Изв.вузов «ПНД», т.3, № 1, 1995 УДК 534.222:539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

А.И. Землянухин, Л.И. Могилевич

Проанализирована эволюция нелинейных продольных волн в упругих и нелинейно-упругих цилиндрических оболочках. В упругих оболочках выявлены одномерные и двумерные солитоны уравнений КдВ и Кадомцева - Петвиашвили. Показано, что в нелинейно-упругих оболочках существуют одномерные солитоны уравнения мКдВ. Учет диссипативных эффектов позволил получить для компоненты продольной деформации эволюционные уравнения, близкие к интегрируемым.

Два последних десятилетия отмечены значительными успехами в исследовании нелинейных волновых процессов в акустических волноводах. Эти успехи связаны, главным образом, с развитием быстро прогрессирующей теории солитонов. Теоретическое обоснование существования солитонов деформаций в стержнях и пластинах и положительные результаты их экспериментального наблюдения [1,2] позволили существенно расширить имеющиеся представления о нелинейной динамике деформируемых твердых тел. Между тем, нелинейный волновой процесс в цилиндрических оболочках, волноводные свойства которых находят широкое практическое применение, изучен недостаточно. Поэтому целью настоящего исследования является анализ распространения нелинейных волн деформаций в упругих и нелинейно-упругих цилиндрических оболочках с позиций теории солитонов.

При решении динамических задач теории тонких оболочек обычно используются два основных подхода. Первый подход (классический) базируется на гипотезах Кирхгофа - Лява, а соответствующие модели облочек называют моделями первого приближения. Второй подход, связываемый с именем С.П.Тимошенко, в дополнение к «классическим» деформациям, учитывает деформации, связанные с поперечными силами и инерцией вращения. Модели, основанные на таком подходе, называют моделями второго приближения [3]. Уравнения движения для модели первого приближения имеют параболический тип, тогда как во втором случае получаются уравнения гиперболического типа, наиболее часто используемые при описании волновых явлений. Между тем, в статье [4] было показано, что при исследовании эволюции нелинейных продольных волн в оболочках оба подхода приводят к одинаковым результатам, то есть в данном случае параболичность уравнений модели Кирхгофа - Лява не является недостатком, как и гиперболичность уравнений модели Тимошенко не является преимуществом. Это связано с тем, что рассматриваемые волны деформаций являются дисперсионными [5]. Дисперсионность волн в оболочках является прямым следствием их тонкостенности (то же относится к стержням и пластинам).

Уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа - Лява имеют вид [3]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}-\mu k_y\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}[(\frac{\partial U}{\partial x})^2+(\frac{\partial V}{\partial x})^2+$$

$$+(\frac{\partial W}{\partial x})^2]+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}-\frac{\gamma}{g}\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}-k_y\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[(\frac{\partial U}{\partial y})^2+(\frac{\partial V}{\partial y})^2+(\frac{\partial W}{\partial y})^2]+$$

$$+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{\gamma}{g}\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{h^2}{12}\nabla^4 W-\mu k_y\frac{\partial U}{\partial x}-k_y\frac{\partial V}{\partial y}+k_y^2 W-\frac{\mu k_y}{2}[(\frac{\partial U}{\partial x})^2+(\frac{\partial V}{\partial x})^2+(\frac{\partial W}{\partial x})^2]-$$

$$-\frac{k_y}{2}[(\frac{\partial U}{\partial y})^2+(\frac{\partial V}{\partial y})^2+(\frac{\partial W}{\partial y})^2]-\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial W}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial x}+\mu\frac{\partial V}{\partial y}-\mu k_y W)+\ldots]+$$

$$+\frac{\gamma}{g}\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0. \qquad (3)$$

В уравнениях (1)-(3) U, V, W - перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлениях x, y и z соответственно, E - модуль Юнга, μ - коэффициент Пуассона, $k_y = 1/R$ - параметр кривизны, γ - удельный вес материала оболочки, g - ускорение свободного падения, t - время, h - толщина оболочки,

$$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Для исследования уравнений движения (1)-(3) введем в рассмотрение безразмерные независимые и зависимые переменные

$$U^*=\frac{U}{A},\quad V^*=\frac{V}{A},\quad W^*=\frac{W}{h},\quad X^*=\frac{x}{l},$$

$$Y^*=\frac{y}{R},\qquad t^*=(\frac{E\,g}{\gamma(1-\mu^2)})^{1/2}\frac{t}{l}, \qquad (4)$$

где A - амплитудный параметр возмущения, l - характерная длина волны. В дальнейшем звездочки над безразмерными переменными опускаем.

