



ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ГАРЕЛА - РОССЛЕРА

С.Д. Тулебаев, М.Х. Харрасов

На основе асимптотических методов Боголюбова для динамической модели Гарела - Росслера показана возможность автоколебательных режимов и существование последовательности бифуркаций удвоения периода. Качественные результаты подтверждаются численными исследованиями.

В современной теории динамических систем большой интерес представляет исследование механизмов и путей развития автостохастических процессов в нелинейных системах различной природы, допускающих математическую формализацию с помощью, например, систем дифференциальных уравнений [1-4].

Исследования конкретных динамических систем показали, что наиболее распространенный путь перехода к хаотическому режиму связан с последовательностью бифуркаций удвоения периода [1, 2]. В этом случае существует важная закономерность в распределении бифуркационных параметров системы, установленная при исследовании некоторых одномерных отображений [5].

Заметим, что возможность появления решений с удвоенным периодом в нелинейных системах рассматривалась еще Н.Н.Боголюбовым в его классических работах по асимптотическим методам в нелинейной механике [6]. Эти методы основаны на принципе усреднения и весьма эффективны при исследовании поведения нелинейных систем.

Здесь, используя основополагающие идеи Н.Н. Боголюбова, мы ставим целью показать возможность одночастотного колебательного режима и последовательность бифуркаций удвоения периода в нелинейной модели Гарела - Росслера [7]. Данная модель предложена в химической кинетике и допускает автостохастическое поведение.

Рассмотрим автономную динамическую систему, описываемую следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - ax_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_2 &= bx_1 - x_2 + x_2x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1^2 + x_2^2 - x_3/(x_3 + c), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mu = (a, b, c)$ - совокупность параметров системы ($a > 0, b > 0, c > 0$).

Покажем, что в системе (1) возможны автоколебательные режимы, существует последовательность бифуркаций удвоения периода и предельное множество в пространстве параметров.

Заметим, что система (1) имеет единственное нетривиальное стационарное решение

$$\begin{aligned} x_{10} &= \{a[1 - (ab)^{1/2}] / [(a+b)(1 - (ab)^{1/2} + c)]\}^{1/2}, & x_{20} &= \{b[1 - (ab)^{1/2}] / [(a+b)(1 - (ab)^{1/2} + c)]\}^{1/2}, \\ & & x_{30} &= 1 - (ab)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2)$$

область существования которого задается условием

$$(1+c)^2/b < a < 1/b.$$

Матрица линеаризованной системы и ее характеристический многочлен имеют соответственно вид

$$A = \begin{vmatrix} 1 - x_{30} & -a & -x_{10} \\ b & x_{30} - 1 & x_{20} \\ 2x_{10} & 2x_{20} & -c/(x_{30} + c)^2 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$D(\lambda, \mu) = \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3,$$

$$\begin{aligned} \text{где } \alpha_1 &= c/[1 - (ab)^{1/2} + c]^2, & \alpha_2 &= 2(a-b)[1 - (ab)^{1/2}] / [(a+b)(1 - (ab)^{1/2} + c)], \\ \alpha_3 &= 4(ab)^{1/2}[1 - (ab)^{1/2}] / [1 - (ab)^{1/2} + c]. \end{aligned}$$

Для того, чтобы решение (2) было устойчивым, необходимо и достаточно выполнение следующих условий Рауса - Гурвица:

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \Delta = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 > 0.$$

В силу определения параметров системы (1) достаточно проанализировать лишь последнее из них. Тем самым определяется область существования и устойчивости стационарного решения.

Обозначим корни характеристического уравнения через λ_k , где $k=1,2,3$, и рассмотрим случай

$$\lambda_1 = \lambda_1^* < 0, \lambda_2 = \lambda_3^* = \nu + i\omega. \quad (4)$$

Здесь ν и ω вещественные, а звездочка здесь и далее обозначает комплексное сопряжение. В качестве собственных векторов матрицы (3) выберем вектор-столбец

$$U^{(k)} = \begin{pmatrix} -x_{10}[\lambda_k + 2(ab)^{1/2}] \\ x_{20}[\lambda_k - 2(ab)^{1/2}] \\ \lambda_k^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

