при обратном движении по параметру наблюдается нормальная (суперкритическая) бифуркация Андронова–Хопфа.

3. Численное моделирование

Результаты, полученные в рамках бифуркационного анализа, были проверены путем непосредственного численного интегрирования системы уравнений (2). Рассмотрим случай малых расстройек, который представляет наибольший интерес. Выберем значения параметров, при которых в фазовом пространстве имеется четыре устойчивые точки. На рис. 7 приведены примеры зависимостей амплитуд первого и второго генераторов от времени. Если обе начальные амплитуды достаточно велики (превышают R_{-}), в системе установится синфазный режим синхронизации (рис. 7, a). Этому режиму соответствует устойчивая точка I . Если начальная амплитуда одного из генераторов превышает значение R_{-} , а у другого — нет, будет происходить подавление колебаний одного из генераторов и установление режимов, которым соответствуют устойчивые точки U_1 или U_2 . Данную ситуацию иллюстрируют рис. 7, b, c. Если же начальная амплитуда обоих генераторов меньше, чем R_{-} , происходит затухание колебаний (см. рис. 7, d).

Как было показано выше (см. рис. 3, b), при увеличении параметра связи происходят седлоузловые бифуркации, в результате которых исчезают точки $U_{1,2}$. Однако следует отметить еще одно важное обстоятельство. При дальнейшем увеличении ρ происходит седлоузловая бифуркация, в результате которой сливаются точки A_{-} и S_3 или S_4 (линии $A_{-} - S_3$ и $A_{-} - S_4$ на рис. 4). При этом бассейн притяжения точки I трансформируется таким образом, что при начальной разности фаз $\varphi(0) \approx \pi$ фазовая траектория стремится к точке O , независимо от того, каковы были значения начальных амплитуд. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 8. Если начальная разность фаз является неблагоприятной, даже при начальных значениях амплитуд $R_{1,2}(0) > R_{-}$, сигнал одного генератора начинает поступать в колебательную систему другого в противофазе, в результате чего происходит полное взаимное подавление колебаний обоих генераторов (см. рис. 8, a). Однако при небольшом изменении начальной разности фаз устанавливается режим взаимной синхронизации (см. рис. 8, b). Таким образом, в данном случае мы имеем специфический случай эффекта гибели колебаний, который, в отличие от известного (см., например, [11, 19]), обусловлен не увеличением эффективной диссипации, а изменением структуры бассейнов притяжения. Аналогичное поведение

²Программный пакет ХРРАУТ позволяет построить максимальные и минимальные значения переменных, отвечающие предельному циклу. Поскольку мы анализируем уравнения (2), где в качестве одной из переменных выступает разность фаз φ , на бифуркационные диаграммы можно нанести только стягиваемые циклы, то есть такие, для которых φ изменяется в конечных пределах.

