



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 5  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(5)

Научная статья  
УДК 51.77

DOI: 10.18500/0869-6632-003123  
EDN: ZYQCCL

## Моделирование конкуренции языков в двуязычном сообществе\*

А. В. Медведев<sup>✉</sup>, О. А. Кузенков

Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Россия  
E-mail: ✉a.medvedev.unn@gmail.com, kuzenkov\_o@mail.ru

Поступила в редакцию 29.11.2023, принята к публикации 10.05.2024,  
опубликована онлайн 11.09.2024, опубликована 30.09.2024

**Аннотация.** Цель настоящего исследования — построение и исследование новой математической модели динамики численности носителей языков в двуязычном сообществе, которая учитывает: эффект взаимопомощи внутри группы носителей одного языка, эффект освоения языков детьми в раннем возрасте, различную престижность языков для их носителей. **Методы.** Строится новая модель, учитывающая новые эффекты. Модель исследуется классическими методами качественной теории динамических систем при неограниченном увеличении времени динамики. Проводится сравнение эффекта взаимопомощи с эффектом языковой волатильности Абрамса и Строгатти. На основании наблюдаемых статистических данных методом регрессии определяются параметры некоторых языков Англии и Канады. Для моделирования языковой динамики при помощи новой модели использованы реальные статистические данные по языковым парам: валлийско-английской, шотландско-английской, франко-английской. Строится прогноз для дальнейшей динамики. **Результаты.** Установлен эффект долгосрочного сосуществования двух языков в сообществе, а также определены характеристики языков, при которых этот эффект возможен: большим значениям параметров взаимопомощи соответствует такая языковая динамика, при которой один язык вытесняет второй; при низких значениях взаимопомощи языки сосуществуют. Построен прогноз дальнейшего развития динамики по языкам. **Заключение.** Общие понятия языковой динамики дополнены новой характеристикой языков — сила взаимопомощи внутри группы носителей одного языка. Отмечена схожесть эффекта языковой волатильности и эффекта взаимопомощи.

**Ключевые слова:** исчезновение языков, эффект взаимопомощи, языковая волатильность, билингвизм, языковая конкуренция, языковая динамика, сохранение языка, математическая модель, обыкновенные дифференциальные уравнения.

**Для цитирования:** Медведев А. В., Кузенков О. А. Моделирование конкуренции языков в двуязычном сообществе // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 5. С. 691–708. DOI: 10.18500/0869-6632-003123. EDN: ZYQCCL

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

\* Работа публикуется по материалам доклада, сделанного на конференции «Нелинейная динамика в когнитивных исследованиях — 2023».

## Modeling language competition in a bilingual community\*

A. V. Medvedev<sup>✉</sup>, O. A. Kuzenkov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉a.medvedev.unn@gmail.com, kuzenkov\_o@mail.ru

Received 29.11.2023, accepted 10.05.2024, available online 11.09.2024, published 30.09.2024

**Abstract.** The *purpose* of this study — construction and research of a new mathematical model of a bilingual community, which takes into account: the effect of mutual assistance within a group of speakers of the same language, the effect of language acquisition by children of bilingual parents at an early age, different prestige of languages for adults. *Methods.* A new model is being built that takes into account new effects. The model is studied using classical methods with an unlimited increase in dynamics time. The effect of mutual assistance is compared with the effect of language volatility introduced by Abrams and Strogatti. Based on the observed statistical data, using the regression method, the parameters of some languages of England and Canada are determined: Welsh, Scottish, English, French. A forecast is being made for the further development of dynamics. *Results.* The effects taken into account in the model are confirmed by the correspondence of the development of language dynamics to the characteristics of the language: large values of the parameters of mutual assistance correspond to such a development of language dynamics in which one language displaces the second; at low values of mutual assistance, languages coexist. To model language dynamics using the new model, real statistical data on language pairs is used: Welsh-English, Scots-English, French-English. A forecast is being made for the further development of dynamics by language. *Conclusion.* General concepts in language dynamics have been supplemented with new ones — the power of mutual assistance within a group of speakers of the same language. The similarity between the effect of language volatility and the effect of mutual assistance is noted.

**Keywords:** extinction of languages, mutual aid effect, language volatility, bilingualism, language competition, language dynamics, language preservation, mathematical model, ordinary differential equations.

**For citation:** Medvedev AV, Kuzenkov OA. Modeling language competition in a bilingual community. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(5):691–708. DOI: 10.18500/0869-6632-003123

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

В настоящее время очень остро стоит проблема исчезновения языков. Она исследуется различными методами, в том числе и при помощи математического моделирования [1–7]. Одними из первых в математическом моделировании языковой динамики были Абрамс и Строгатти [1]. Их модель позволяет объяснить исторические данные об упадках валлийского, шотландского и других исчезающих языков. Модель Абрамса–Строгатти (AS) предполагает, что любой член рассматриваемого сообщества, вне зависимости от того, какими языками он владеет, в текущий момент времени отдаёт предпочтение лишь одному из двух. Она также предполагает, что родившиеся дети изучают и используют язык, которому их родители отдают предпочтение, поэтому смена поколений не влияет на доли носителей языков в обществе. Абрамс и Строгатти ввели понятия престижности языка и языковой волатильности как готовности носителей языка к его смене. Количество членов сообщества предполагалось постоянным. Модель AS показала, что один язык при сделанных предположениях всегда вытесняется другим с течением времени. Последнее в модели языковой динамики AS было названо языковой смертью [1]. В 2005 году появилась модель Мира и Передес [2]. В этой модели была введена новая характеристика — языковое сходство. Данная модель показала, что если языки очень похожи, то они могут сосуществовать вместе продолжительное время.

В 2006 году появилась модель Кастелло [3]. Её автор ввёл новую группу двуязычных индивидов — билингвы, и показал возможности устойчивого сосуществования двух языков

\*The paper presents materials of a talk given at the conference “Nonlinear dynamics in cognitive research — 2023”.

в сообществе. Модель взаимодействия между одноязычным и двуязычным населением Бэггса и Фридмана [4, 5] продемонстрировала возможности развития динамики, при которых языковые группы могут сосуществовать или вытеснять друг друга. Уайберн и Хейворд в своей модели продемонстрировали важность стабильной двуязычной группы для сосуществования двух языков [6]. Диаз и Швидке ввели новое понятие — статус языка [7].

Абрамс и Строгатти обоснованно полагали, что ребёнок будет владеть языком своих родителей, и в последующем эта гипотеза была сохранена в новых моделях, включая модели с билингвами. Но идея о том, что дети билингов, как и их родители, осваивают два языка, не совсем точна. Ребёнок, растущий в двуязычной среде, может в какой-то мере освоить два языка, но за ненадобностью один из них может быть утрачен [8, 9]. Отмечен эффект, при котором дети двуязычных родителей сперва осваивают первый или второй язык с разными степенями вероятности и только после, предположительно во взрослом возрасте, с некоторой вероятностью изучают второй язык, а дети, чьи родители говорят лишь на одном языке, сперва осваивают язык родителей, а второй язык осваивают с некоторой вероятностью. То есть освоение двух языков детьми происходит последовательно [8, 10].

Стоит отметить, что в начальной модели AS показатель языковой волатильности отсутствовал. Он был добавлен авторами для лучшего согласования динамики модели с динамикой, наблюдаемой в реальности. Мы предполагаем, что на динамику оказывают влияние также и другие эффекты, например, эффект взаимопомощи в соответствующей языковой группе. Взаимопомощь внутри группы носителей одного языка напрямую влияет на привлекательность второго языка для них. Таким образом, если взаимопомощь высокая, то носителя данного языка ничто не стимулирует к его смене, и наоборот. В связи с этим мы дополняем общие понятия языковой динамики новыми характеристиками: вероятность освоения языка детьми в раннем возрасте, вероятность освоения второго языка взрослыми и сила взаимопомощи внутри группы одного языка. В исследованиях были предприняты первые попытки учесть эффект освоения языков детьми в раннем возрасте [11, 12], но этот эффект рассмотрен без учёта различной вероятности освоения второго языка взрослыми. Получившиеся модели описывают ситуации, при которых существует устойчивое двуязычие или сохраняется лишь один из двух языков. В настоящем исследовании мы изучаем модель, учитывающую все описанные эффекты. Это может привести к появлению новых качественных особенностей в поведении модели.

Цель настоящего исследования — построение и исследование новой модели двуязычного сообщества, которая учитывает: эффект взаимопомощи внутри групп одного языка; эффект освоения языков детьми двуязычных родителей в раннем возрасте, учитывающий различные вероятности для освоения второго языка; различную престижность языка для носителей.