и определим такой базис $V^{(k)}$ ($k=1,2,3$) пространства дуального к $U^{(k)}$, что для системы векторов $U^{(k)}$ и $V^{(k)}$ имеет место условие

$$(U^{(k)}, V^{(m)}) = \delta_{km},$$

где скалярное произведение определено таким образом:

$$(U, V) = \sum_n U_n V_n.$$

Тогда найдем

$$V^{(l)} = W^{-1}[U^{(k)} * V^{(l)}], \quad (6)$$

где в векторном произведении $j, k, l = 1, 2, 3$ определены в циклическом порядке. Здесь

$$W = -W^* = 8ab[1 - (ab)^{1/2}]\{(\lambda_1 - \nu)^2 + \omega^2\}i\omega / [(a+b)(1 - (ab)^{1/2} + c)].$$

Рассмотрим теперь решения системы (1) вблизи особой точки (2). Положим $x = x_0 + u_\epsilon$ и представим малый член u_ϵ в виде ряда

$$u_\epsilon = \sum_{k=1}^3 \xi_k(t) \bar{U}^{(k)}.$$

Тогда после стандартных преобразований уравнений (1), учитывая определение матрицы (3), векторов (6) и опуская громоздкие выкладки, получим для неизвестных величин ξ_k ($k=1,2,3$) уравнения

$$\begin{aligned} \xi_k(t) = & \lambda_k \xi_k + b_1^{(k)} \xi_1^2 + b_2^{(k)} \xi_2^2 + b_3^{(k)} \xi_3^2 + b_{12}^{(k)} \xi_1 \xi_2 + b_{13}^{(k)} \xi_1 \xi_3 + b_{23}^{(k)} \xi_2 \xi_3 + c_1^{(k)} \xi_1^3 + \\ & + c_2^{(k)} \xi_2^3 + c_3^{(k)} \xi_3^3 + c_{122}^{(k)} \xi_1 \xi_2^2 + c_{133}^{(k)} \xi_1 \xi_3^2 + c_{233}^{(k)} \xi_2 \xi_3^2 + c_{112}^{(k)} \xi_1^2 \xi_2 + c_{113}^{(k)} \xi_1^2 \xi_3 + \\ & + c_{223}^{(k)} \xi_2^2 \xi_3 + c_{123}^{(k)} \xi_1 \xi_2 \xi_3, \end{aligned} \quad (7)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} b_{jk}^{(s)} = & \sum_{j,k=1}^3 (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) U_j^{(s)} U_k^{(s)}; & b_{lm}^{(s)} = & \sum_{j,k=1}^3 (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(l)} U_k^{(m)} + U_j^{(m)} U_k^{(l)}); \\ c_l^{(s)} = & \sum_{j,k,m}^3 (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) U_j^{(l)} U_k^{(l)} U_m^{(l)}; \\ c_{122}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(1)} U_k^{(2)} U_l^{(2)} + U_j^{(2)} U_k^{(1)} U_l^{(2)} + U_j^{(2)} U_k^{(2)} U_l^{(1)}); \\ c_{133}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(1)} U_k^{(3)} U_l^{(3)} + U_j^{(3)} U_k^{(1)} U_l^{(3)} + U_j^{(3)} U_k^{(3)} U_l^{(1)}); \\ c_{233}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(2)} U_k^{(3)} U_l^{(3)} + U_j^{(3)} U_k^{(2)} U_l^{(3)} + U_j^{(3)} U_k^{(3)} U_l^{(2)}); \\ c_{112}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(1)} U_k^{(1)} U_l^{(2)} + U_j^{(1)} U_k^{(2)} U_l^{(1)} + U_j^{(2)} U_k^{(1)} U_l^{(1)}); \\ c_{223}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(2)} U_k^{(2)} U_l^{(3)} + U_j^{(2)} U_k^{(3)} U_l^{(2)} + U_j^{(3)} U_k^{(2)} U_l^{(2)}); \\ c_{123}^{(s)} = & \sum_{j,k,l} (\mathbf{V}^{(s)}, \mathbf{a}_{jk}) (U_j^{(1)} U_k^{(2)} U_l^{(3)} + U_j^{(1)} U_k^{(3)} U_l^{(2)} + U_j^{(2)} U_k^{(1)} U_l^{(3)} + U_j^{(2)} U_k^{(3)} U_l^{(1)} + \\ & + U_j^{(3)} U_k^{(1)} U_l^{(2)} + U_j^{(3)} U_k^{(2)} U_l^{(1)}); \\ \mathbf{a}_{jk} = & \text{col}(a_{1jk}, a_{2jk}, a_{3jk}), & \mathbf{a}_{jkl} = & \text{col}(a_{1jkl}, a_{2jkl}, a_{3jkl}), \\ \mathbf{a}_{ikj} = & (1/2) \partial^2 F_i(x_0, \mu) / \partial x_j \partial x_k, & \mathbf{a}_{ijkl} = & (1/3!) \partial^3 F_i(x_0, \mu) / \partial x_j \partial x_k \partial x_l. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь F_i - правые части уравнений (1).

