



## НОРМАЛЬНЫЕ И КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ПОЛУКЛАССИЧЕСКИХ ЛАЗЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИФРАКЦИЕЙ

*Е.В. Григорьева, С.А. Каценко*

На основе метода нормальных форм рассмотрено формирование поперечных пространственных структур в лазерном излучении: вращающихся и стоячих волн, режимов модовых бленей. Показана возможность сложной динамики при больших размерах системы вследствие нейтральной устойчивости решений укороченных уравнений.

### Введение

В последнее время большое внимание уделяется поперечной динамике оптического излучения лазеров в связи с перспективами их использования в новых информационных технологиях [1-3]. Подробно исследована структура невысоких пространственных мод в лазерах с цилиндрической геометрией [1,2], показана возможность высокомодовых пространственных бифуркаций [3], обсуждаются спонтанное нарушение симметрии и аналогия между оптической и гидродинамической турбулентностями [4,5].

Наиболее интригующим остается вопрос о возникновении когерентного, (упорядоченного) поведения в системах с бесконечным (асимптотически большим) числом возбужденных пространственных мод. Такая ситуация может иметь место, в частности, в системах с «большими» геометрическими размерами. При исследовании нелинейной динамики в случаях, когда критические условия одновременно выполняются для бесконечного числа мод, известные методы интегральных многообразий и нормальных форм не применимы. В настоящей работе для этой цели будет использован алгоритм [7,8] построения специальных эволюционных уравнений, которые играют роль укороченных нормальных форм, причем их нелокальная динамика определяет поведение решений исходной краевой задачи в окрестности состояния равновесия.

Физический процесс в одномерном приближении и в предположении, что линия усиления однородно уширена и в нее попадает одна продольная мода резонатора и достаточно большое число поперечных мод, описывается полуклассическими лазерными уравнениями [1,4,5]

$$\begin{aligned} \partial E / \partial t &= -\mu(E - P) + iD_c \partial^2 E / \partial x^2, \\ \partial P / \partial t &= -(1 + i\Delta)P + NE, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\partial N/\partial t = \gamma[N - N_0 - 1/2(E^*P + EP^*)] + D_n \partial^2 N/\partial x^2,$$

где  $E$  и  $P$  - пропорциональны комплексным амплитудам электрической напряженности световой волны и поляризации активной среды;  $N$  характеризует инверсию населенностей активной среды;  $N_0$  - ее насыщенное (максимальное) значение, определяемое однородной по пространственной переменной накачкой;  $\Delta = (\omega_a - \omega_c)/\gamma_{\perp}$  - частотная расстройка между центром линии усиления  $\omega_a$  и резонатора  $\omega_c$ ; скорости релаксации фотонов в резонаторе  $\mu$  и инверсии населенностей  $\gamma$  нормированы на скорость релаксации поляризации  $\gamma_{\perp}$ ;  $D_c$  - коэффициент дифракции электромагнитной волны;  $D_n$  - коэффициент диффузии носителей инверсной населенности.

Два типа граничных условий будут рассмотрены, чтобы выяснить их влияние на динамику при «больших» геометрических размерах системы.

Периодические граничные условия:

$$E, P, N|_{x=0} = E, P, N|_{x=l},$$

$$\partial E/\partial x, \partial P/\partial x, \partial N/\partial x|_{x=0} = \partial E/\partial x, \partial P/\partial x, \partial N/\partial x|_{x=l}. \quad (2)$$

Наиболее близкий физический объект, соответствующий таким условиям - узкое кольцо активной среды - может быть получен с помощью специальной диафрагмы. Пространственная переменная в этом случае соответствует угловой координате на кольце, поэтому в дальнейшем для удобства поперечный размер системы нормируем к  $2\pi$ :  $l=2\pi$ . Отметим, что такая нормировка приводит к изменению коэффициентов дифракции и диффузии при изменении размеров системы, поскольку  $D_c, D_n \sim l^{-2}$ .