## 1. Методика

**1.1. Модель двуязычного сообщества.** Примем следующие гипотезы для построения модели:

- члены сообщества могут владеть одним из двух языков, условно называемых «первый» и «второй», или двумя сразу;  $z_1$  — доля членов сообщества, владеющих только первым языком,  $z_2$  — доля членов сообщества, владеющих только вторым языком,  $z_{12}$  — доля членов сообщества, владеющих двумя языками (билингвы);
- доля индивидов, не владеющих ни одним языком пренебрежимо мала;
- численность любой языковой группы неотрицательна:  $0 \leq z_1, z_2, z_{12} \leq 1$ ;
- численность сообщества постоянна во времени (число рождений равно числу смертей),  $z_1 + z_2 + z_{12} = 1$ ;
- коэффициент  $r$  одновременно характеризует и рождаемость, и смертность;

- вероятность одновременного (самопроизвольного) освоения двух языков ребёнком пренебрежимо мала;
- дети билингвов первоначально осваивают первый или второй язык с вероятностями  $c_1$  и  $c_2$  соответственно;  $c_1 + c_2 = 1$ , предполагается, что  $c_1 > c_2$  [8, 9];
- внутри языковых групп присутствует эффект взаимопомощи, который определяется коэффициентами:  $\alpha$ -для носителей первого языка и  $\beta$ -для носителей второго языка;
- сила эффекта взаимопомощи имеет линейную зависимость с обратным знаком от числа доли носителей языка: при доле численности носителей языка, близкой к нулю, сила эффекта близка к своему максимуму; при доле численности, близкой к единице, сила эффекта близка к нулю;
- престижность, введённая Абрамсом и Строгатти, определяется коэффициентами  $b_1$  и  $b_2$  для первого и второго языков соответственно;
- при встрече носителей разных языков (частота которых прямо пропорциональна произведению долей их численностей) возможна смена языка с коэффициентами  $b_{1,2}$  для первого и второго языков соответственно;
- предполагается возможным обучение одноязычных членов сообщества второму языку билингвами [3];
- принцип взаимодействия носителей языков в сообществе друг с другом обобщает известную гипотезу эффективных встреч [13].

Учитывая принятые гипотезы, получаем, что динамика носителей языков в обществе характеризуется следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1 r z_{12} - b_1 z_1 (z_2 + z_{12}) + \alpha z_1^2 (1 - z_1), \\ \dot{z}_2 = c_2 r z_{12} - b_2 z_2 (z_1 + z_{12}) + \beta z_2^2 (1 - z_2), \\ \dot{z}_{12} = z_1 (b_1 - \alpha z_1) (z_2 + z_{12}) + z_2 (b_2 - \beta z_2) (z_1 + z_{12}) - r z_{12}, \end{cases} \quad (1)$$

Начальные значения долей численности носителей языков не могут быть отрицательными, исходя из понимания смысла этих значений. Доказана справедливость утверждения о том, что для неотрицательности решений по всем фазовым координатам, при неотрицательных начальных условиях, необходимо и достаточно выполнение следующего требования: при занулении любой фазовой координаты правая часть соответствующего уравнения модели (1) должна быть неотрицательной (эти условия называются условиями квазиположительности [14]). Для данной системы эти условия выполняются. Сохранение постоянной суммы фазовых координат обеспечивается тем, что сумма всех уравнений системы тождественно равна нулю:  $\dot{z}_1 + \dot{z}_2 + \dot{z}_{12} = 0$ . Для системы (1) это условие также выполняется. Поскольку в начальный момент  $z_1 + z_2 + z_{12} = 1$ , то это равенство будет сохраняться во все последующие моменты времени. В работе [1] путем изучения статистических данных были установлены приблизительные значения параметров:  $\alpha, \beta = 1.31 \pm 0.25$ . Исходя из этого, настоящее исследование проводится для следующих реалистичных границ изменения указанных параметров:  $\alpha, \beta = 1.5 \pm 0.5$ .

## 2. Результаты

**2.1. Исследование модели.** Фазовым пространством системы (1) является трёхмерный стандартный симплекс [14]. Путём проектирования, выразив  $z_{12}$  через  $z_1$  и  $z_2$ , данную модель можно привести к системе на плоскости

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1 r (1 - z_1 - z_2) - b_1 z_1 + (\alpha + b_1) z_1^2 - \alpha z_1^3, \\ \dot{z}_2 = c_2 r (1 - z_1 - z_2) - b_2 z_2 + (\beta + b_2) z_2^2 - \beta z_2^3, \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку  $z_{12} \geq 0$ , то для модели (2) справедливо неравенство  $z_1 + z_2 \leq 1$ . Проверим выполнение условий квазиположительности для модели (2). Пусть  $z_1 = 0$ , тогда  $\dot{z}_1 = c_1 r (1 - z_2)$ , а поскольку  $0 \leq z_2 \leq 1$ , то  $\dot{z}_1 \geq 0$ . Пусть  $z_2 = 0$ , тогда  $\dot{z}_2 = c_2 r (1 - z_1)$ , а так как  $0 \leq z_1 \leq 1$ , то  $\dot{z}_2 \geq 0$ .

Система (2) была исследована стандартными качественными методами. Фазовые портреты системы (2) для различных параметров языков приведены на (рис. 1). Красными точками помечены устойчивые состояния равновесия, а красными квадратами неустойчивые. Кривыми синего и зелёного цвета изображены изоклины горизонтального и вертикального наклонов соответственно. Число пересечений изоклин друг с другом определяет количество и характер точек равновесия, а также возможные бифуркации. Подробное рассмотрение бифуркаций приведено в разделе 2.2. Состояния №1 и №2, в зависимости от параметров, являются либо устойчивыми узлами, либо неустойчивыми по типу седло, и всегда находятся на границе фазового пространства в точках  $(0, 1)$  и  $(1, 0)$  (см. рис. 1). Устойчивость данных состояний была определена методом Ляпунова путём определения собственных чисел. Получено неравенство  $\alpha > b_1$ , при выполнении которого точка  $(1, 0)$  является устойчивым узлом, в противном случае она является неустойчивой по типу седло. Получено неравенство  $\beta > b_2$ , при котором точка  $(0, 1)$  является устойчивым узлом, в противном случае она является неустойчивой по типу седло. Учитывая это, можно гарантированно утверждать о сосуществовании языков при одновременном выполнении условий  $\alpha < b_1, \beta < b_2$ . Оставшиеся состояния равновесия находятся внутри области, определяемой следующими ограничениями:

$$\begin{cases} 0 \leq z_1, z_2 \leq 1, \\ z_1 + z_2 \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Их координаты определялись через поиск точек пересечения изоклин вертикального и горизонтального наклона. Данная задача решалась при помощи программного комплекса WolframAlpha.

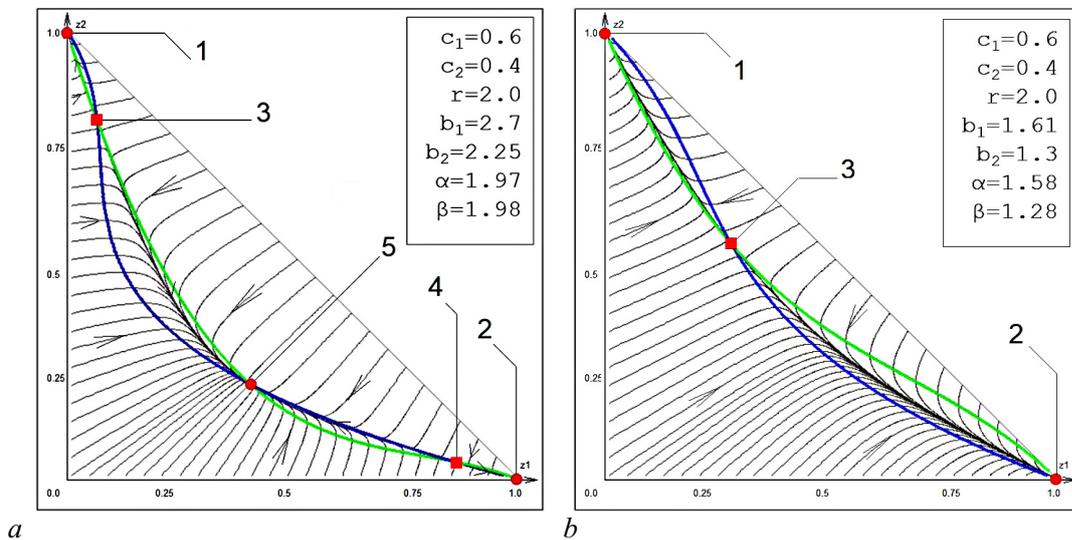


Рис. 1. Фазовые портреты модели (2):  $a$  – сосуществование двух языков и билингвов,  $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 < 0$ ;  $b$  – вытеснение одного языка другим,  $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 > 0$ ; синяя кривая – изоклина горизонтального наклона; зелёная кривая – изоклина вертикального наклона (цвет онлайн)

Fig. 1. Phase plane for model (2):  $a$  – coexistence of two languages and bilinguals,  $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 < 0$ ;  $b$  – displacement of one language by another,  $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 > 0$ ; blue curve – isocline of horizontal slope; green curve – is the isocline of the vertical slope (color online)

Вычисления показали, что система (2) может иметь 2–5 состояний равновесия. Характер равновесия остальных состояний определялся путём численного построения фазового портрета: №3 и №4 являются неустойчивыми по типу седло, а состояния №1, №2 и №5 – устойчивые по типу узел (см. рис. 1). Для построения фазового портрета использовался следующий диапазон параметров:  $0.0 \leq c_1, c_2 \leq 1.0$ ;  $1.0 \leq r, b_1, b_2 \leq 9.0$ ;  $0.5 \leq \alpha, \beta \leq 2.5$ ; шаг сетки  $\text{step} = 0.005$ . Качественное исследование системы (2) показывает два возможных варианта динамики: выживание только одного языка или их сосуществование. Численно были получены оценки параметров, гарантирующих реализацию для первого случая  $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 > 0$ , для второго случая  $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 < 0$ .