Принимая во внимание выражения (5) и (6), для коэффициентов (8) уравнений (7) в случае (4) можно установить следующие соотношения симметрии

$$\begin{aligned} b_1(1) = b_1(1)^* & & b_3(2) = b_2(2)^* & & b_3(1) = b_2(1)^* & & b_1(3) = b_1(2)^* \\ b_2(3) = b_3(2)^* & & b_3(2) = b_2(3)^* & & b_{12}(3) = b_{13}(2)^* & & b_{13}(3) = b_{12}(2)^* \\ b_{33}(1) = b_{22}(1)^* & & b_{23}(3) = b_{23}(2)^* & & b_{13}(1) = b_{12}(1)^* & & b_{23}(1) = b_{23}(1)^* \\ c_{123}(1) = c_{123}(1)^* & & c_{123}(3) = c_{123}(2)^* & & c_{133}(1) = c_{122}(1)^* & & c_{133}(3) = c_{122}(2)^* \\ c_{113}(1) = c_{112}(1)^* & & c_{233}(3) = c_{223}(2)^* & & c_{233}(1) = c_{223}(1)^* & & c_{113}(3) = c_{112}(2)^* \\ c_{223}(3) = c_{233}(2)^* & & c_{122}(3) = c_{133}(2)^* & & c_{112}(3) = c_{113}(2)^* & & c_{123}(3) = c_{213}(3) = c_{321}(3). \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда следует, что третье уравнение в (7) является комплексно-сопряженным второму, то есть $\xi_3 = \xi_2^*$.

Рассмотрим подробно бифуркацию стационарного решения. Известно, что граница области устойчивости стационарного состояния определяется из уравнения

$$D(i\omega, \mu) = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) позволяет определить величины ω и λ_1 в точке бифуркации и дает $\omega^2 = \alpha_2 > 0$, $\lambda_1 = -\alpha_1 < 0$.

Аналогично [8] можно установить, что в изучаемой системе, при переходе через границу устойчивости решения (2) происходит бифуркация рождения предельного цикла. Найдем решения системы (7), которую с учетом (9) запишем таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) = & \lambda_1 \xi_1 + b_1^{(1)} \xi_1^2 + b_2^{(1)} \xi_2^2 + b_2^{(1)*} \xi_3^2 + b_{12}^{(1)} \xi_1 \xi_2 + b_{13}^{(1)*} \xi_1 \xi_2^* + b_{23}^{(1)} |\xi_2|^2 + \\ & + c_1^{(1)} \xi_1^3 + c_2^{(1)} \xi_2^3 + c_3^{(1)*} \xi_2^* \xi_3 + c_{122}^{(1)} \xi_1 \xi_2^2 + c_{122}^{(1)*} \xi_1 \xi_2^* \xi_2 + c_{223}^{(1)} \xi_2 |\xi_2|^2 + \\ & + c_{112}^{(1)} \xi_1^2 \xi_2 + c_{112}^{(1)*} \xi_1^2 \xi_2^* + c_{223}^{(1)*} \xi_2^* |\xi_2| + c_{123}^{(1)} \xi_1 |\xi_2|^2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2(t) = & \lambda_2 \xi_2 + b_1^{(2)} \xi_1^2 + b_2^{(2)} \xi_2^2 + b_3^{(2)} \xi_2^* \xi_3 + b_{12}^{(2)} \xi_1 \xi_2 + b_{13}^{(2)} \xi_1 \xi_2^* + b_{23}^{(2)} |\xi_2|^2 + \\ & + c_1^{(2)} \xi_1^3 + c_2^{(2)} \xi_2^3 + c_3^{(2)} \xi_2^* \xi_3 + c_{122}^{(2)} \xi_1 \xi_2^2 + c_{133}^{(2)} \xi_1 \xi_2^* \xi_2 + c_{233}^{(2)} \xi_2^* |\xi_2|^2 + \\ & + c_{112}^{(2)} \xi_1^2 \xi_2 + c_{113}^{(2)} \xi_1^2 \xi_2^* + c_{223}^{(2)} \xi_2 |\xi_2|^2 + c_{123}^{(2)} \xi_1 |\xi_2|^2. \end{aligned}$$