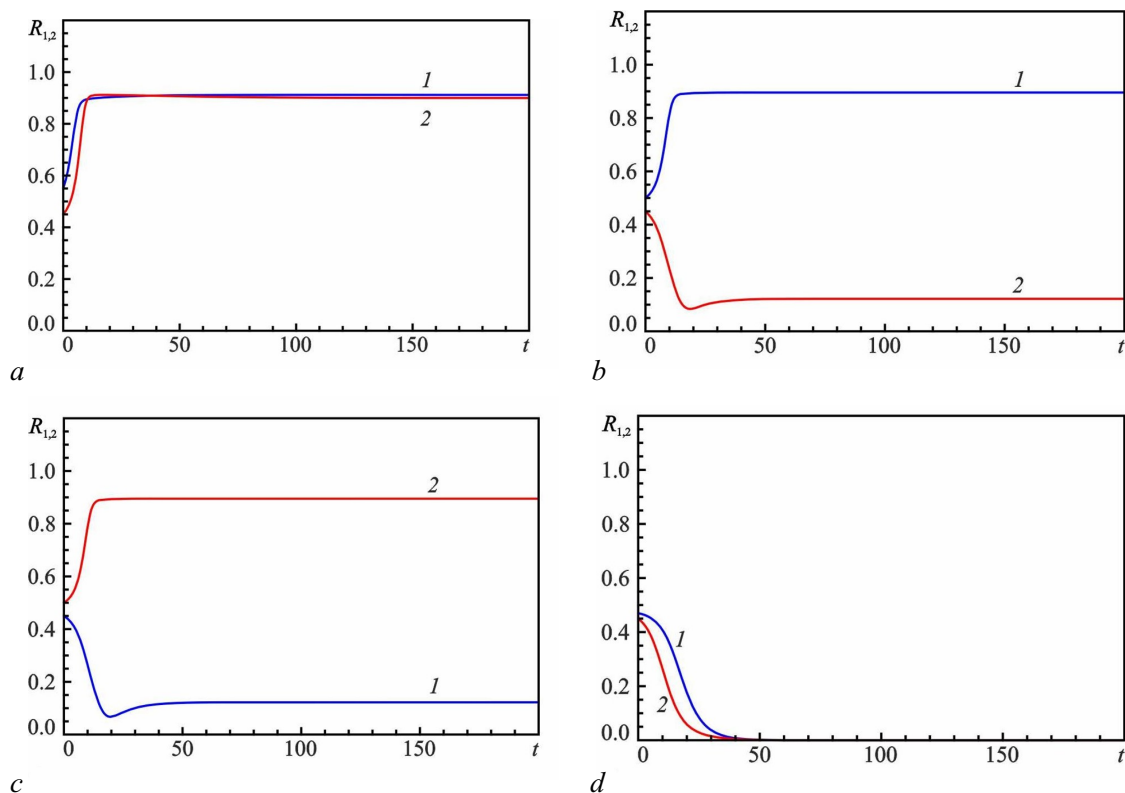


Рис. 7. Зависимости амплитуд первого и второго генератора от времени при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $\rho = 0.02$, $\Delta = 0.02$ и различных начальных условиях: (a) $R_{1,2} > R_1$ – режим взаимной синхронизации; (b, c) $R_1 > R_-, R_2 < R_-$, (c) $R_1 < R_-, R_2 > R_-$ – режимы подавления одного генератора другим; (d) $R_{1,2} < R_-$ – затухание колебаний (цвет онлайн)

Fig. 7. Time dependences of the amplitudes of the first and second oscillators at $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $\rho = 0.02$, $\Delta = 0.02$ and different initial conditions: (a) $R_{1,2} > R_1$ – mutual synchronization; (b, c) $R_1 > R_-, R_2 < R_-$, (c) $R_1 < R_-, R_2 > R_-$ – suppression of one generator by another; (d) $R_{1,2} < R_-$ – oscillation damping (color online)