**2.2. Влияние различных значений коэффициентов взаимопомощи на языковую динамику.** Рассмотрим вариант параметров модели (2), когда в сообществе гарантированно сохраняется билингвизм  $\alpha < b_1, \beta < b_2$ , при этом также верны и оценочные параметры  $r - 0.873 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}])^3 < 0$ . На первом этапе рассмотрения параметры двух конкурирующих языков выберем равными:  $c_1 = c_2, b_1 = b_2, \alpha = \beta$ . Для рассмотрения возможных бифуркаций в системе параметры взаимопомощи будем увеличивать, начиная с  $\beta$ . Если параметр взаимопомощи достаточно мал, то языковая динамика будет развиваться таким образом, что устойчивое сосуществование языков будет возможно при любых начальных значениях долей численности языков. Это хорошо видно по бассейну притяжения устойчивого состояния №5 на фазовой плоскости (рис. 2, а), которое находится в середине области (3). Границы бассейна притяжения состояния №5 определялись численно. Состояния №1 и №2 являются неустойчивыми. Увеличение параметра взаимопомощи для второго языка  $\beta$  приведёт к выполнению неравенства  $\beta \geq b_2$ , при этом в результате седло-узловой бифуркации неустойчивое состояние №1 распадётся на два новых состояния: №1 – устойчивый узел и №3 – неустойчивое по типу седло.

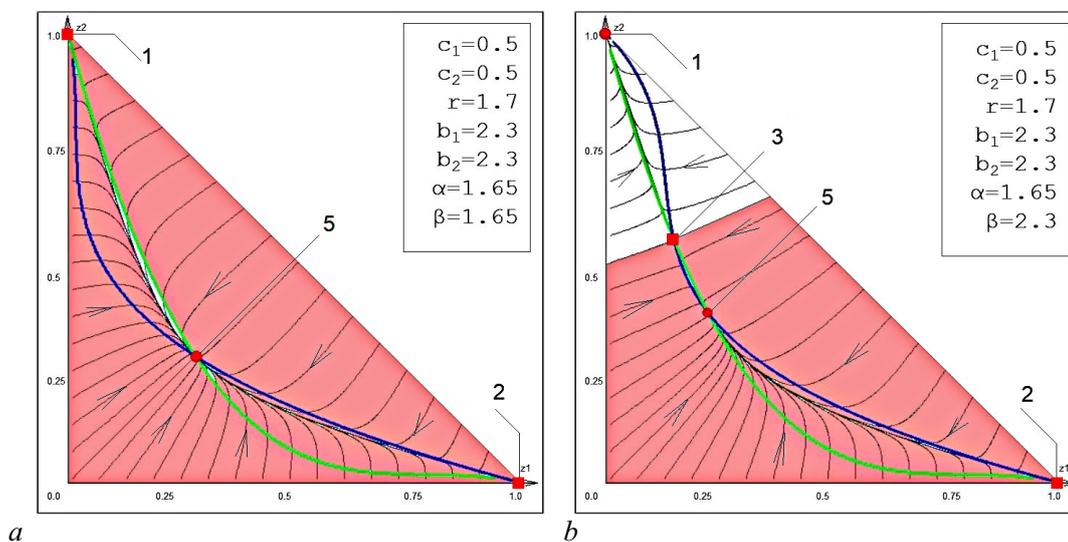


Рис. 2. Бассейн притяжения устойчивого состояния №5 модели (2): красным помечена область начальных состояний в которой два языка и билингвы сосуществуют; синяя кривая – изоклина горизонтального наклона; зелёная кривая – изоклина вертикального наклона; а – параметры взаимопомощи языков:  $\alpha < b_1, \beta < b_2$ ; б – параметры взаимопомощи языков:  $\alpha < b_1, \beta \geq b_2$  (цвет онлайн)

Fig. 2. Steady State attraction pool No. 5 and No. 6 models (2): the are a in which two languages and bilinguals coexist is marked in red; blue curve – isocline of horizontal slope; green curve – is the isocline of the vertical slope; a – language mutual aid parameters:  $\alpha < b_1, \beta < b_2$ ; b – language mutual aid parameters:  $\alpha < b_1, \beta \geq b_2$  (color online)

Бассейн притяжения устойчивого состояния №5, динамика траекторий которого соответствует сосуществованию языков, сократится (см. рис. 2, b). Увеличение параметра взаимопомощи для первого языка  $\alpha$  приведёт к аналогичным изменениям в фазовом портрете для противоположного угла области (3) — неустойчивый узел в точке (1, 0) в результате седло-узловой бифуркации превратится в два новых состояния: №2 — устойчивый узел, №4 — неустойчивое по типу седло (рис. 3, a).

Дальнейшее увеличение параметра взаимопомощи  $\beta$  приведёт к тому, что бассейн притяжения устойчивого состояния №5, при котором языки сосуществуют, будет сокращаться со стороны оси  $z_2$ , а состояние равновесия №3 — седло — будет приближаться к состоянию равновесия №5 — устойчивый узел. Продолжая увеличение параметра  $\beta$ , мы получим такие изменения в фазовом портрете системы, при которых состояние №3 и №5 в результате седло-узловой бифуркации сольются в одно состояние №6 по типу седло-узел (см. рис. 3, b). Изоклины вертикального и горизонтального наклона при этом будут касаться друг друга. Данная ситуация является негрубой и при дальнейшем увеличении параметра  $\beta$  произойдёт исчезновение состояния равновесия №6 (рис. 4, a). Сосуществование языков станет невозможным, и один язык всегда будет вытеснять второй. Динамика модели в окрестности состояния равновесия №6 ведёт себя таким образом, что численность носителей первого языка сокращается. Если соотношение первого и второго языка выше определённого уровня, то с течением времени устанавливается фиксированная пропорция на этом уровне между билингвами и носителями двух языков. Но если их соотношение ниже этого уровня, то первый язык с течением времени утрачивается. Если в системе, изображённой на (см. рис. 3, b), параметр  $\beta$  зафиксировать и начать увеличивать параметр  $\alpha$ , то состояние равновесия №4 (седло) начнёт смещаться в сторону состояния равновесия №6 (седло-узел) и в результате седло-узловой бифуркации сольётся с ним в состояние №7 (седло). Это также приведёт

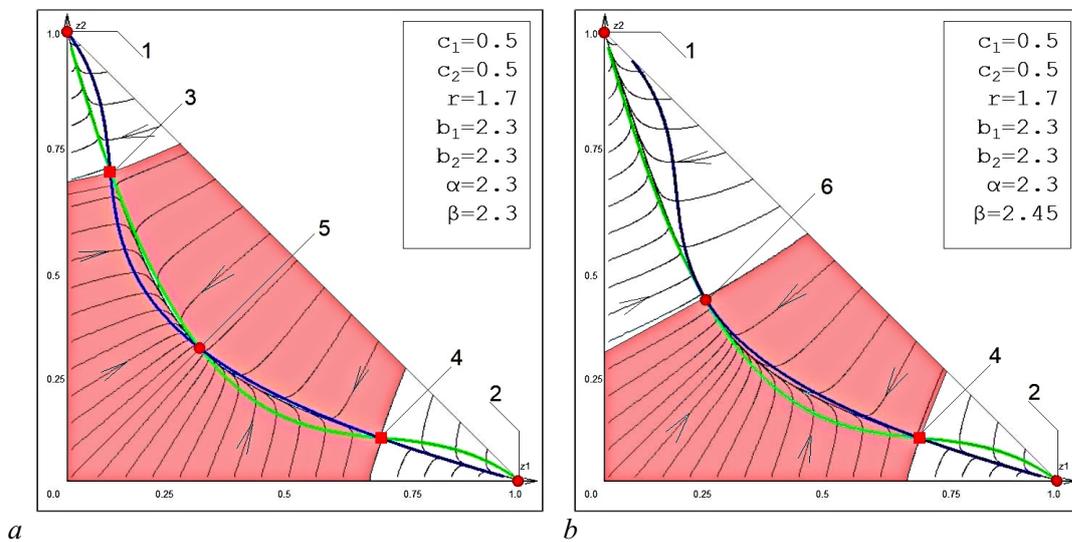


Рис. 3. Бассейн притяжения устойчивого состояния №5 и №6 модели (2): красным помечена область начальных состояний, в которой два языка и билингвы сосуществуют; синяя кривая — изоклина горизонтального наклона; зелёная кривая — изоклина вертикального наклона; а — параметры взаимопомощи языков:  $\alpha \geq b_1, \beta \geq b_2$ ; б — параметры взаимопомощи языков:  $\alpha \geq b_1, \beta > b_2$  (цвет онлайн)