Для систем, имеющих отражающие боковые грани, более пригодны граничные условия Неймана (отсутствие потоков через границу)

$$\partial E/\partial x, \partial P/\partial x, \partial N/\partial x|_{x=0} = \partial E/\partial x, \partial P/\partial x, \partial N/\partial x|_{x=2\pi} = 0. \quad (3)$$

Геометрия такой задачи соответствует узкой полоске активной среды длиной  $l=2\pi$  и может быть реализована в полупроводниковых лазерных устройствах.

В разделе 1 рассмотрены критические случаи, возникающие в окрестности первого порога генерации и показано существенное различие задач с конечным и малым значением коэффициента дифракции. В разделе 2 построены универсальные обыкновенные дифференциальные уравнения для параметров порядка - нормальные формы, и с их помощью анализируются решения исходной задачи в случаях, когда коэффициент дифракции не является малым параметром. В последующих разделах предполагается, что коэффициент дифракции является малым. В разделе 3 построены квазинормальные формы для установившихся режимов, формирующихся на невысоких модах; в разделе 4 возбуждаемые моды являются асимптотически большими.

На базе полученных результатов сформулирован ряд выводов, объясняющих экспериментальные данные.

## 1. Линейный анализ

Характер потери устойчивости состояния равновесия ( $E=P=0, N=N_0$ ) в системе (1) для обоих типов граничных условий определяется корнями характеристического уравнения

$$(\gamma + D_n k^2 + \lambda)[\lambda^2 + \lambda(\mu + 1 + i\Delta + iD_c k^2) + \mu(N_0 + 1 + i\Delta) + iD_c k^2(1 + i\Delta)] = 0. \quad (4)$$

Критический случай реализуется, если при некоторых значениях волновых чисел

$k_s, s=1,2,\dots$  имеются корни  $\lambda_k$  с нулевой вещественной частью, а для остальных  $k \neq k_s$  характеристические числа  $\lambda_k$  имеют отрицательные вещественные части.

Из (4) следует, что корень с нулевой вещественной частью  $\lambda_k = i\omega_{0k}$  имеет место при значениях параметров  $\Delta = \Delta^{\sim}, D_e = D_e^{\sim}, N_0 = N_0^{\sim}$  таких, что [3]

$$N_0^{\sim} = 1 + \left( \frac{\Delta^{\sim} - D_e^{\sim} k^2}{1 + \mu} \right)^2, \quad \omega_{0k} = \pm \frac{D_e^{\sim} k^2 + \Delta^{\sim} \mu}{1 + \mu}. \quad (5)$$

Рассмотрим отдельно критические случаи, возникающие при конечном (не малом) значении дифракции  $D_e$  и малом значении  $D_e \rightarrow 0$ .

Если дифракция не мала и частотная расстройка в системе отрицательная ( $\Delta < 0$ ), то бифуркация от устойчивого состояния равновесия к периодическому решению происходит на нулевой пространственной моде ( $k_0 = 0$ ) при превышении накачки порогового значения (рис.1, а)

$$N_0^{\sim} = 1 + \delta^2, \quad (6)$$

где обозначено  $\delta = -\Delta^{\sim}/(1+\mu)$ . Частота автоколебаний соответствующей линеаризованной системы близка к  $\omega_0 = \mu\delta$ . Такое поведение соответствует поведению точечной системы (без дифракции).

Если дифракция не мала и расстройка положительная ( $\Delta > 0$ ), то потеря устойчивости стационарного решения обусловлена как «временной», так и «пространственной» динамикой и может иметь место на двух, трех или четырех пространственных модах.

Критические условия для двух мод с волновыми числами  $k = \pm m$  осуществляются при значениях параметров  $\Delta = \Delta^{\sim}, D_e = D_e^{\sim}, N_0 = N_0^{\sim}$  таких, что (рис.1, б)

$$(\Delta^{\sim}/D_e^{\sim})^{1/2} + \theta = m, \quad N_0^{\sim} = 1 + \delta_1^2,$$

$$\delta_1 = (\Delta^{\sim} - D_e^{\sim} m^2)/(1 + \mu). \quad (7)$$

Параметр  $\theta$  дополняет  $(\Delta^{\sim}/D_e^{\sim})^{1/2}$  до целого числа. Мнимые характеристические числа:  $\lambda_{\pm m} = i\omega_1$ , где  $\omega_1 = -\Delta^{\sim} + \delta_1$ , а остальные  $\lambda_k$  имеют отрицательные вещественные части.