Теперь полагаем, что λ_2 имеет положительную реальную часть

$$\lambda_2 = \lambda' + i\omega, \quad \lambda' > 0, \quad \lambda_1 < 0.$$

Представив комплексные коэффициенты этих уравнений в виде

$$\begin{aligned} b_j^{(s)} &= |b_j^{(s)}| \exp(i\beta_j^{(s)}), & c_j^{(s)} &= |c_j^{(s)}| \exp(i\gamma_j^{(s)}), \\ b_{jk}^{(s)} &= |b_{jk}^{(s)}| \exp(i\beta_{jk}^{(s)}), & c_{jk}^{(s)} &= |c_{jk}^{(s)}| \exp(i\gamma_{jk}^{(s)}), \\ b_{jkl}^{(s)} &= |b_{jkl}^{(s)}| \exp(i\beta_{jkl}^{(s)}), & c_{jkl}^{(s)} &= |c_{jkl}^{(s)}| \exp(i\gamma_{jkl}^{(s)}), \end{aligned}$$

решение системы (11) будем искать в форме

$$\xi_j(t) = r_j(t) \exp(i\varphi_j(t)), \quad j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

После простых преобразований находим

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 = & \lambda_1 r_1 + |b_1^{(1)}| r_1^2 \cos(\varphi_1 + \beta_1^{(1)}) + |b_2^{(1)}| r_2^2 [\cos(2\varphi_2 - \varphi_1 + \beta_2^{(1)}) + \cos(2\varphi_2 + \varphi_1 + \beta_2^{(1)})] + \\ & + |b_{12}^{(1)}| r_1 r_2 [\cos(\varphi_2 + \beta_{12}^{(1)}) + \cos(\varphi_2 - \beta_{12}^{(1)})] + |b_{23}^{(1)}| r_2^2 \cos(\beta_{23}^{(1)} - \varphi_1) + |c_1^{(1)}| r_1^3 \cos(2\varphi_1 + \\ & + \gamma_2^{(1)}) + |c_2^{(1)}| r_2^3 [\cos(3\varphi_2 - \varphi_1 + \gamma_2^{(1)}) + \cos(3\varphi_2 + \varphi_1 + \gamma_2^{(1)})] + |c_{122}^{(1)}| r_1 r_2^2 [\cos(2\varphi_2 + \\ & + \gamma_{122}^{(1)}) + \cos(2\varphi_2 - \gamma_{122}^{(1)})] + |c_{112}^{(1)}| r_1^2 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \gamma_{122}^{(1)}) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2 - \\ & - \gamma_{122}^{(1)})] + |c_{223}^{(1)}| r_2^3 [\cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \gamma_{223}^{(1)}) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \gamma_{223}^{(1)})] + |c_{123}^{(1)}| r_1 r_2^2 \cos \gamma_{123}^{(1)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 = & |b_1^{(1)}| r_1 \sin(\varphi_1 + \beta_1^{(1)}) + |b_2^{(1)}| (r_2^2 / r_1) [\sin(2\varphi_2 - \varphi_1 + \beta_2^{(1)}) - \sin(2\varphi_2 + \varphi_1 + \beta_2^{(1)})] + \\ & + |b_{23}^{(1)}| (r_2^2 / r_1) \sin(\beta_{23}^{(1)} - \varphi_1) + |c_1^{(1)}| r_1^2 \sin(2\varphi_1 + \gamma_1^{(1)}) + |c_2^{(1)}| (r_2^3 / r_1) [\sin(3\varphi_2 - \varphi_1 + \gamma_2^{(1)}) - \\ & - \sin(3\varphi_2 + \varphi_1 + \gamma_2^{(1)})] + |c_{223}^{(1)}| (r_2^3 / r_1) [\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \gamma_{223}^{(1)}) - \sin(\varphi_2 + \varphi_1 + \gamma_{223}^{(1)})] + \\ & + |c_{112}^{(1)}| r_1 r_2 [\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \gamma_{122}^{(1)}) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2 - \gamma_{122}^{(1)})] + |c_{123}^{(1)}| r_2^2 \sin \gamma_{123}^{(1)}. \end{aligned}$$