Подстановка переменных (4) в уравнения (1) - (3) позволяет выявить в них четыре малых параметра

$$\varepsilon=\frac{A}{l},\quad \delta_1=\frac{(hR)^{1/2}}{l},\quad \delta_2=\frac{h}{R},\quad \delta_3=\frac{A}{R}, \qquad (5)$$

характеризующих соответственно нелинейность волнового процесса, его дисперсию, тонкостенность оболочки, а также дифракционную расходимость квазиплоской волны.

Заметим, что в отличие от пластинок, характеризуемых параметром дисперсии $\delta = h/l$, оболочечный дисперсионный параметр δ_1 зависит и от радиуса кривизны R. При этом $\delta_1 = (1-\mu^2)^{-1/4} Z^{-1/2}$, где Z - широко используемый в динамике оболочек параметр Батдорфа [6].

Будем считать, что возмущение распространяется с постоянной скоростью вдоль образующей оболочки, медленно эволюционирует в окружном направлении и медленно меняет свои параметры во времени. Согласно методу многих масштабов [7], введем в рассмотрение новые независимые переменные и разложения зависимых переменных по степеням малого параметра ε, соответствующие предположению о характере возмущения

$$\begin{aligned} &\xi = x - Ct\,, \quad U = U_0 + \varepsilon U_1, \\ &\eta = \varepsilon y, \quad V = \varepsilon^{1/2} (V_0 + \varepsilon V_1), \\ &\tau = \varepsilon t\,, \quad W = W_0 + \varepsilon W_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим случай, когда параметры нелинейности, дисперсии и тонкостенности имеют одинаковый порядок малости ($\varepsilon \sim \delta_1 \sim \delta_2$). Кроме того, предположим, что параметры дифракционной расходимости и нелинейности связаны следующим образом ($\delta_3 \sim \varepsilon^{1/2}$).

Подставляя переменные (6) в уравнения движения, получим в нулевом (по ε) приближении следующую систему уравнений (здесь и далее по тексту нижний буквенный индекс обозначает дифференцирование по соответствующей независимой переменной):

$$(1-C^2)U_{0\xi\xi} - \mu W_{0\xi} = 0\,, \tag{7}$$

$$\left(\frac{1-\mu}{2} - C^2\right)V_{0\xi\xi} + \frac{1+\mu}{2} U_{0\xi\eta} - W_{0\eta} = 0\,, \tag{8}$$

$$W_0 - \mu U_{0\xi} = 0\,. \tag{9}$$

Из уравнения (9) находим связь между безразмерными нормальным перемещением и осевой деформацией

$$W_0 = \mu U_{0\xi}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (7), определяем безразмерную скорость распространения возмущения $C^2 = 1-\mu^2$. Используя (10), из уравнения (8) после интегрирования по ξ получим связь между сдвиговыми деформациями в волновом пучке

$$U_{0\eta} = (1+2\mu)V_{0\xi}. \tag{11}$$

В следующем приближении имеем систему уравнений

$$\mu^2 U_{1\xi\xi} - \mu W_{1\xi} + \frac{1-\mu}{2} U_{0\eta\eta} + \frac{1+\mu}{2} V_{0\xi\eta} + U_{0\xi}U_{0\xi\xi} + 2CU_{0\xi\tau} = 0, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\mu U_{1\xi\eta} - W_{1\eta} + V_{0\eta\eta} + \frac{1+\mu}{2} U_{0\xi}U_{0\xi\eta} + \frac{1-\mu}{2} U_{0\eta}U_{0\xi\eta} + \\ &+ \frac{1-\mu}{2} U_{1\xi\eta} + \left[\frac{1-\mu}{2} - C^2\right]V_{1\xi\xi} + 2CV_{0\xi\tau} = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\mu U_{1\xi} - W_1 + V_{0\eta} + \frac{\mu}{2} U_{0\xi}^2 + C^2 W_{0\xi\xi} = 0. \tag{14}$$