Fig. 3. Pools of attraction for equilibrium states of the model (2): the are a in which two languages and bilinguals coexist is marked in red; blue curve — isocline of horizontal slope; green curve — is the isocline of the vertical slope; a — language mutual aid parameters:  $\alpha \geq b_1, \beta \geq b_2$ ; b — language mutual aid parameters:  $\alpha \geq b_1, \beta > b_2$  (color online)

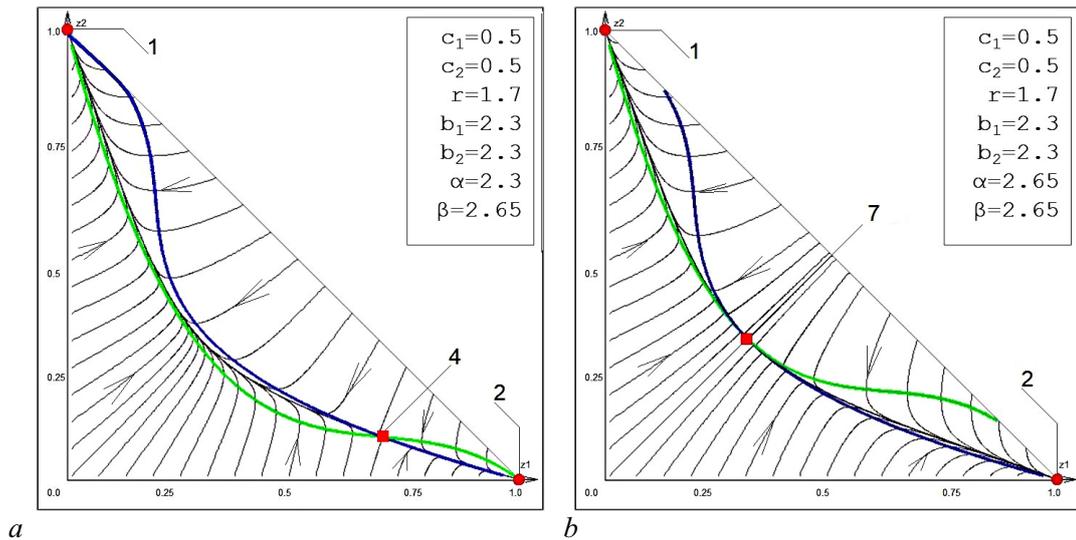


Рис. 4. Фазовые траектории модели (2): случай вытеснения одного языка другим; *синяя кривая* — изоклина горизонтального наклона; *зелёная кривая* — изоклина вертикального наклона; *a* — параметры взаимопомощи языков:  $\alpha \geq b_1, \beta > b_2$ ; *b* — параметры взаимопомощи языков:  $\alpha > b_1, \beta > b_2$  (цвет онлайн)

Fig. 4. Phase trajectories of the model (2): case of one language being replaced by another; *blue curve* — isocline of horizontal slope; *green curve* — is the isocline of the vertical slope; *a* — language mutual aid parameters:  $\alpha \geq b_1, \beta > b_2$ ; *b* — language mutual aid parameters:  $\alpha > b_1, \beta > b_2$  (color online)

систему к случаю, в котором сосуществование языков невозможно. Увеличение коэффициентов взаимопомощи приводит к тому, что в середине фазовой плоскости остаётся одно неустойчивое состояние равновесия по типу седло, а динамика системы соответствует второму случаю — вытеснение одного языка другим (см. рис. 4, *b*). Получается, что при увеличении коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  эффект взаимопомощи внутри групп одного языка набирает силу и начинает действовать таким образом, что билингвизм становится невозможным. На основе данного анализа динамики системы можно утверждать, что взаимопомощь внутри группы препятствует образованию билингвизма и способствует доминированию языка в рассматриваемом сообществе.

**2.3. Модель с эффектом языковой волатильности Абрамса и Стругатти.** Для сравнения двух моделей с различными эффектами (взаимопомощи и языковой волатильности) рассмотрим модель на основе классических уравнений языковой волатильности. Учитывая гипотезы принятые для построения модели (1) и заменив гипотезу о взаимопомощи на гипотезу языковой волатильности, используемую в модели AS, получим, что динамика носителей языков в обществе определяется следующей системой:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1 r z_{12} - b_1 z_1 (z_2 + z_{12})^\alpha, \\ \dot{z}_2 = c_2 r z_{12} - b_2 z_2 (z_1 + z_{12})^\beta, \\ \dot{z}_{12} = b_1 z_1 (z_2 + z_{12})^\alpha + b_2 z_2 (z_1 + z_{12})^\beta - r z_{12}. \end{cases} \quad (4)$$

Фазовым пространством для (4) является трёхмерный единичный симплекс. Фазовые портреты для различных параметров языков системы (4) приведены на рис. 5. Состояния равновесия №1 и №2, в зависимости от параметров, являются либо устойчивыми узлами, либо неустойчивыми по типу седло, и всегда находятся на границе симплекса в точках (0, 1) и (1, 0). Их устойчивость была исследована методом Ляпунова. Через поиск собственных чисел было установлено,

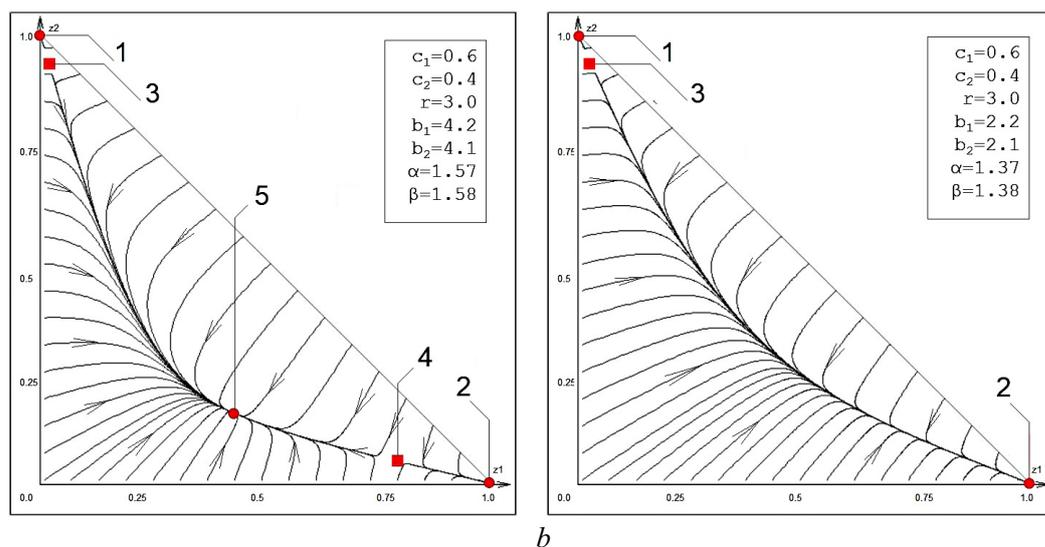


Рис. 5. Фазовые портреты модели (4): *a* – сосуществование двух языков и билингвов,  $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) > 0$ ; *b* – вытеснение одного языка другим,  $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) < 0$  (цвет онлайн)

Fig. 5. Phase plane for model (4): *a* – coexistence of two languages and bilinguals,  $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) > 0$ ; *b* – displacement of one language by another,  $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) < 0$  (color online)

что при  $\frac{\alpha}{2} \geq b_1$  точка  $(1, 0)$  является устойчивым узлом, в противном случае она является неустойчивой по типу седло, а при  $\frac{\beta}{2} \geq b_2$  точка  $(0, 1)$  является устойчивым узлом, в противном случае она является неустойчивой по типу седло. Учитывая это, можно гарантированно утверждать о сосуществовании языков при одновременном выполнении условий  $\frac{\alpha}{2} \geq b_1, \frac{\beta}{2} \geq b_2$ . Оставшиеся состояния равновесия находятся внутри симплекса, их первые координаты определяются уравнением, имеющим следующий вид:

$$1 - \left(1 - z_1 \left(1 + \frac{b_1}{c_1 r} (1 - z_1)^\alpha\right) \left(1 + \frac{b_2}{c_2 r} \left(1 - \left(1 - z_1 \left(1 + \frac{b_1}{c_1 r} (1 - z_1)^\alpha\right)\right)^\beta\right)\right)\right) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) решалось численно для всевозможных значений параметров. Ограничения на параметры  $b_{1,2}, c_{1,2}$  определяются данными, наблюдаемыми в реальности. Ограничения на параметры волатильности  $\alpha, \beta = 1.31 \pm 0.25$  введены Абрамсом и Строгатти [1]. В результате было установлено, что корней уравнения на отрезке  $[0, 1]$  может быть от 2 до 5. Всегда имеются два корня 1 и 0. Определены уравнения изоклин вертикального и горизонтального наклона:

$$\text{Ver} : z_2 = 1 - z_1 - \frac{b_1}{c_1 r} z_1 (1 - z_1)^\alpha, \quad \text{Hor} : z_1 = 1 - z_2 - \frac{b_2}{c_2 r} z_2 (1 - z_2)^\beta. \quad (6)$$