Три пространственные моды с волновыми числами  $k = 0, \pm 1$  возбуждаются одновременно при значениях параметров (рис.1, в)

$$N_0^{\sim} = 1 + \delta^2, \quad D_e^{\sim} = 2\Delta^{\sim}. \quad (8)$$

Соответствующие характеристические числа:  $\lambda_0 = i\delta\mu, \lambda_{\pm 1} = i\delta(\mu+2)$ .

Четыре моды с волновыми числами  $k = \pm m, \pm(m+1)$  одновременно возбуждаются при условии, что (рис.1, г)

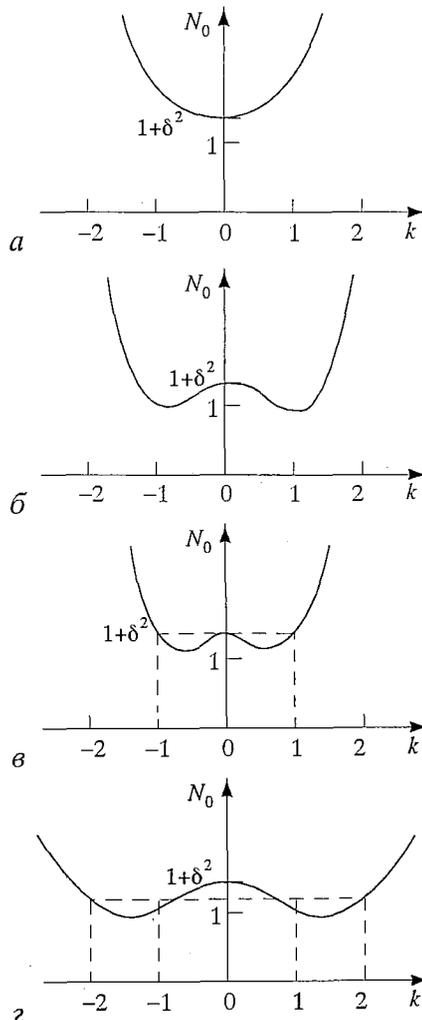


Рис.1

$$N_0 \sim 1 + \delta^2[(2m+1)/M]^2, \quad D_e \sim 2\Delta/M, \quad M = 2m^2 + 2m + 1. \quad (9)$$

При этом характеристические числа вычисляются следующим образом:

$$\lambda_{\pm m} = i\delta(\mu + 2m^2/M), \quad \lambda_{\pm(m+1)} = i\delta(\mu + 2(m+1)^2/M).$$

Более сложная ситуация возникнет, если значение коэффициента дифракции является малым. Например, с увеличением поперечных размеров системы и в результате нормировки, сохраняющей краевые условия (2) или (3), получаем  $D_e = \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Тогда критические условия могут быть выполнены (асимптотически) сразу для бесконечно большого числа пространственных мод.

При отрицательной расстройке ( $\Delta < 0$ ) и малой дифракции условия потери устойчивости одинаковы для всех мод с номерами  $k_m = k_0 + m$ ,  $k_0 = 0, m = 0, \pm 1, \dots$  (рис. 2, а):

$$N_{0m} \sim 1 + [\delta + \varepsilon m^2/(1+\mu)]^2 = N_0 \sim 1 + O(\varepsilon), \quad \lambda_m = i\delta\mu + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (10)$$