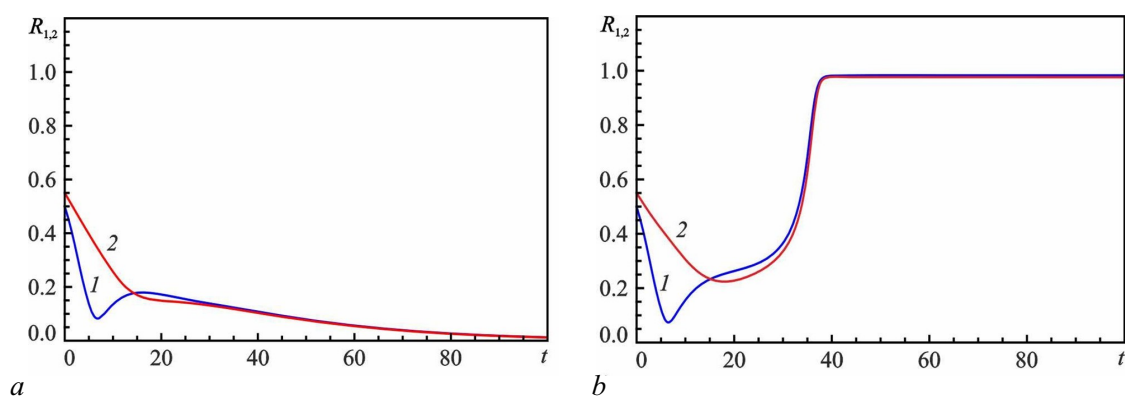


Рис. 8. Зависимости амплитуд первого и второго генератора от времени при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0.02$, $\rho = 0.15$ и различных начальных условиях: (a) $R_1(0) = 0.5$, $R_2(0) = 0.55$, $\varphi(0) = 0.98\pi$ – гибель колебаний; (b) начальные амплитуды те же, а $\varphi(0) = 0.97\pi$ – режим взаимной синхронизации (цвет онлайн)

Fig. 8. Time dependences of the amplitudes of the first and second oscillators at $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$, $\Delta = 0.02$, $\rho = 0.15$ and different initial conditions: (a) $R_1(0) = 0.5$, $R_2(0) = 0.55$, $\varphi(0) = 0.98\pi$ – oscillation death; (b) initial amplitudes are the same and $\varphi(0) = 0.97\pi$ – mutual synchronization (color online)

ние наблюдалось и в случае вынужденной синхронизации генератора с жестким возбуждением внешним сигналом [7].

Ясно, что с практической точки зрения зависимость от начальной разности фаз, которая, вообще говоря, является случайной величиной — явление нежелательное. Поэтому целесообразно выбирать параметры таким образом, чтобы находиться ниже границы седлоузловой бифуркации, в результате которой сливаются точки A и S_3 или S_4 (см. рис. 4), или же в области, где нулевое состояние уже потеряло свою устойчивость.

4. Влияние неизохронности

Выше рассматривался случай, когда осцилляторы являются изохронными ($b = 0$). Рассмотрим, какое влияние на картину синхронизации оказывает неизохронность, выбрав для определенности значение $b = 0.1$. На рис. 9, *a* построены границы седлоузловых бифуркаций и бифуркаций Андронова–Хопфа на плоскости параметров для этого случая.

В целом представленная картина синхронизации аналогична изохронному случаю, за исключением того, что границы седлоузловых бифуркаций SN_3 и SN_4 выходят не из начала координат, а из точек $\Delta = \pm\sqrt{1+4\sigma}$, как было показано в работе [9]. На рис. 9, *b* приведен увеличенный фрагмент в области малых расстройк.

Отметим, что границы седлоузловых бифуркаций SN_{1-4} достаточно хорошо согласуются с результатами анализа в фазовом приближении [9], что иллюстрирует рис. 10.

Когда параметр ψ принимает такие значения, что инерционная связь становится существенной, возникает устойчивый режим противофазной синхронизации с примерно равными амплитудами. Это подтверждает рис. 11, на котором построены области устойчивости синхронных режимов на плоскости параметров Δ, ρ в случае $\psi = 0.4\pi$. Видно, что появляется область противофазной синхронизации, которая локализована в области малых расстройк. Она в основном ограничена линией бифуркации Андронова–Хопфа AH_3 . Бифуркационный механизм появления и исчезновения режима противофазной синхронизации аналогичен описанному в [3] для связанных генераторов с мягким самовозбуждением, поэтому останавливаться подробно на его анализе мы не будем.