Состояния №3, №4 и №5 определялись численно как точки пересечения изоклин вертикального и горизонтального наклона, а характер их равновесия определялся путём численного построения фазового портрета. Для (рис. 5) состояния равновесия имеют следующий тип: №1, №2 и №5 – устойчивое по типу узел, №3 и №4 – неустойчивые по типу седло. Для построения фазового портрета использовался следующий диапазон параметров:  $0.0 \leq c_1, c_2 \leq 1.0$ ;  $1.0 \leq r, b_1, b_2 \leq 9.0$ ;  $0.5 \leq \alpha, \beta \leq 2.5$ ; шаг сетки  $\text{step} = 0.005$ . Качественное исследование модели (4) показало, что при выполнении хотя бы одного из неравенств  $\frac{\alpha}{2} \geq b_1$  и  $\frac{\beta}{2} \geq b_2$  сосуществование языков определяется наличием устойчивых состояний внутри симплекса. Численно были получены оценки параметров, гарантирующих реализацию для первого случая  $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) \geq 0$ , для второго

случая  $r - 1.1125 - (\min[\frac{b_1}{\alpha}, \frac{b_2}{\beta}]) < 0$ . Динамика по двум моделям почти совпадает, сравнение фазовых портретов для (4) и (1) выявило их близкое сходство. Такое соответствие даёт право говорить о схожести эффектов языковой волатильности и взаимопомощи. Выразив  $z_{12}$  через  $z_1$  и  $z_2$ , приведём модель (4) к модели на плоскости, а степенные члены правых частей уравнений модели (4) аппроксимируем при помощи рядов Тейлора.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = c_1 r (1 - z_1 - z_2) - b_1 z_1 + \alpha b_1 z_1^2 - \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} z_1^3, \\ \dot{z}_2 = c_2 r (1 - z_1 - z_2) - b_2 z_2 + \beta b_2 z_2^2 - \frac{\beta(\beta - 1)}{2} z_2^3. \end{cases} \quad (7)$$

Полученная в результате аппроксимации модель (7) оказалась почти идентичной модели (2). Они отличаются лишь коэффициентами при переменных второй и третьей степени: для (2) они равны  $\alpha + b_1, \beta + b_2, \alpha, \beta$ , а для (7)  $\alpha b_1, \beta b_2, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}, \frac{\beta(\beta-1)}{2}$ . Учитывая ограничения на параметры волатильности  $\alpha, \beta = 1.31 \pm 0.25$ , введенные Абрамсом и Строгатти [1], численные выражения параметров моделей (2), (7) становятся близкими. Такая аппроксимация является очень полезной с точки зрения математики, поскольку упрощаются уравнения динамической системы и её исследование. Данная аппроксимация также позволяет дать объяснение взаимопомощи между носителями отдельных языков через уже известный эффект языковой волатильности, и наоборот. В исходной модели (7) параметры языковой волатильности не имели очевидного объяснения, но после сравнения её аппроксимации с моделью (2) эффект языковой волатильности можно интерпретировать как проявление эффекта взаимопомощи. В связи с этим члены правых частей уравнений при коэффициентах  $\alpha$  и  $\beta$  в моделях (7 и 4) могут быть интерпретированы как влияние эффекта взаимопомощи внутри группы носителей одного языка, а значения  $\alpha$  и  $\beta$  как сила этой взаимопомощи. Для сохранения эффекта достаточно второго порядка аппроксимации.

В модели (7) была исследована зависимость предельного развития языковой динамики от параметров языковой волатильности. Результаты оказались аналогичными результатам полученным в разделе 2.2 для модели (1): при увеличении коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  эффект языковой волатильности набирает силу и начинает действовать таким образом, что билингвизм становится невозможным.

**2.4. Применение модели к статистическим данным.** Методом регрессии были идентифицированы параметры моделей (1) и (4), значения коэффициентов приведены в табл. 1.

Рассмотрены статистические данные долей валлийского и английского языков за 1901–2001 годы в Англии [15, 16]. Модели (1) и (4) показали, что хотя английский язык и вытесняет валлийский, но он не вытеснит его полностью. Динамика придёт к устойчивому сосуществованию

Таблица 1. Коэффициенты моделей (1) и (4) для языковых пар

Table 1. Coefficients of models (1) and (4) for language pairs

Языковая пара	$c_1$	$c_2$	$b_1$	$b_2$	$r$	$\alpha$	$\beta$	diff
Валлийский и английский (1)	0.1	0.9	8.5	5.5	6.1	2.4	0.2	0.012
Валлийский и английский (4)	0.1	0.9	8.0	0.5	2.7	2.3	0.1	0.007
Шотландский и английский (1)	0.1	0.9	8.5	1.0	8.8	2.4	0.5	0.111
Шотландский и английский (4)	0.1	0.9	0.5	0.5	4.2	2.4	0.3	0.724
Французский и английский (Канада) (1)	0.3	0.7	1.0	3.0	1.5	1.5	0.5	0.000
Французский и английский (Канада) (4)	0.7	0.3	0.5	2.5	3.2	0.1	0.5	0.000
Французский и английский (Монреаль) (1)	0.5	0.5	6.5	3.5	1.6	0.1	2.1	0.000
Французский и английский (Монреаль) (4)	0.6	0.4	7.1	3.1	3.1	0.1	2.3	0.000

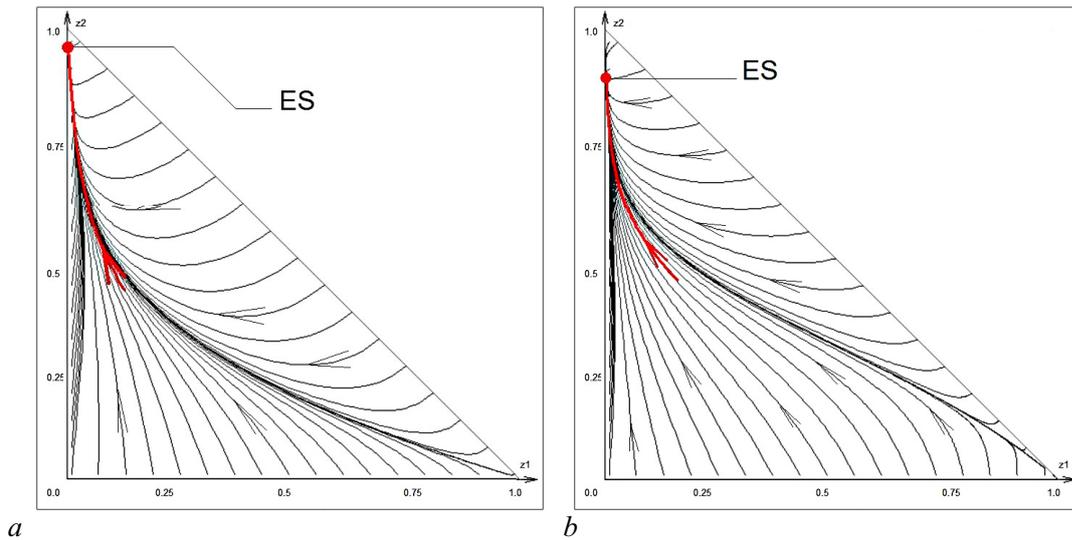


Рис. 6. Валлийско-английская языковая пара. *a* – фазовая плоскость модели (1), сосуществование языков. *b* – фазовая плоскость модели (4), сосуществование языков. Жирная траектория соответствует текущему развитию динамики (цвет онлайн)

Fig. 6. Welsh-English language pair. *a* – phase plane of the model (1), first analytical case. *b* – phase plane of the model (4), first analytical case. The bold trajectory corresponds to the current development of dynamics (color online)

языков, при этом группа валлийского языка будет весьма немногочисленна (рис. 6, *a, b*). Получен результат по статистическим данным долей шотландского и английского языков за 1891–1971 годы в Англии [15, 16]. Результаты моделирования для двух моделей показали разные результаты исхода динамики. Модель (1) показала, что шотландский язык будет вытесняться со временем (рис. 7, *a*). Модель (4) показала, что хотя английский язык и преобладает над шотландским,