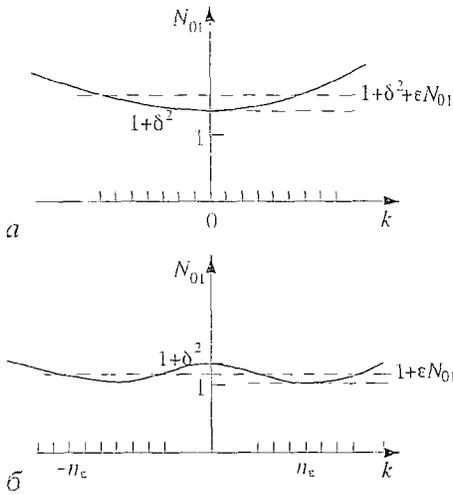


Рис. 2

При положительной расстройке ( $\Delta > 0$ ) и малой дифракции одновременно теряют устойчивость множество мод с номерами  $k_m = \pm[(\Delta/\varepsilon)^{1/2} + \theta] + m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  («внутренний» параметр  $\theta \in (-1, 0]$  дополняет  $(\Delta/\varepsilon)^{1/2}$  до целого числа:  $\theta = \{(\Delta/\varepsilon)^{1/2}\} - (\Delta/\varepsilon)^{1/2}$ , (рис. 2, б). Для всех таких мод при накачке

$$N_{0m} \sim 1 + O(\varepsilon) \quad (11)$$

характеристические числа имеют асимптотически малую действительную часть  $\lambda_k = -i\Delta + O(\varepsilon)$ .

Ниже построим решения нелинейной системы (1) в окрестности точки бифуркации каждого типа.

## 2. Нормальные формы в случае, когда коэффициент дифракции $D_e$ не является малым

В этом разделе используем традиционные методы теории нормальных форм [6]. Вначале рассмотрим случай отрицательной расстройки ( $\Delta < 0$ ). При превышении накачкой порогового значения (6)  $N_0 = N_0 \sim 1 + \varepsilon N_{01}$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , локальная динамика краевой задачи (1), (2), (3) определяется уравнением (нормальной формой) на одномерном комплексном центральном многообразии

$$d\xi/d\tau = N_{01}R\xi - R\xi|\xi|^2 + O(\varepsilon), \quad (12)$$

где  $R = \frac{\mu(1+i\delta\nu)}{(1+\mu)(1+\delta^2\nu^2)}$ ,  $\nu = \frac{1-\mu}{1+\mu}$ ,  $\tau = \varepsilon t$ .

По функции  $\xi(\tau)$  равномерно на любом конечном отрезке изменения времени  $t$  «восстанавливаются» решения краевой задачи (1)-(3) с помощью формул

$$E = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau) \exp(i\omega_0 t + i\varphi) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$P = \varepsilon^{1/2} a_0 \xi(\tau) \exp(i\omega_0 t + i\varphi) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad N = N_0 + O(\varepsilon), \quad \sigma_0 = 1 + i\delta. \quad (13)$$

При  $N_{01} > 0$  нормальная форма (12) имеет семейство зависящих от параметра  $\varphi$  устойчивых стационарных решений  $|\xi|^2 = N_{01}$ , которым соответствуют устойчивые периодические решения исходной системы с частотой генерации  $\omega_0 = \mu\delta + O(\varepsilon^2)$ . Такое поведение одинаково для краевых задач обоого типа и аналогично поведению сосредоточенной системы.

В случае положительной расстройки ( $\Delta > 0$ ) потеря устойчивости может происходить на ненулевых пространственных модах, и результаты существенно зависят от граничных условий.

Рассмотрим сначала систему (1) с периодическими граничными условиями и с параметрами (7), при которых возбуждаются две моды с волновыми числами  $m = \pm[(\Delta \sim / D_c \sim)^{1/2} + \theta]$ . Поведение решений в малой окрестности точки бифуркации  $N_0 = 1 + \varepsilon N_{01}$ ,  $D_c = D_c \sim + \varepsilon D_1$ ,  $\Delta = \Delta \sim + \varepsilon \Delta_1$  определяется нормальной формой на двумерном многообразии

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= (N_{01} - i\Delta_1 - iD_1 m^2 a_1^* / \mu) R_1 \xi - R_1 \xi (|\xi|^2 + b|\eta|^2) + O(\varepsilon), \\ d\eta/dt &= (N_{01} - i\Delta_1 - iD_1 m^2 a_1^* / \mu) R_1 \eta - R_1 \eta (|\eta|^2 + b|\xi|^2) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $R_1 = \frac{\mu(1 + i\delta_1 \nu)}{(1 + \mu)(1 + \delta_1^2 \nu^2)}$ ,  $a_1 = 1 + i\delta_1$ ,  $b = 1 + (1 + 4D_n m^2 / \gamma)^{-1}$ .