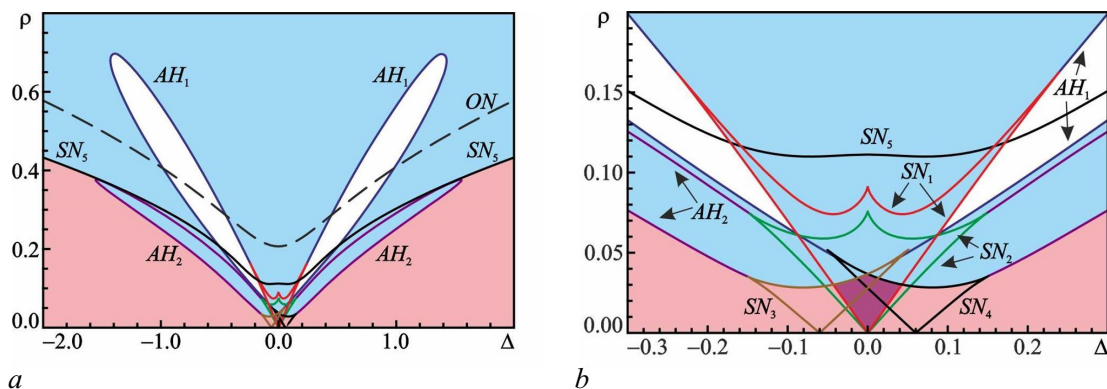


Рис. 9. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) и бифуркаций Андронова–Хопфа (AH) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ и $b = 0.1$ (*a*) и ее увеличенный фрагмент в области малых расстройк (*b*). Области устойчивости синхронных режимов закрашены различными цветами (цвет онлайн)

Fig. 9. Boundaries of saddle-node bifurcations (SN) and Andronov–Hopf bifurcations (AH) on the parameter plane Δ, ρ at $\sigma = -0.16$, $\psi = 0.2\pi$ and $b = 0.1$ (*a*) and its enlarged fragment in the domain of small mismatch (*b*). The stability domains of synchronous modes are shaded in different colors (color online)

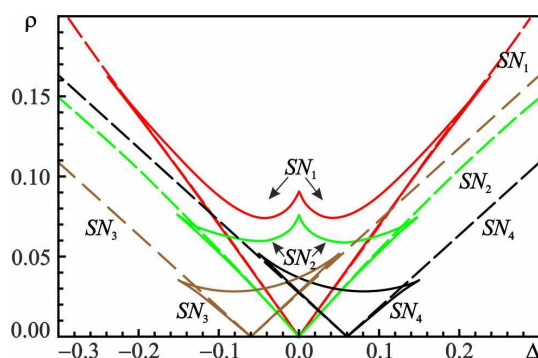


Рис. 10. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16, \psi = 0.2\pi$ и $b = 0.1$. Сплошными линиями показаны результаты бифуркационного анализа с помощью XPPAUT, штриховыми — результаты анализа в рамках фазового приближения [9] (цвет онлайн)

Fig. 10. Boundaries of saddle-node bifurcations (SN) on the parameter plane Δ, ρ at $\sigma = -0.16, \psi = 0.2\pi$ and $b = 0.1$. The results of bifurcation analysis with XPPAUT and analysis within the phase approximation [9] are plotted by solid and dashed lines, respectively (color online)