Заметим, что первые два слагаемых уравнения (12) равны двум первым слагаемым уравнения (14), умноженного на μ и продифференцированного по ξ. Тогда, используя (11), получим, приравнивая соответствующие слагаемые в (12) и (14), уравнение Кадомцева - Петвиашвили для компоненты продольной деформации U_0:

$$U_{0\xi\tau} + \alpha U_{0\xi} U_{0\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = - \gamma U_{0\eta\eta}, \qquad (15)$$

где $\alpha = (1-\mu^2)^{1/2}/2$, $\beta = \mu^2(1-\mu^2)^{1/2}/2$, $\gamma = (1-\mu^2)^{1/2}(1+2\mu)^{-1}/2$.

В пространственно-одномерном случае (случай цилиндрической симметрии, игнорирующий зависимость от окружной координаты) имеем вместо (15) уравнение Кортевега - де Вриза (КдВ)

$$U_{0\xi\tau} + \alpha U_{0\xi} U_{0\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = 0. \qquad (16)$$

Известно [1], что уравнение (15) допускает частные решения в виде локализованных двумерных образований - алгебраических солитонов. Солитонные решения уравнения КдВ также хорошо известны [5]. Таким образом, в упругих цилиндрических оболочках существуют одномерные и двумерные солитоны деформаций уравнений (15) и (16).

Для исследования эволюции нелинейных продольных волн в оболочке проанализируем систему уравнений (12) - (14). Введем в рассмотрение новую пространственную «продольно-сдвиговую» координату $\chi = \xi + \eta$. Тогда после домножения на μ уравнений (13) и (14) и дифференцирования (14) по χ можно заметить, что первые два слагаемых всех трех уравнений системы равны.

Приравнивая соответствующие слагаемые уравнений (12) и (13), получим для продольно-сдвиговой деформации $U_{0\chi}$ нелинейное волновое уравнение

$$U_{0\chi\tau} + \alpha_1 U_{0\chi} U_{0\chi\chi} + \beta_1 U_{0\chi} = 0, \qquad (17)$$

где $\alpha_1 = (1-\mu^2)^{1/2}(1+2\mu)(2+3\mu)^{-1}$, $\beta_1 = 1/(4+6\mu)^{-1}$.

Замена переменных $\tau = \tau^*$, $\chi = \chi^* - \beta_1\tau$ переводит (17) в уравнение опрокидывающейся волны Римана (звездочки опускаем)

$$U_{0\chi\tau} + \alpha_1 U_{0\chi} U_{0\chi\chi} = 0\,. \qquad (18)$$

С другой стороны, приравнивая соответствующие слагаемые (13) и (14), получим для $U_{0\chi}$ уравнение КдВ

$$U_{0\chi\tau} + \alpha^2 U_{0\chi} U_{0\chi\chi} + \beta^2 U_{0\chi\chi\chi\chi} = 0, \qquad (19)$$

где $\alpha^2 = (1-\mu)^{1/2}(1+\mu)^{-1/2}(1+2\mu)$, $\beta^2 = \mu(1-\mu^2)(1+2\mu)$.

Итак, компонента продольно-сдвиговой деформации эволюционирует либо согласно уравнению волны Римана (18), либо как солитон уравнения КдВ (19). Обе эти возможности равновероятны.

Таким образом, проведенный с помощью метода многих масштабов асимптотический анализ уравнений (1)-(3), позволяет следующим образом описать эволюцию слабодвумерного пучка нелинейных продольных волн в цилиндрической оболочке.

Существует быстрый (линейный) масштаб времени, в течение которого имеется волна, бегущая без изменения профиля с постоянной скоростью.

Далее, существует более медленный масштаб времени, в течение которого изменение параметров волны за счет нелинейности, дисперсии и дифракционной расходимости приводит к разбиению исходного импульса на одномерные и слабодвумерные солитоны.

На этом же этапе происходит образование «продольно-сдвиговых» волн, распространяющихся либо в виде солитонов, либо в виде волн Римана. Можно сказать, что волновой процесс перестает быть однозначно определенным и появляются элементы хаотичности.