Амплитуду генерируемого поля восстанавливаем по формуле

$$E = \varepsilon^{1/2} [\xi(\tau) \exp(i\omega_1 t + mx + i\varphi) + \eta(\tau) \exp(i\omega_1 t - mx + i\varphi_1)] + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Система (14) имеет три стационарных решения. Состояние  $|\xi|^2 = |\eta|^2 \neq 0$ , соответствующее генерации противоположно направленных волн, всегда неустойчиво. Состояния равновесия  $\eta = 0$ ,  $|\xi|^2 = N_{01} + D_1 \delta_1 m^2 / \mu$  и  $\xi = 0$ ,  $|\eta|^2 = N_{01} + D_1 \delta_1 m^2 / \mu$  имеют нулевое и отрицательные вещественные числа  $\mu$ , следовательно, являются устойчивыми. Они соответствуют в исходной задаче режимам генерации лево- или правовращающихся волн (той же устойчивости) с частотой генерации  $\omega_1 \sim = -\Delta \sim + \delta_1 - \varepsilon \mu (\Delta_1 + D_1 m^2 / \mu) (1 + \mu)^{-1} (1 + \delta_1^2 \nu^2)^{-1} + O(\varepsilon^2)$ . Отметим, что отклонение частотной расстройки от критического значения приводит только к изменению частоты генерации и диффузия носителей не оказывает влияния на наблюдаемые процессы в первом приближении.

Для краевой задачи на отрезке с непроницаемыми концами (1), (3) нормальная форма на центральном многообразии запишется следующим образом:

$$d\xi/dt = (N_{01} - i\Delta_1 - iD_1 m^2 a_1^* / \mu) R_1 \xi - R_1 (b+1) \xi |\xi|^2 / 4 + O(\varepsilon). \quad (15)$$

«Одномерность» уравнения (15), в отличие от двумерной системы (14), связана с тем, что в случае краевых условий Неймана номера мод принимают только неотрицательные значения. В исходной задаче стационарным режимам (15) соответствуют режимы генерации типа стоячей волны с частотой  $\omega_1 \sim$  и амплитудой поля, зависящей от величины коэффициента диффузии носителей  $D_n$

$$E(t, x) = 2[\varepsilon(N_{01} + D_1 \delta_1 m^2 / \mu) / (1 + b)]^{1/2} \cos(mx) \exp(i\omega_1 \sim t + i\varphi) + O(\varepsilon).$$

Рассмотрим теперь случай одновременной потери устойчивости трех пространственных мод в задаче с периодическими граничными условиями. Критические условия определяются по формулам (8). Отметим, что в силу специфики задачи резонансных явлений здесь не возникает (речь идет о «главных» резонансах 1:1, 1:2 и 1:3). В окрестности точки бифуркации  $N_0 = 1 + \delta^2 + \varepsilon N_{01}$ ,

$D_c = 2\Delta + \varepsilon D_1$  динамика главных членов разложения определяется нормальной формой

$$\begin{aligned} d\xi/d\tau &= N_{01}R\xi - R\xi[|\xi|^2 + b_0(|\eta|^2 + |\chi|^2)] + O(\varepsilon), \\ d\eta/d\tau &= (N_{01} - iD_1a_0/\mu)R^*\eta - R^*\eta(|\eta|^2 + b_0^*|\xi|^2 + b_1|\chi|^2) + O(\varepsilon), \\ d\chi/d\tau &= (N_{01} - iD_1a_0/\mu)R^*\chi - R^*\chi(|\chi|^2 + b_0^*|\xi|^2 + b_1|\eta|^2) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (16)$$

где  $a_0$ ,  $R$  определены в (12), (13),  $b_0 = 1 + a_0(1 + D_n/\gamma)^{-1}$ ,  $b_1 = 1 + (1 + 4D_n/\gamma)^{-1}$ . Переменные  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\chi$  являются медленными амплитудами возбужденных пространственных мод с волновыми числами  $k=0$  и  $k=\pm 1$ ,  $-1$  и частотами  $\omega_0 = \delta\mu$ ,  $\omega_{\pm 1} = \delta(\mu + 2)$ , соответственно.