Заметим, что полученные уравнения допускают решение $\dot{\varphi}_1=0$ и, следовательно, можно выбрать $\varphi_1=0$. Тогда, имея ввиду (9), получим

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 = & \lambda_1 r_1 + b_1^{(1)} r_1^2 + 2|b_2^{(1)}| r_2^2 \cos(2\varphi_2 + \beta_2^{(1)}) + 2|b_{12}^{(1)}| r_1 r_2 \cos(\varphi_2 + \beta_{12}^{(1)}) + |b_{23}^{(1)}| r_2^2 + \\ & + c_1^{(1)} r_1^3 + 2|c_2^{(1)}| r_2^3 \cos(3\varphi_2 + \gamma_2^{(1)}) + 2|c_{122}^{(1)}| r_1 r_2^2 \cos(2\varphi_2 + \gamma_{122}^{(1)}) + \\ & + 2|c_{112}^{(1)}| r_1^2 r_2 \cos(\varphi_2 + \gamma_{112}^{(1)}) + 2|c_{223}^{(1)}| r_2^3 \cos(\varphi_2 + \gamma_{223}^{(1)}) + c_{123}^{(1)} r_1 r_2^2, \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\dot{\varphi}_1 = 0.$$

Для нахождения приближенных решений системы (11) усредним эти уравнения по углу φ_2 в интервале $(0, 2\pi)$. Получим

$$\begin{aligned} \overline{\dot{r}_1} = & \lambda_1 r_1 + b_1^{(1)} r_1^2 + 2b_{23}^{(1)} r_2^2 + c_1^{(1)} r_1^3 + c_{123}^{(1)} r_1 r_2^2, \\ \overline{\dot{\varphi}_1} = & 0. \end{aligned} \quad (13b)$$

Аналогичные выкладки для второго уравнения из (11) дают

$$\begin{aligned} \overline{\dot{r}_2} = & \lambda_2 r_2' + |b_{12}^{(2)}| r_1 r_2 \cos \beta_{12}^{(2)} + |c_{223}^{(2)}| r_2^3 \cos \gamma_{223}^{(2)} + |c_{112}^{(2)}| r_1^2 r_2 \cos \gamma_{112}^{(2)}, \\ \overline{\dot{\varphi}_2} = & \omega + |b_{12}^{(2)}| r_1 \sin \beta_{223}^{(2)} + |c_{223}^{(2)}| r_2^2 \cos \gamma_{223}^{(2)} + |c_{112}^{(2)}| r_1^2 \sin \gamma_{112}^{(2)}. \end{aligned}$$

Полученные уравнения допускают стационарное решение $r_{10} \neq 0$, $r_{20} \neq 0$. При этом для перенормированной частоты имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 = \omega + \Delta\omega = \Omega, \quad \varphi_2 = \Omega t + \theta_0, \quad \theta_0 = \text{const}, \\ \Delta\omega = |b_{12}^{(2)}| r_1 \sin \beta_{223}^{(2)} + |c_{223}^{(2)}| r_2^2 \cos \gamma_{223}^{(2)} + |c_{112}^{(2)}| r_1^2 \sin \gamma_{112}^{(2)}. \end{aligned}$$

Окончательно искомое решение записывается в форме

$$u_{k0}(t) = x_{10} + r_{10} u_k^{(1)} + r_{20} \{u_k^{(2)} \exp[i(\Omega t + \theta_0)] + \text{к.с.}\}. \quad (14)$$

Данное решение описывает автоколебательный режим с периодом $T_1 = 2\pi/\Omega$. Покажем ниже, что в рассматриваемой системе возможны периодические колебания с удвоенным периодом $T_2 = 2T_1$. Вводя оператор усреднения по времени M_{T_n}

$$M_{T_n} f(x, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T_n} f(x, \tau) d\tau \equiv \langle f(x, t) \rangle_n$$