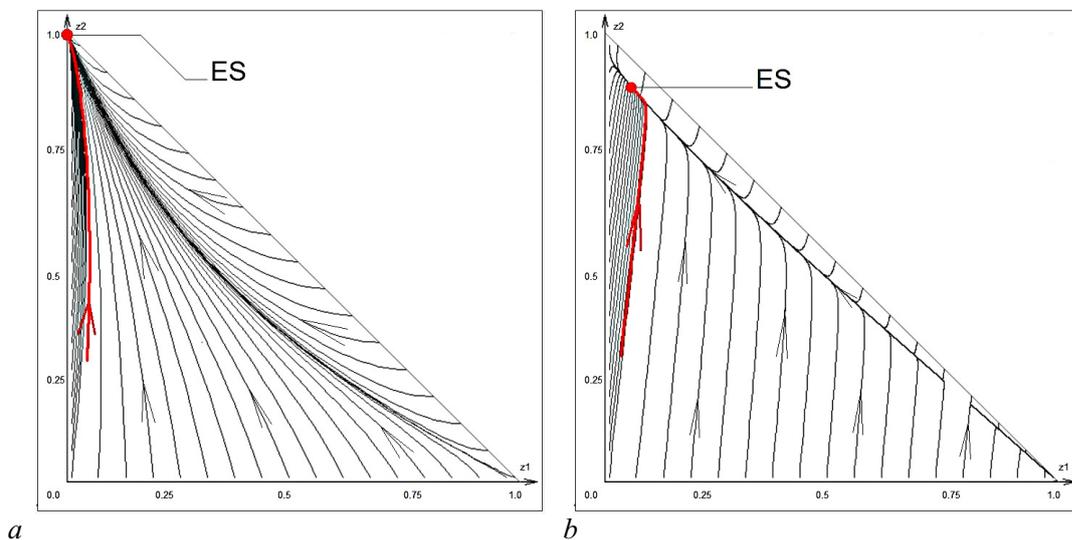


Рис. 7. Шотландско-английская языковая пара. *a* – фазовая плоскость модели (1), вытеснение шотландского языка английским. *b* – фазовая плоскость модели (4), сосуществование языков. Жирная траектория соответствует текущему развитию динамики (цвет онлайн)

Fig. 7. Gaelic-English language pair. *a* – phase plane of the model (1), English is replacing Scots. *b* – phase plane of the model (4), coexistence of languages. The bold trajectory corresponds to the current development of dynamics (color online)

но он не вытеснит его полностью. Динамика придёт к устойчивому сосуществованию языков, при этом группа шотландского языка будет весьма немногочисленна (см. рис. 7, *b*). Поскольку модели показали разные результаты для предельного поведения динамики, то для сравнения были взяты значения между фактическими данными и данными, полученными в результате моделирования. Для модели (1) разница в значениях оказалась равной  $\text{diff} = 0.111$ , а для модели (4)  $\text{diff} = 0.724$  (табл. 1). Таким образом, новая модель показала другие результаты в предельном развитии динамики, но при этом точность моделирования её оказалась выше, чем у предшествовавшей модели.

Рассмотрены также статистические данные долей французского и английского языков по всей Канаде и отдельно по Монреалю за 1996–2016 годы [15, 17]. Модель (1) показала, что французский язык вытесняет английский, но скорость вытеснения крайне мала (рис. 8, *a*). Модель (4) показала, что языки сосуществуют, динамика близка к устойчивому состоянию (рис. 8, *b*). Обе модели показали разные результаты предельного развития динамики, при этом точность моделирования для двух моделей примерно одинаковая (табл. 1). По Монреалю обе модели показали соответствие первому случаю — языки сосуществуют совместно с билингвами (рис. 9). Точность моделирования языковой динамики для моделей (1) и (4) оказалась примерно одинаковой. Сравнение данных, полученных в результате моделирования, и данных, взятых из статистики для валлийского и английского языков, приведено на (рис. 10, *a*), для шотландского и английского на (рис. 10, *b*), английского и французского для всей Канады на (рис. 11, *a*), только по Монреалю на (рис. 11, *b*). Точками отмечены значения долей языков, взяты из статистических данных, кривыми показаны доли языков, полученные в результате моделирования. Для проверки качества модели (1) методом регрессии было сделано три идентификации параметров: первая и вторая идентификация параметров производились на начальных фрагментах натуральных данных различного периода (4 и 5 лет), третья идентификация параметров производилась на полном фрагменте данных продолжительностью в 10 лет. Сравнение параметров представлено в табл. 2.

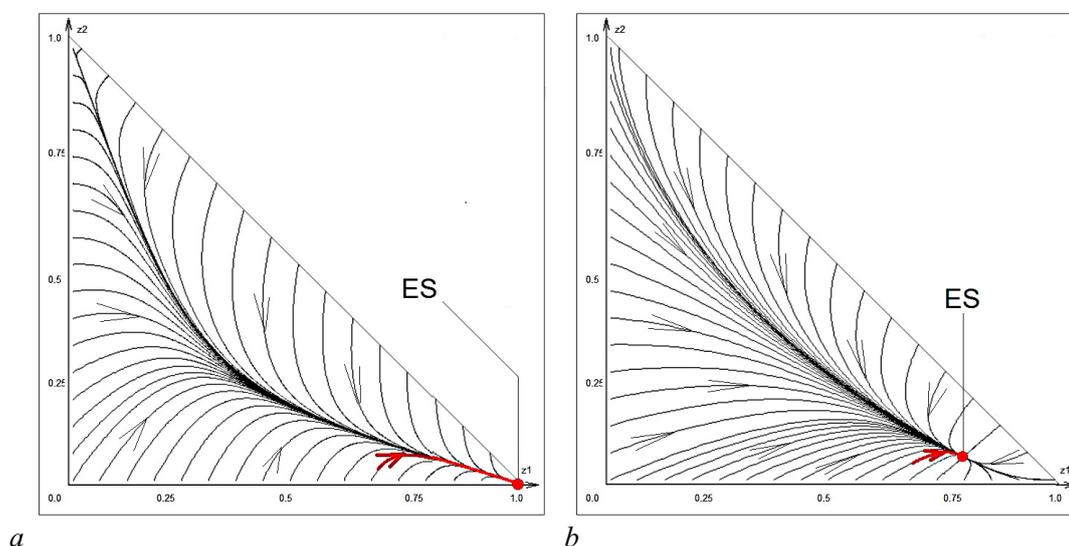


Рис. 8. Франко-английская языковая пара (Канада). *a* — фазовая плоскость модели (1), французский язык вытесняет английский. *b* — фазовая плоскость модели (4), сосуществование языков. Жирная траектория соответствует текущему развитию динамики (цвет онлайн)

Fig. 8. French-English language pair (Canada). *a* — phase plane of the model (1), French is replacing English. *b* — phase plane of the model (4), coexistence of languages. The bold trajectory corresponds to the current development of dynamics (color online)

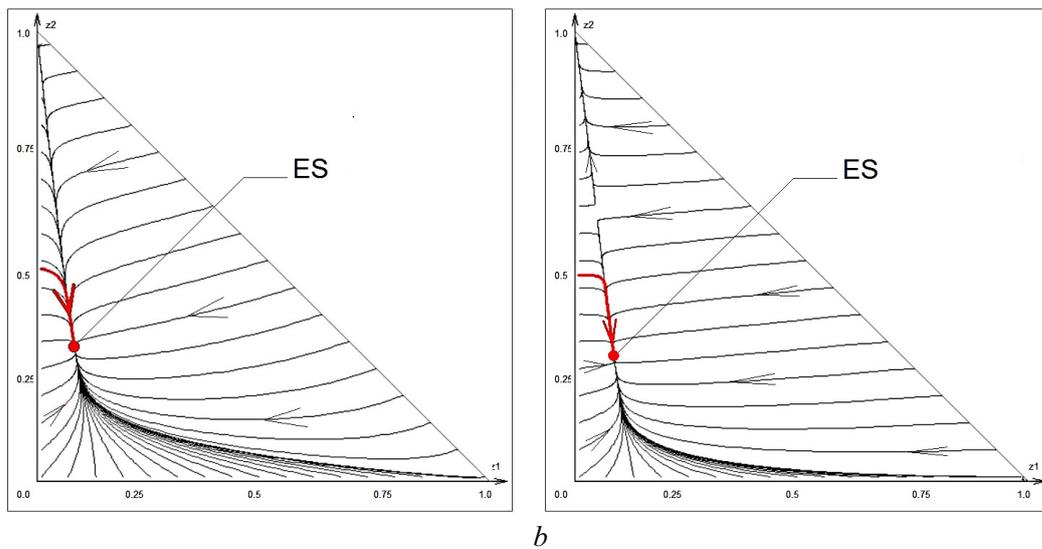


Рис. 9. Франко-английская языковая пара (Монреаль). *a* – фазовая плоскость модели (1), сосуществование языков. *b* – фазовая плоскость модели (4), сосуществование языков. Жирная траектория соответствует текущему развитию динамики (цвет онлайн)

Fig. 9. French-English language pair (Montreal). *a* – phase plane of the model (1), coexistence of languages. *b* – phase plane of the model (4), coexistence of languages. The bold trajectory corresponds to the current development of dynamics (color online)