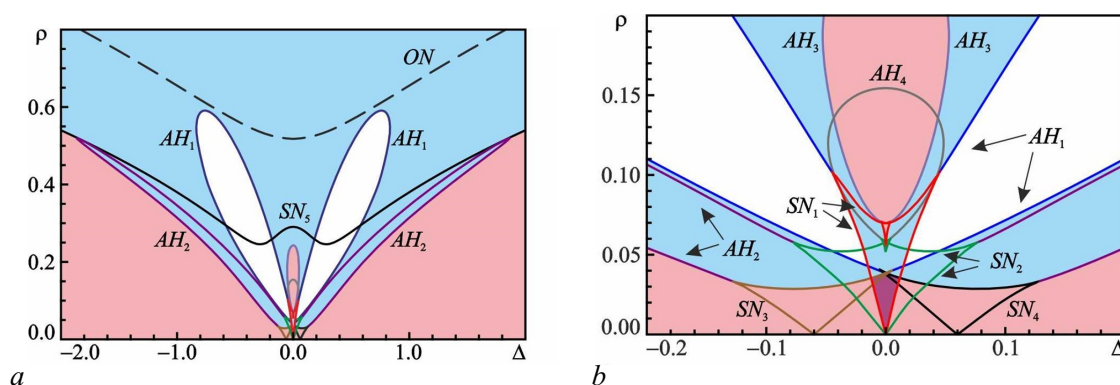


Рис. 11. Границы седлоузловых бифуркаций (SN) и бифуркаций Андронова–Хопфа (AH) на плоскости параметров Δ, ρ при $\sigma = -0.16, \psi = 0.4\pi$ и $b = 0.1$ (a) и ее увеличенный фрагмент в области малых расстройок (b). Области устойчивости синхронных режимов закрашены различными цветами (цвет онлайн)

Fig. 11. Boundaries of saddle-node bifurcations (SN) and Andronov–Hopf bifurcations (AH) on the parameter plane Δ, ρ for $\sigma = -0.16, \psi = 0.4\pi$, and $b = 0.1$ (a) and its enlarged fragment in the domain of small mismatch (b). The stability domains of synchronous modes are shaded in different colors (color online)

Заключение

В статье представлен анализ взаимной синхронизации системы двух генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой.

При слабой связи в фазовом пространстве имеется пять неподвижных точек, из которых три (две, отвечающие режимам с доминированием одного из генераторов, и точка O , отвечающая отсутствию колебаний) являются устойчивыми, а также четыре предельных цикла, один из которых является устойчивым. При увеличении связи на четырех упомянутых циклах происходят седлоузловые бифуркации, в результате чего число неподвижных точек увеличивается до 13, из которых 4 устойчивы.

Показано, что в случае малых расстройок и слабой связи наблюдается картина, хорошо согласующаяся с фазовым приближением [9]. С увеличением параметра связи неподвижные точки $U_{1,2}$, которые соответствуют режимам с доминированием одного из осцилляторов, сливаются с седловыми неподвижными точками S_{1-4} и исчезают.

При дальнейшем увеличении ρ происходит трансформация бассейна притяжения точки O , в результате которой, если в начальный момент времени колебания генераторов близки к противофазным, колебания затухают при любых начальных амплитудах. Это своеобразная разновидность эффекта гибели колебаний, которая обусловлена не увеличением эффективной диссипации, а изменением структуры бассейнов притяжения.

Показано, что с увеличением параметра связи точка O в начале координат теряет устойчивость, сталкиваясь с одной из седловых точек P_1 или P_2 . После этого единственным устойчивым режимом является режим взаимной синхронизации. Такое поведение обусловлено увеличением эффективной добротности колебательной системы. Таким образом, с практической точки зрения наиболее благоприятная ситуация реализуется в том случае, когда параметр превышает значение, при котором нулевое решение теряет устойчивость.

В случае больших расстройек устройство плоскости параметров во многом определяется поведением упомянутых выше предельных циклов. При слабой связи устойчивы два режима с доминированием одного из осцилляторов (точки $U_{1,2}$) и режим биений (предельный цикл C_+). С увеличением параметра связи цикл C_+ теряет устойчивость не в результате седлоузловой бифуркации, как в случае малых расстройек, а сливается с циклом C_{\mp} и исчезает. Что касается точек $U_{1,2}$, то одна из них либо сливается с одной из седловых точек $P_{1,2}$, либо теряет устойчивость в результате обратной (субкритической) бифуркации Андронова–Хопфа. Другая из этих точек остается устойчивой при любых значениях параметра связи, причем амплитуды колебаний обоих осцилляторов постепенно сравниваются, то есть режим колебаний с доминированием одного из осцилляторов постепенно трансформируется в режим синфазной синхронизации.