и произведя вариацию уравнения (1) вблизи периодического решения (14): $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0(t) + \mathbf{x}$, напомним точное уравнение для малых колебаний ($x \sim \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \langle A_1(t) \rangle_1 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-1} (A_1(t) - \langle A_1(t) \rangle_1) \mathbf{x}, \quad (15)$$

где
$$A_1(t) = \begin{vmatrix} 1 - x_{30}(t) & -a & -x_{10}(t) \\ b & x_{30}(t) - 1 & x_{20}(t) \\ 2x_{10}(t) & 2x_{20}(t) & -c/(x_{30}(t) + c)^2 \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{g} = \text{col}(-x_1 x_3, x_2 x_3, x_1^2 + x_2^2 - x_3/(x_3 + c)).$$

Матрица $\langle A_1(t) \rangle_1$ получена путем усреднения элементов матрицы $A_1(t)$. Наряду с уравнением (15), рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \langle A_1(t) \rangle_1 \mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (16)$$

Допустим, что в соответствующей линейной системе возможен одночастотный колебательный режим с частотой $\omega/2$. Для этого необходимо выполнение условия

$$D(\lambda^{\sim}, \mu^{\sim}) = \lambda^{\sim} + \alpha_1^{\sim} \lambda^{\sim} + \alpha_2^{\sim} \lambda^{\sim} + \alpha_3^{\sim} = 0,$$

где перенормированные значения коэффициентов α_j^{\sim} , $j = 1, 2, 3$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\sim} &= c / (\langle x_{30}(t) \rangle_1 + c)^2, & \alpha_2^{\sim} &= \langle x_{30}(t) \rangle_1^2 + ab + 1 + 2\langle x_{10}(t) \rangle_1^2 - 2\langle x_{20}(t) \rangle_1^2, \\ \alpha_3^{\sim} &= 2(a+b)\langle x_{10}(t) \rangle_1 \langle x_{20}(t) \rangle_1 - 2(\langle x_{30}(t) \rangle_1 - 1) + (\langle x_{10}(t) \rangle_1^2 + \langle x_{20}(t) \rangle_1^2) + \\ &+ [ab - (1 - \langle x_{30}(t) \rangle_1)^2] c / (\langle x_{30}(t) \rangle_1 + c)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Причем собственные значения матрицы $\langle A_1(t) \rangle_1$ должны задаваться выражениями

$$\lambda_1^{\sim} = -\alpha_1^{\sim} < 0, \quad \lambda_{2,3}^{\sim} = \pm i\omega/2 = \pm i(\alpha_2^{\sim})^{1/2}. \quad (18)$$

Тогда вместо величин, определенных при рассмотрении бифуркации стационарной точки, нужно взять их перенормированные значения согласно (17), (18). Следовательно, при $\lambda_2^{\sim} = \lambda_3^{\sim} = \pm i\omega/2$ ($\lambda_2^{\sim} > 0$) решение системы (16), если не интересоваться переходными решениями, представляется двухпараметрическим семейством решений

$$u_k = r_{20}^{\sim} u_k^{\sim(2)} \exp i\psi + r_{20}^{\sim} u_k^{\sim(2)*} \exp(-i\psi), \quad (19)$$

где $2\psi = \Omega^{\sim} t + \theta^{\sim}$, $\theta^{\sim} = \text{const}$, $\Omega^{\sim} = \omega^{\sim} + 2\Delta\omega^{\sim}$.

Положим далее $\Omega^{\sim} = \Omega$ и будем интересоваться решением системы (15). Будем считать величины r_{20}^{\sim} и θ^{\sim} в (19) функциями времени и воспользуемся для них стандартными разложениями по степеням малого параметра. Тогда, если ограничиться рамками теории первого приближения, указанные величины являются постоянными. Действительно, в этом случае правая часть (15) не содержит основной гармоники по углу ψ . Итак, в первом приближении, в качестве искомого решения можно взять выражение (19). Обратим внимание на следующий факт: поскольку в силу (13) величины x_{k0} и $\langle x_{k0}(t) \rangle$ совпадают с точностью порядка ϵ^2 , то новый предельный цикл периода $2T_1$ находится на малом расстоянии от старого. Таким образом, в рассматриваемом случае имеет место бифуркация удвоения периода. Нахождение подобных решений, соответствующих одночастотным колебательным состояниям системы с периодами $T_n = 2^n T_1$, $n = 1, 2, 3, \dots$, может быть последовательно продолжено. Можно также показать, что