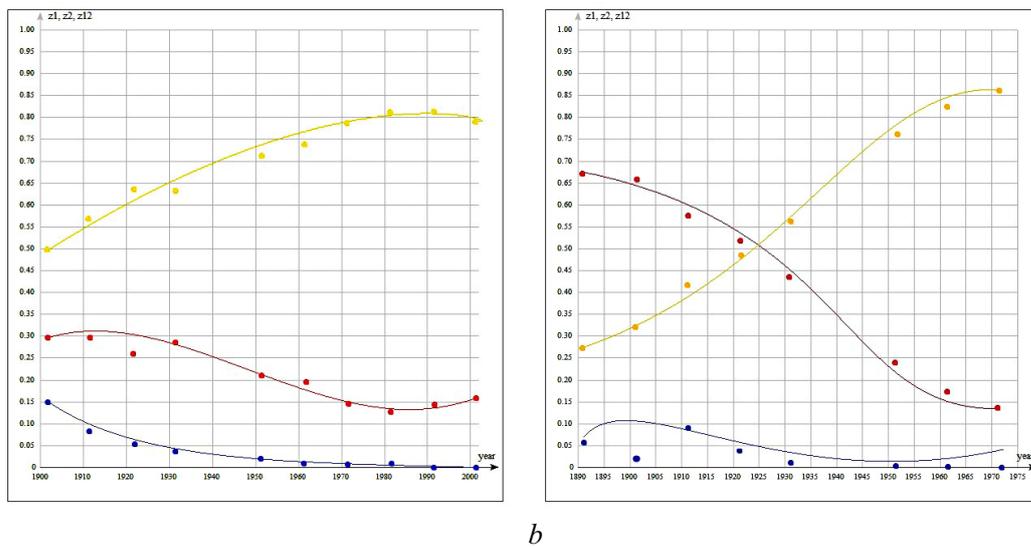


Рис. 10. Точками отмечены значения долей языков, взятые из статистических данных, кривыми показаны доли языков, полученные в результате моделирования: *красный* – билингвы; *синий* – валлийский и шотландский язык; *жёлтый* – английский язык. *a* – валлийский и английский языки. *b* – шотландский и английский (цвет онлайн)

Fig. 10. The dots mark the values of the shares of languages taken from statistical data, the curves show the shares of languages obtained as a result of modeling: *red* – bilinguals; *blue* – Gaelic or Welsh; *yellow* – English. *a* – Gaelic-English language pair. *b* – Welsh-English language pair (color online)

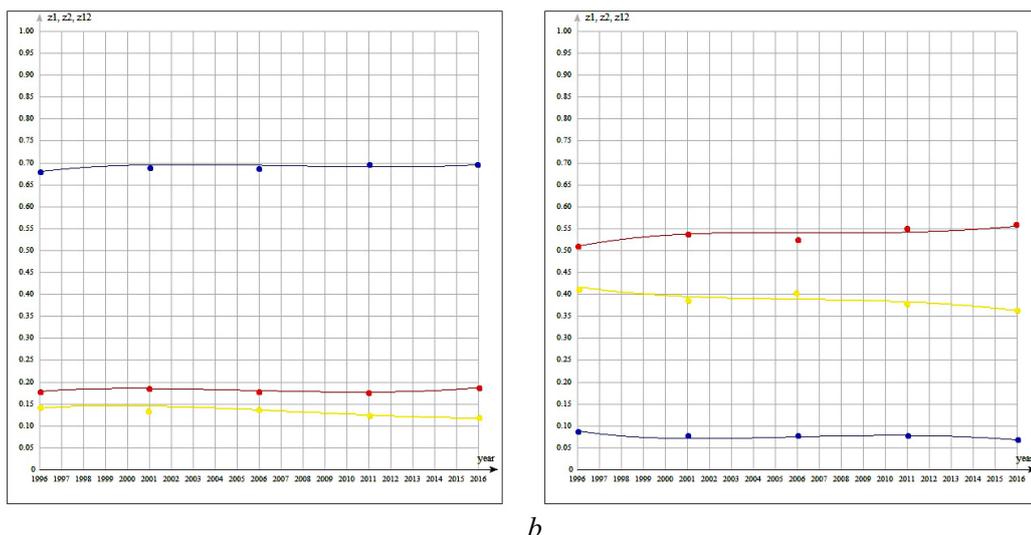


Рис. 11. Точками отмечены значения долей языков, взятые из статистических данных, кривыми показаны доли языков, полученные в результате моделирования: *красный* – билингвы; *синий* – французский язык; *жёлтый* – английский язык. *a* – вся Канада. *b* – Монреаль (цвет онлайн)

Fig. 11. The dots mark the values of the shares of languages taken from statistical data, the curves show the shares of languages obtained as a result of modeling: *red* – bilinguals; *blue* – French; *yellow* – English. *a* – in Canada. *b* – in Montreal (color online)

Таблица 2. Параметры модели (1) на различных временных периодах

Table 2. Model parameters (1) for different time periods

Размер фрагмента данных		$c_1$	$c_2$	$b_1$	$b_2$	$r$	$\alpha$	$\beta$
4 значения	1901–1921	0.2	0.8	7.5	8.5	6.7	1.1	1.2
5 значений	1901–1931	0.1	0.9	7.0	8.5	6.7	2.4	1.2
10 значений	1901–2001	0.1	0.9	6.5	8.5	6.4	2.2	1.2

Анализ данных из табл. 2 показывает, что значения коэффициентов, полученных на начальных фрагментах данных, близки к значениям, полученным на полном фрагменте натуральных данных. На основании этого можно утверждать, что модель (1) способна адекватно предсказывать исход конкуренции языков.

### 3. Обсуждения

Параметр языковой волатильности, который появился в результате наблюдения Абрамсом и Стругатти нелинейности в языковой динамике, является важным открытием, сделанным в их работе. Они интерпретировали его как готовность членов сообщества к смене языка, но такое объяснение не является очевидным. В настоящей работе рассмотрены другие возможные интерпретации этого параметра. Волатильность, введённая Абрамсом и Стругатти, была отражена в уравнениях новой динамической системы членами уравнений, которые можно интерпретировать как взаимопомощь внутри группы одного языка. По сути, взаимопомощь внутри одной языковой группы и готовность к смене языка очень близки по смыслу. Чем выше взаимопомощь, тем члены одной языковой группы активнее осваивают свой язык и менее склонны к смене языка, а чем она ниже, тем готовность к смене языка выше, потому что нет мотивации к использованию только языка своей языковой группы.

На основании таких рассуждений параметр языковой волатильности можно также объяснить и как эффект от взаимопомощи внутри группы одного языка, поскольку, во-первых, он близок к ней по смысловой интерпретации, во-вторых, также находит своё объяснение в математическом выражении. Это подтверждается и сравнением двух моделей, приведённым в данной работе.

Рассматривая статистические данные и данные, полученные в результате моделирования для языковых пар Англии, стоит отметить весьма высокое значение параметров взаимопомощи для валлийского и шотландского языков. Они превышают соответствующее значение для английского языка в 8–20 раз, и этот порядок подтверждается двумя рассмотренными моделями. Английский язык вытесняет их благодаря своей высокой престижности, но благодаря высокой взаимопомощи малые группы этих двух языков до сих пор сохраняются. Анализируя данные по Канаде, стоит отметить, что динамика французского и английского языков близка к устойчивому состоянию и фактически не меняется. Французский язык доминирует в Канаде, но в её столице, благодаря высокой взаимопомощи внутри группы английского языка, которая отражается в параметрах модели, преимущество сместилось в сторону английского языка.

На примере динамики этих двух языков также стоит отметить, что стабильно сосуществовать способны языки с совершенно разными параметрами. Новая и старая модели показали различные результаты моделирования предельного развития динамики по двум языковым парам: шотландский-английский и французский-английский (Канада). При этом для первой языковой пары точность моделирования новой модели (1) оказалась выше, чем у модели (4), для второй языковой пары точность оказалась одинаковой. На этом основании можно сделать вывод о том, что новая модель более точна в прогнозах, которые не совпадают с прогнозами старой модели. На моменте тестирования модели её параметры настраивались на начальном фрагменте натуральных данных, а исход конкуренции сравнивался с данными на конец периода. Прогноз пробного результата оказался весьма точным. Это позволяет сделать прогноз на будущее и сказать, что на данный момент динамика по рассмотренным языкам близка к устойчивым состояниям. При меняющихся условиях в Англии будет продолжать доминировать язык английский, а в Канаде французский. Рассмотренные эффекты (взаимопомощи и языковой волатильности) оказались довольно схожими и показали очень близкий результат при моделировании, но при рассмотрении предельного развития динамики могут давать как совпадающие, так и различные прогнозы.

Симметричность уравнений системы по форме не означает, что языки одинаковые, потому что разница по языкам отражается не в уравнениях системы, а в её параметрах. Это позволяет рассматривать языковую пару по типу «международный–национальный» в рамках исследованных моделей. В реальности могут быть случаи, когда из-за политических, социальных или других причин один из двух конкурирующих языков подвергается целенаправленному давлению и начинает существовать в принципиально других условиях. В ходе данного исследования отмечено, что при рассмотрении языковых пар по типу «международный–национальный» взаимопомощь для международного языка близка к значению 0, а для национального близка к максимальному значению. По языковой престижности ситуация обратная — у международного языка престижность близка к значению 1, а национального близка к значению 0. Учёт этих особенностей в последующих исследованиях может привести к появлению новых моделей с несимметричными уравнениями.