В любом случае взаимодействие неустойчивых к поперечным возмущениям солитонов уравнения (16) с волнами уравнений (18) или (19) приводит к их опрокидыванию [8] и, возможно, разрушению. Это отличает эволюцию солитонов в деформируемых твердых телах от гидродинамических солитонов, разрушающихся постепенно, вследствие естественной диссипации.

При решении многих динамических задач механики сплошной среды появляется необходимость учета диссипации энергии. В теории оболочек энергетические потери обычно учитываются путем введения в уравнение (3) дополнительного слагаемого $\varepsilon_Д \gamma W_t/g$ ($\varepsilon_Д$ - коэффициент демпфирования, так называемое конструктивное демпфирование). Тогда метод многих масштабов при выполнении условия $\varepsilon_Д \sim \varepsilon^{1/2}$ позволяет получить вместо (15) и (16) близкие к интегрируемым уравнения Кадомцева - Петвиашвили - Бюргерса (КПБ) и Кортевега - де Вриза - Бюргерса (КдВБ)

$$U_{0\xi\tau} + \alpha U_{0\xi} U_{0\xi\xi} + \chi U_{0\xi\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = -\gamma U_{0\eta\eta}, \qquad (20)$$

$$U_{0\xi\tau} + \alpha U_{0\xi} U_{0\xi\xi} + \chi U_{0\xi\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = 0, \qquad (21)$$

где $\chi = -\mu^2/2$.

Теперь рассмотрим нелинейные продольные волны в нелинейно-упругой цилиндрической оболочке. Зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций e_i примем в следующей форме

$$\sigma_i = Ee_i - me_i^3, \qquad (22)$$

где E и m - константы материала оболочки, определяемые экспериментально. Уравнения движения элемента оболочки в данном случае имеют чрезвычайно громоздкий вид. Их редукция, проводимая описанным выше методом многих масштабов, приводит в нулевом приближении к системе уравнений, совпадающей с системой (7) - (9). Это закономерно, так как зависимость $\sigma_i(e_i)$, принятая в форме (22), разделяет процесс на упругую и нелинейно-упругую составляющие.

Система уравнений, возникающая в первом нелинейном приближении, приводит к модифицированному уравнению Кадомцева - Петвиашвили для компоненты продольной деформации $U_{0\xi}$

$$U_{0\xi\tau} - \alpha_3 U_{0\xi}^2 U_{0\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = -\gamma U_{0\eta\eta}, \qquad (23)$$

где $\alpha^3 = 2m(1-\mu-\mu^2-\mu^3)(1-\mu^2)^{-1/2}/E$, а коэффициенты β и γ те же, что и в случае упругой оболочки. Эволюционное уравнение (23) не обладает бесконечным набором законов сохранения и не интегрируется методом обратной задачи рассеяния [9], то есть слабодвумерные нелинейно-упругие волны деформаций солитонами не являются.

В случае независимости волнового процесса от окружной координаты вместо (23) имеем модифицированное уравнение Кортевега - де Вриза (мКдВ) для $U_{0\xi}$

$$U_{0\xi\tau} - \alpha_3 U_{0\xi}^2 U_{0\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = 0. \qquad (24)$$

Солитонные и бризерные решения уравнения мКдВ хорошо известны. Таким образом, в нелинейноупругих оболочках существуют пространственно-одномерные солитоны уравнения мКдВ (24).

Уравнения КдВ и мКдВ связаны между собой преобразованием Миуры, то есть существует замена переменных, переводящая решения одного уравнения в решения другого. Это говорит о внутренней взаимосвязи динамических процессов, протекающих в упругих и нелинейно-упругих цилиндрических оболочках.