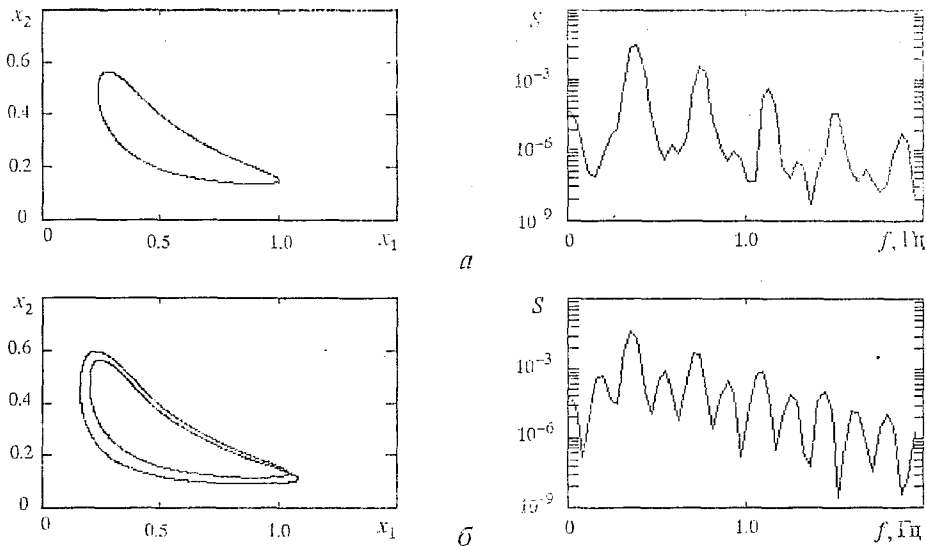


Рис. 1. Бифуркация удвоения периода: а - $\alpha=0.1$, $b=0.048$, $c=1.0$; б - $\alpha=0.1$, $b=0.051$, $c=1.0$

существует предельное множество бифуркационных значений параметров. Таким образом, полученные результаты указывают на возможность автостохастических решений модели (1).

Нами были проведены численные исследования модели (1) с использованием методов отображения Пуанкаре и спектрального анализа (дискретное преобразование Фурье). В основу численного анализа был положен алгоритм Рунге - Кутты - Фельберга 4(5) порядка. В результате были подтверждены выводы качественного характера, а именно:

1) автоколебательные режимы возникают при переходе через область

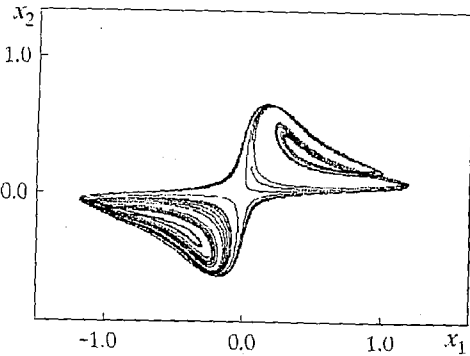
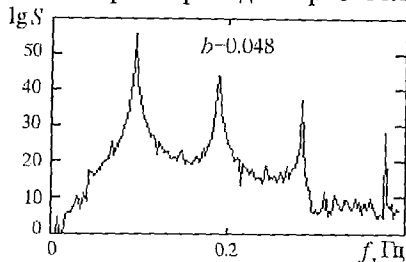


Рис. 2. Странный аттрактор модели Гарела - Росслера: $a=0.1, b=0.0523, c=1.0$

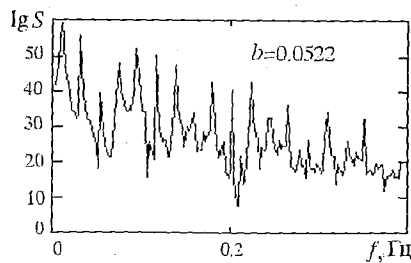
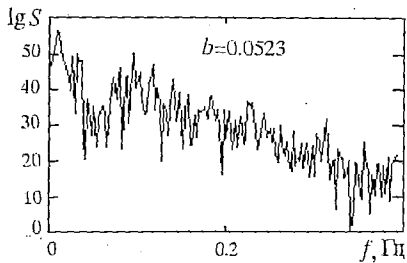
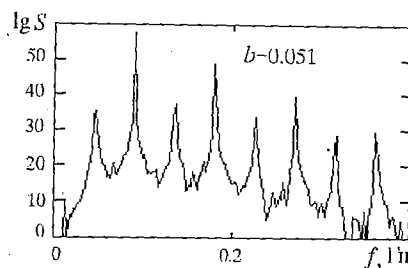