Список литературы

1. Zhang J., Zhang D., Fan Y., He J., Ge X., Zhang X., Ju J., Xun T. Progress in narrowband high-power microwave sources // *Physics of Plasmas*. 2020. Vol. 27, no. 1. P. 010501. DOI: 10.1063/1.5126271.
2. Usacheva S. A., Ryskin N. M. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling // *Chaos*. 2014. Vol. 24, no. 2. P. 023123. DOI: 10.1063/1.4881837.
3. Adilova A. B., Balakin M. I., Gerasimova S. A., Ryskin N. M. Bifurcation analysis of multistability of synchronous states in the system of two delay-coupled oscillators // *Chaos*. 2021. Vol. 31, no. 11. P. 113103. DOI: 10.1063/5.0065670.
4. Королев В. И., Постников Л. В. К теории синхронизации генератора автоколебаний. I // *Известия вузов. Радиофизика*. 1969. Т. 12, № 3. С. 406–414.
5. Кузнецов А. П., Милованов С. В. Синхронизация в системе с бифуркацией слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2003. Т. 11, № 4-5. С. 16–30. DOI: 10.18500/0869-6632-2003-11-4-16-30.
6. Милованов С. В. Синхронизация систем с сосуществующими устойчивым и неустойчивым предельными циклами и бифуркацией их слияния и исчезновения. Дисс. ... к.ф.-м.н. Саратов, СГУ, 2005. 209 с.
7. Yakunina K. A., Kuznetsov A. P., Ryskin N. M. Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode // *Physics of Plasmas*. 2015. Vol. 22, no. 11. P. 113107. DOI: 10.1063/1.4935847.
8. Григорьева Н. В., Рыскин Н. М. Исследование синхронизации гиротрона в режиме жёсткого возбуждения на основе модифицированной квазилинейной модели // *Известия вузов. Радиофизика*. 2022. Т. 65, № 5/6. С. 406–419. DOI: 10.52452/00213462_2022_65_05_406.
9. Адилова А. Б., Рыскин Н. М. Синхронизация генераторов с жестким возбуждением, связанных с задержкой. Часть 1. Фазовое приближение // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2024. Т. 32, № 1. С. 42–56. DOI: 10.18500/0869-6632-003080.
10. Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005. 292 с.

11. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
12. *Izhikevich E. M.* Phase models with explicit time delays // *Physical Review E*. 1998. Vol. 58, no. 1. P. 905–908. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.905.
13. Глызин С. Д. Динамические свойства простейших конечноразностных аппроксимаций краевой задачи «реакция-диффузия» // *Дифференциальные уравнения*. 1997. Т. 33, № 6. С. 805–811.
14. *Jessop M. R., Li W., Armour A. D.* Phase synchronization in coupled bistable oscillators // *Physical Review Research*. 2020. Vol. 2, no. 1. P. 013233. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.013233.
15. *Burić N., Grozdanović I., Vasović N.* Excitable systems with internal and coupling delays // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008. Vol. 36, no. 4. P. 853–861. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.09.061.
16. Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий // *Математический сборник*. 1963. Т. 61(103), № 4. С. 443–466.
17. <http://www.math.pitt.edu/bard/xpp/xpp.html>.
18. Перегородова Е. Н., Рыскин Н. М., Усачева С. А. Синхронизация системы двух конкурирующих мод внешним гармоническим сигналом // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2011. Т. 19, № 3. С. 154–170. DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-3-154-170.
19. Кузнецов А. П., Емельянова Ю. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В. Синхронизация в задачах. Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. 256 с.