Эволюция нелинейно-упругих солитонов аналогична описанной для упругого случая. Отличие заключается в том, что временной масштаб, соответствующий устойчивому поведению солитонов уравнения мКдВ, характеризуется образованием продольно-сдвиговых (с пространственной координатой $\chi = \xi+\eta$) простых волн или солитонов уравнений

$$\alpha_4 U_{0\chi\tau} - \beta_2 U_{0\chi}{}^2 U_{0\chi\chi} + \gamma_2 U_{0\chi\chi} = 0 , \tag{25}$$

где $\alpha_4 = 2(1-\mu)^{1/2}(1+\mu)/(1+2\mu)$, $\gamma_2 = (1-\mu^2)/(1+2\mu)$,

$$\beta_2 = 4m(1-\mu-\mu^2-\mu^3)/E - 2\mu(1-\mu)m[(2+2\mu)/(1+2\mu) - \mu]/3E,$$

и

$$U_{0\chi\tau} - \alpha_5 U_{0\chi}{}^2 U_{0\chi\chi} - \beta_3 U_{0\chi\chi\chi\chi} = 0, \tag{26}$$

где $\alpha_5 = m(1-\mu)(1+2\mu)(1-\mu^2)^{-1/2}[(2+2\mu)/(1+2\mu) - \mu]/E$, $\beta_3 = \mu(1+2\mu)(1-\mu^2)^{1/2}/2$.

Взаимодействие с этими продольно-сдвиговыми волнами является причиной разрушения солитонов уравнения мКдВ (24).

Учет энергетических потерь в нелинейно-упругой оболочке приводит к тому, что уравнения (23) и (24) дополняются диссипативными членами. Таким образом, получаются модифицированные варианты уравнений КПБ (20) и КдВБ (21):

$$U_{0\xi\tau} - \alpha_3 U_{0\xi}{}^2 U_{0xx} + \chi U_{0\xi\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = -\gamma U_{0\eta\eta}, \tag{27}$$

$$U_{0\xi t} - \alpha_3 U_{0\xi}{}^2 U_{0\xi\xi} + \chi U_{0\xi\xi\xi} - \beta U_{0\xi\xi\xi\xi} = 0. \tag{28}$$

Аналитическое и численное исследование уравнений (27) и (28) представляет самостоятельный интерес.

Выводы об эволюции упругих и нелинейно-упругих солитонов в оболочках справедливы и для тонких пластин и стержней.

Библиографический список

1. *Потапов А.И.* Нелинейные волны деформаций в стержнях и пластинах. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1985.

2. *Кившарь Ю.С., Сыркин Е.С.* Сдвиговые солитоны в упругой пластине // Акуст. журнал. 1991. Т.37. Вып. 1.

3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.

4. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Эволюция нелинейных продольных волн в цилиндрических оболочках. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1993. 45 с. Деп. в ВИНИТИ № 1737 - В93.

5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.

6. *Batdorf S.B.A.* A simplified method of elastic stability analysis for thin cylindrical shells. 1. Donnell's equations // NACA Tech. Note. 1947. № 1341.

7. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.

8. *Богоявленский О.И.* Опрокидывающиеся солитоны. М.: Наука, 1991.

9. *Абловиц С., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.

Саратовский технический университет
Саратовский агротехнический университет

Поступила в редакцию 19.09.94
после переработки 16.02.95

NONLINEAR DEFORMATION WAVES IN CYLINDRICAL SHELLS

A.I. Zemlyanukhin, L.I. Mogilevich

The evolution of nonlinear longitudinal waves in elastic and nonlinear-elastic cylindrical shells has been analysed. In elastic shells one-dimensional and two-dimensional solitons of the equations KdV and Kadomtsev - Petviashvili have been revealed. It was demonstrated that there exist one-dimensional solitons of the equation mKdV in nonlinear-elastic shells. Calculation of dissipation effects allowed to get integrable evolution equations for the longitudinal deformation component.

Землянухин Александр Исаевич родился в 1967 году. Окончил механико-математический факультет СГУ (1989) по специальности «Механика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1995). Область научных интересов: нелинейные интегрируемые уравнения в динамических задачах механики твердых деформируемых тел, групповой анализ дифференциальных уравнений.

Могилевич Лев Ильич родился в 1946 году. Профессор, зав. кафедрой «Математика, математическое моделирование и информатика» Саратовского государственного агроинженерного университета. Окончил механико-математический факультет Саратовского государственного университета по специальности «Механика»(1969). Закончил аспирантуру СГУ (1972) по кафедре «Теоретическая механика и аэрогидродинамика». Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1972) по специальности «Механика жидкости, газа и плазмы» и доктора технических наук (1990) по специальности «Гироскопы, навигационные приборы и комплексы». Область научных интересов: нелинейные волны в сплошных средах, механика сложных систем с распределенными параметрами.