Рис. 3. Последовательность бифуркаций удвоения периода: появление в спектре кратных гармоник; $a=0.1, c=1.0$

устойчивости стационарного решения (2) в пространстве параметров системы; обнаружено несколько предельных циклов, например, при значениях управляющих параметров $a=0.2, b=0.05, c=1.0$ или $a=5.0, b=1.15, c=1.0$;

2) обнаружено явление бифуркации удвоения периода предельного цикла; факт бифуркации дополнительно фиксируется появлением в спектре гармоники с частотой, вдвое меньшей основной (рис. 1);

3) в системе (1) возможен автостохастический режим; получен динамический хаос при значениях управляющих параметров $a=0.1, b=0.0523, c=1.0$ (рис. 2). Переход к нему, как и предполагалось, совершается через последовательность бифуркаций удвоения периода (рис. 3). Кроме того, при переходе параметра b в

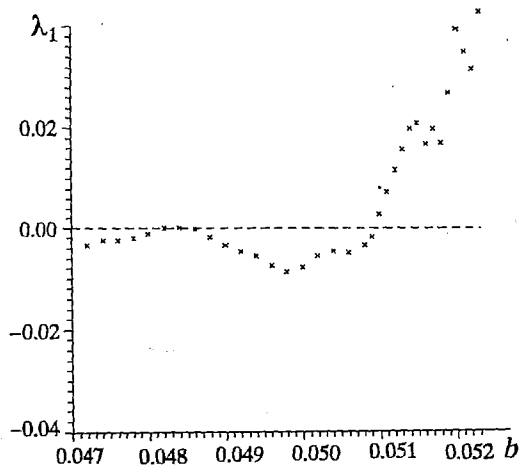


Рис. 4. Зависимость максимального показателя Ляпунова от параметра b : $a=0.1, c=1.0$

закритическую область максимальный ляпуновский показатель становится больше нуля (рис. 4), что является дополнительным аргументом в пользу существования хаоса.

В заключение авторы выражают благодарность В.В.Алексееву за оказанную помощь.

Библиографический список

1. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. Нелинейная физика. Стохастичность и структуры // Физика XX века. Развитие и перспективы. М.:Наука,1985.
2. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука,1990.
3. Свирежев Ю.М. Нелинейные волны. Диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука,1987.
4. Alekseev V.V., Kornilovsky A.N. Ecosystem stochasticity model // Ecol. Model. 1985. Vol.28. P.217.
5. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем //УФН. 1983. Т.141, вып.2. С.343.
6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.:Наука,1974.
7. Гарел Д., Гарел О. Колебательные химические реакции. М.:Мир,1986.
8. Алексеев В.В., Харрасов М.Х. О последовательности бифуркаций удвоения периода в моделях типа Росслера // ТМФ. 1991. Т. 88, № 1.С.96.

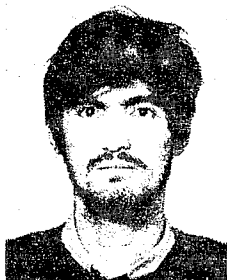
Башкирский государственный
университет

Поступила в редакцию 18.05.94
после переработки 02.02.95

PERIODIC SOLUTIONS OF GUREL - ROSSLER MODEL

S.D. Tulebaev, M.Kh. Kharrassov

On the basis of the Bogoljubov's asymptotic methods the existence of self-oscillating modes and a sequence of the period doubling bifurcation in dynamical Gurel - Rossler model are demonstrated. Qualitative results are confirmed by numerical calculations.



Тулєбаєв Салават Дильмухаметович - родился в 1970 году в Уфе. В 1993 году окончил физический факультет Башкирского государственного университета. С 1993 года - аспирант кафедры теоретической физики.



Харрасов Мухаммед Хадисович родился в 1948 году. После окончания физико-математического факультета (1971) работает в Башкирском государственном университете. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1977). С 1988 года - доцент кафедры теоретической физики. С ноября 1991 года по настоящее время - докторант физического факультета МГУ.