References

1. Zhang J, Zhang D, Fan Y, He J, Ge X, Zhang X, Ju J, Xun T. Progress in narrowband high-power microwave sources. *Physics of Plasmas*. 2020;27(1):010501. DOI: 10.1063/1.5126271.
2. Usacheva SA, Ryskin NM. Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling. *Chaos*. 2014;24(2):023123. DOI: 10.1063/1.4881837.
3. Adilova AB, Balakin MI, Gerasimova SA, Ryskin NM. Bifurcation analysis of multistability of synchronous states in the system of two delay-coupled oscillators. *Chaos*. 2021;31(11):113103. DOI: 10.1063/5.0065670.
4. Korolev VI, Postnikov LV. To the synchronization theory of the auto oscillator generator. I. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1969;12:323–330. DOI: 10.1007/BF01030321.
5. Kuznetsov AP, Milovanov SV. Synchronization in a system with bifurcation of merging stable and unstable limit cycles. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2003;11(4-5):16–30. DOI: 10.18500/0869-6632-2003-11-4-16-30.
6. Milovanov SV. Synchronization of systems with coexisting stable and unstable limit cycles and the bifurcation of their merger and disappearance. PhD Thesis. Saratov, SSU, 2005. 209 p. (in Russian).
7. Yakunina KA, Kuznetsov AP, Ryskin NM. Injection locking of an electronic maser in the hard excitation mode. *Physics of Plasmas*. 2015;22(11):113107. DOI: 10.1063/1.4935847.
8. Grigorieva NV, Ryskin NM. A Study of Gyrotron Synchronization in the Hard-Excitation Regime on the Basis of the Modified Quasilinear Model. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2022;65:371–383. DOI: 10.1007/s11141-023-10220-8.
9. Adilova AB, Ryskin NM. Synchronization of oscillators with hard excitation coupled with delay Part 1. Phase approximation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(1):42–56. DOI: 10.18500/0869-6632-003080.
10. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Ryskin NM. *Nonlinear Oscillations*. M.: Fizmatlit, 2005. 292 p. (in Russian).
11. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743.

12. Izhikevich EM. Phase models with explicit time delays. *Physical Review E*. 1998;58(1):905–908. DOI: 10.1103/PhysRevE.58.905.
13. Glyzin SD. Dynamical properties of the simplest finite-difference approximations of the “reaction-diffusion” boundary value problem // *Differential Equations*. 1997;33(6):808–814.
14. Jessop MR, Li W, Armour AD. Phase synchronization in coupled bistable oscillators. *Physical Review Research*. 2020;2(1):013233. DOI: 10.1103/PhysRevResearch.2.013233.
15. Burić N, Grozdanović I, Vasović N. Excitable systems with internal and coupling delays. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2008;36(4):853–861. DOI: 10.1016/j.chaos.2006.09.061.
16. Shilnikov L. P. About some cases of birth of periodic motions from special trajectories. *Sbornik: Mathematics*. 1963;61(4):443–466 (in Russian).
17. <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>
18. Peregorodova EN, Ryskin NM, Usacheva SA. Synchronization of the system of two competing modes by external harmonic signal. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2011;19(3): 154–170. (in Russian) DOI: 10.18500/0869-6632-2011-19-3-154-170
19. Kuznetsov AP, Emelyanova YP, Sataev IR, Turukina LV. *Challenges in synchronization*. Saratov: Nauka, 2010 (in Russian).



Адилова Асель Булатовна — окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2015). Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (2021). С 2015 года работает в Саратовском государственном университете. В настоящее время — доцент кафедры физики открытых систем Института физики СГУ. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, вакуумная СВЧ-электроника.

Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: AdilovaAB@gmail.com
 ORCID: 0000-0002-4079-4488
 AuthorID (eLibrary.Ru): 848993



Рыскин Никита Михайлович — окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1991). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата (1996) и доктора физико-математических наук (2005). Главный научный сотрудник, заведующий лабораторией Саратовского филиала ИРЭ РАН. Заведующий кафедрой динамических систем СГУ на базе СФ ИРЭ РАН. Область научных интересов: нелинейная теория колебаний и волн, приборы вакуумной электроники ТГц-диапазона, вакуумная микроэлектроника. Имеет более 200 научных публикаций по указанным выше направлениям.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зелёная, 38
 Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
 Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
 Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского
 E-mail: ryskinm@info.sgu.ru
 ORCID: 0000-0001-8501-6658
 AuthorID (eLibrary.Ru): 29838