### **Заключение**

В работе построена и исследована новая модель языковой динамики для двуязычного сообщества. Общие понятия языковой динамики расширены новыми характеристиками языков: силы взаимопомощи внутри групп носителей одного языка. Эффект взаимопомощи находит эмпирическое подтверждение. Учтён эффект последовательного освоения языков детьми в раннем

возрасте. В работе рассмотрена языковая динамика, основанная на реальных статистических данных по некоторым языкам Англии и Канады: шотландскому, валлийскому, английскому, французскому. Наблюдаемая статистика была сопоставлена с результатами математического моделирования и подтвердила адекватность новой модели. Построен прогноз дальнейшего развития динамики данных языков. Отмечено сходство эффекта взаимопомощи носителей одного языка с эффектом языковой волатильности в модели AS. Эффект взаимопомощи продемонстрирован на примере того, как изменению параметров взаимопомощи следует соответствующее изменение фазовых портретов модели.

### Список литературы

1. *Abrams D., Strogatz S.* Modelling the Dynamics of Language Death // *Nature*. 2003. Vol. 424. P. 900. DOI: 10.1038/424900a.
2. *Mira J., Paredes B.* Interlinguistic Similarity and Language Death Dynamics // *Europhysics Letters*. 2005. Vol. 69, no. 6. P. 1031–1034. DOI: 10.1209/epl/i2004-10438-4.
3. *Castelly X., Eguiluz V., San Miguel M.* Ordering dynamics with Two non-excluding option: Bilingualism in language competition // *New Journal of Physics*. 2006. Vol. 8, no. 12. P. 308. DOI: 10.1088/1367-2630/8/12/308.
4. *Baggs I., Freedman H.* A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population: persistence versus extinction // *Journal of Mathematical Sociology*. 1990. Vol. 16, no. 1. P. 51–75. DOI: 10.1080/0022250X.1990.9990078
5. *Baggs I., Freedman H.* Can the speakers of a dominated language survive as unilinguals?: A mathematical model of bilingualism // *Mathematical and Computer Modelling*. 1993. Vol. 18, no. 6. P. 9–18. DOI: 10.1016/0895-7177(93)90122-F.
6. *Wyburn J., Hayward J.* The future of bilingualism: an application of the Baggs and Freedman model // *Journal of Mathematical Sociology*. 2008. Vol. 32, no. 4. P. 267–284. DOI: 10.1080/00222500802352634.
7. *Diaz M., Switkes J.* Speaking out: A mathematical model of language preservation // *Heliyon*. 2021. Vol. 7, no. 5. P. 2405–2425. DOI: 10.1016/j.heliyon.2021.e06975.
8. *Александрова Н. Ш.* Исчезновение языков и естественный билингвизм // *Полилингвистичность и транскультурные практики*. 2023. Т. 20, № 3. С. 436–455. DOI: 10.22363/2618-897X-2023-20-3-436-455
9. *Paradis M.* A Neurolinguistic Theory of Bilingualism. Amsterdam; Philadelphia: John Benjamins Publishing Company. 2004. 299 p. DOI: 10.1075/sibil.18.
10. *Александрова Н. Ш.* Родной язык, иностранный язык и языковые феномены, у которых нет названия // *Вопросы языкознания*. 2006. Т. 3. С. 88–100.
11. *Alexandrova N. S., Antonets V. A., Kuzenkov O. A., Nuidel I. V., Shemagina O. V., Yakhno V. G.* Bilingualism as an Unstable State // *Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics. Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2021. Vol. 1358. P. 359–367. DOI: 10.1007/978-3-030-71637-0\_41.
12. *Медведев А. В., Кузенков О. А.* Моделирование конкуренции языков. Современные информационные технологии и ИТ-образование // 2023. Т. 19, № 2. С. 381–392.
13. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М: Наука, 1976. 286 с.
14. *Кузенков О. А., Рябова Е. А.* Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. 323 с.
15. *Sutantawibul C., Xiao P., Richie S., Fuentes-Rivero D.* Revisit language modeling competition and extinction: A Data-Driven Validation // *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 2018. Vol. 6, no. 7. P. 1558–1570. DOI: 10.4236/jamp.2018.67132.
16. *Menghan Z., Tao G.* Principles of parametric estimation in modeling language competition //

Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS). 2013. Vol. 110, no. 24. P. 194–212. DOI: 10.1073/pnas.1303108110.

17. Statistics of Canada. <https://www.statcan.gc.ca>. Last accessed 3 Sep 2023.

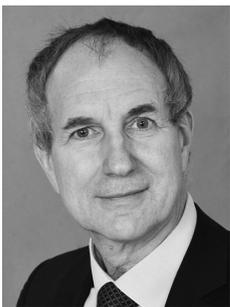
## References

1. Abrams D, Strogatz S. Modelling the Dynamics of Language Death. *Nature*. 2003;424:900. DOI: 10.1038/424900a.
2. Mira J, Paredes B. Interlinguistic Similarity and Language Death Dynamics. *Europhysics Letters*. 2005;69(6):1031–1034. DOI: 10.1209/epl/i2004-10438-4.
3. Castelly X, Eguiluz V, San Miguel M. Ordering dynamics with Two non-excluding option: Bilingualism in language competition. *New Journal of Physics*. 2006;8(12):308. DOI: 10.1088/1367-2630/8/12/308.
4. Baggs I, Freedman H. A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population: persistence versus extinction. *Journal of Mathematical Sociology*. 1990;16(1):51–75. DOI: 10.1080/0022250X.1990.9990078.
5. Baggs I, Freedman H. Can the speakers of a dominated language survive as unilinguals?: A mathematical model of bilingualism. *Mathematical and Computer Modelling*. 1993;18(6):9–18. DOI: 10.1016/0895-7177(93)90122-F.
6. Wyburn J, Hayward J. The future of bilingualism: an application of the Baggs and Freedman model. *Journal of Mathematical Sociology*. 2008;32(4):267–284. DOI: 10.1080/00222500802352634.
7. Diaz M, Switkes J. Speaking out: A mathematical model of language preservation. *Heliyon*. 2021;7(5):2405–2425. DOI: 10.1016/j.heliyon.2021.e06975.
8. Alexandrova NS. The disappearance of languages and natural bilingualism. *Polylinguality & Transcultural Practices*. 2023;20(3):436–455. DOI: 10.18500/0869-6632-00312310.22363/2618-897X-2023-20-3-436-455 (In Russian).
9. Paradis M. *A Neurolinguistic Theory of Bilingualism*. Amsterdam; Philadelphia: John Benjamins Publishing Company. 2004. 299 p. DOI: 10.1075/sibil.18.
10. Alexandrova NS. Native language, foreign language and linguistic phenomena that have no name. *Voprosy Jazykoznanija*. 2006;3:88–100 (In Russian).
11. Alexandrova NS, Antonets VA, Kuzenkov OA, Nuidel IV, Shemagina OV, Yakhno VG. Bilingualism as an Unstable State. *Advances in Cognitive Research, Artificial Intelligence and Neuroinformatics. Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2021;1358:359–367. DOI: 10.1007/978-3-030-71637-0\_41.
12. Medvedev AV, Kuzenkov OA. Modeling language competition. *Modern Information Technologies and IT-education*. 2023;19(2):381–392 (In Russian).
13. Volterra V. *Leçons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*. Paris: Gauthier-Villars. 1931. 222 p. (In France).
14. Kuzenkov OA, Ryabova EA. *Mathematical modeling of selection processes*. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State University publ. 2007. 323 p. (In Russian).
15. Sutantawibul C, Xiao P, Richie S, Fuentes-Rivero D. Revisit language modeling competition and extinction: A Data-Driven Validation. *Journal of Applied Mathematics and Physics*. 2018;6(7):1558–1570. DOI: 10.4236/jamp.2018.67132.
16. Menghan Z, Tao G. Principles of parametric estimation in modeling language competition. *Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS)*. 2013;110(24):194–212. DOI: 10.1073/pnas.1303108110.
17. Statistics of Canada. <https://www.statcan.gc.ca>. Last accessed 3 Sep 2023.



*Александр Викторович Медведев* — аспирант кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского.  
E-mail: a.medvedev.unn@gmail.com  
ORCID: 0000-0002-4650-0938



*Кузенков Олег Анатольевич* — родился в Горьковской области (1961). Окончил с отличием факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика» (1989, ГГУ). С 2015 года работает на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского. Научные интересы — теория меры, оптимизация и теория оптимального управления, математическое моделирование. Имеет более 120 публикаций по указанным направлениям.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского  
E-mail: kuzenkov\_o@mail.ru  
ORCID: 0000-0001-9407-0517  
AuthorID (eLibrary.Ru): 12881