Стационарным решениям системы уравнений (16) будут соответствовать установившиеся режимы генерации исходной системы, описываемой уравнениями (1) и (2). Стационарному решению  $|\xi|^2 = N_{01}$ ,  $\eta = \chi = 0$  соответствует генерация однородного по пространству поля  $E = (\varepsilon N_{01})^{1/2} \exp(i\delta\mu t + O(\varepsilon^2))$ , которое устойчиво, если

$$N_{01}B > D_1C, \quad (17)$$

где  $B = (1 - \delta^2\nu)(1 + D_n/\gamma)^{-1}$ ,  $C = 2\delta/(\mu + 1)$ .

Решения  $\xi=0$ ;  $\eta$ ,  $\chi \neq 0$  и  $\xi$ ,  $\eta \neq 0$ ,  $\chi \neq 0$ , отвечающие генерации противоположно бегущих волн, всегда неустойчивы.

Решения  $\xi = \chi = 0$ ,  $\eta \neq 0$  или  $\xi = \eta = 0$ ,  $\chi \neq 0$ , описывающие генерацию бегущей волны  $E = [\varepsilon(N_{01} + D_1C)]^{1/2} \exp(\omega_2 \sim it \pm ix)$ ,  $\omega_2 \sim \delta(\mu + 2) - \varepsilon D_1(\mu + 1)^{-1} + O(\varepsilon^2)$ , устойчивы, если

$$N_{01}B > -D_1C(1+B). \quad (18)$$

В области перекрытия параметров, определяемых условиями (17), (18), реализуется бистабильность режимов генерации, а при дополнительном условии  $0 < B < 1$  (которое для лазеров обычно выполняется, так как  $\mu < 1$ ) возможна генерация визуально наблюдаемой вращающейся неоднородной структуры с интенсивностью

$$I = |E|^2 = \varepsilon[\xi_0^2 + \eta_0^2 + 2\xi_0\eta_0 \cos((2\delta - \varepsilon\omega)t - x)].$$

Для граничных условий Неймана на отрезке активной среды получаем нормальную форму

$$\begin{aligned} d\xi/d\tau &= N_{01}R\xi - R\xi(|\xi|^2 + b_0|\eta|^2/2) + O(\varepsilon), \\ d\eta/d\tau &= (N_{01} - iD_1a_0/\mu)R^*\eta - R^*\eta(b_0^*|\xi|^2 + b_1|\eta|^2/2) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (19)$$

Условия генерации однородного поля с частотой  $\omega_0$  такие же, как в (17), генерация стоячей волны  $E = [2\varepsilon(N_{01} + D_1C)/B_1]^{1/2} \cos(x) \exp(\omega_2 \sim it)$ , где  $B_1 = 1 + [2(1 + 4D_n/\gamma)]^{-1}$ , устойчива, если

$$N_{01}(B - B_1) > -D_1C(1+B). \quad (20)$$

В области перекрытия условий (17) и (20) наряду с однородным и неоднородным режимами генерации возможны также, если  $(1+B)^2 < 2$ , неоднородные расслоения на фоне устойчивых автоколебаний

$$I = |E|^2 = \varepsilon[\xi_1^2 + \eta_1^2 \cos^2(x) + 2\xi_1\eta_1 \cos(x) \cos((2\delta - \varepsilon\omega_1)t)].$$

Амплитуды  $\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\xi_1$ ,  $\eta_1$  и поправки к частотам  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  в закритической области даны в Приложении А.

Для полноты изложения приведем нормальную форму в задаче с перио-

дическими граничными условиями в случае четырех характеристических показателей с нулевой вещественной частью для пространственных мод с номерами  $k=\pm 1, \pm 2$

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= (N_{01} - iD_1 a_2^*/\mu) R_2 \xi - R_2 \xi (|\xi|^2 + b_1 |\eta|^2 + b_2 |\chi|^2 + b_3 |\varepsilon|^2) + O(\varepsilon), \\ d\eta/dt &= (N_{01} - iD_1 a_2^*/\mu) R_2 \eta - R_2 \eta (|\eta|^2 + b_1 |\xi|^2 + b_2 |\chi|^2 + b_3 |\varepsilon|^2) + O(\varepsilon), \\ d\chi/dt &= (N_{01} - iD_1 a_2/\mu) R_2^* \chi - R_2^* \chi (|\chi|^2 + b_2^* |\xi|^2 + b_3^* |\eta|^2 + b_4 |\varepsilon|^2) + O(\varepsilon), \\ d\varepsilon/dt &= (N_{01} - iD_1 a_2/\mu) R_2^* \varepsilon - R_2^* \varepsilon (|\varepsilon|^2 + b_2^* |\xi|^2 + b_3^* |\eta|^2 + b_4 |\chi|^2) + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

где  $R_2 = \mu(1+i\delta_2\nu)/[(1+\mu)(1+\delta_2^2\nu^2)]$ ,  $a_2 = 1+i\delta_2$ ,  $\delta_2 = 2\delta/5$ ,  $b_2 = 1+a_2(1+D_n/\gamma)^{-1}$ ,  $b_3 = 1+a_2(1+9D_n/\gamma)^{-1}$ ,  $b_4 = 1+(1+16D_n/\gamma)^{-1}$ .

Как и раньше, легко могут быть получены области устойчивости режимов генерации лево- или правовращающихся волн с волновыми числами  $k=\pm 1, \pm 2$  и частотами вращения  $\omega_{\pm 1} = \delta(\mu+2/5)$ ,  $\omega_{\pm 2} = \delta(\mu+8/5)$ . Визуально наблюдаемые структуры с частотой вращения  $\omega = 6\delta/5$  образуются при сложении двух волн с разными волновыми числами  $m = \pm(1-2)$ ;  $\pm(1+2)$ . Режимы биения противоположно направленных волн с одинаковыми волновыми числами, как и в предыдущем случае, оказываются неустойчивыми.

### 3. Низкомодовые пространственные бифуркации в случае малых значений коэффициента дифракции

Пусть  $D_0 = \varepsilon$  и  $\varepsilon \rightarrow +0$ . В разделе 1 было показано, в этом случае корней характеристического многочлена, стремящихся к мнимой оси, становится бесконечно много и, следовательно, при превышении порога генерации возбуждается множество пространственных мод. Метод нормальных форм привел бы к необходимости анализировать бесконечную (счетную) систему уравнений сложного вида. Вместо этого, следуя идеологии метода нормальных форм, получим квазинормальную форму для параметров порядка, зависящих от пространственной переменной. Принципиальным моментом является наличие в исходной системе малого параметра дифракции  $\varepsilon$ . Поэтому малый параметр надкритичности, по степеням которого обычно идет разложение решений в ряд\*, оказывается существенно связанным с дифракцией [7,8].

При отрицательной расстройке ( $\Delta < 0$ ) возбуждается множество мод вокруг нулевой пространственной моды. В окрестности критических значений параметров (10) максимальный член разложения, определяющий скорость изменения амплитуд вследствие пространственных взаимодействий, имеет порядок  $\varepsilon$ . Поэтому параметр надкритичности удобно выбрать в форме  $\varepsilon N_{01}$ . Формальные ряды, с помощью которых ищем решение исходной задачи, представлены в (B.1). Для медленных амплитуд получаем следующую квазинормальную форму:

$$d\xi/dt = ia_0^* \mu^{-1} R \partial^2 \xi / \partial x^2 + N_{01} R \xi - R \xi |\xi|^2 + O(\varepsilon), \quad (21)$$

с периодическими граничными условиями для задачи в кольце

$$\xi|_{x=0} = \xi|_{x=2\pi}, \quad \partial \xi / \partial x|_{x=0} = \partial \xi / \partial x|_{x=2\pi},$$

а для задачи с условиями непроницаемости на концах отрезка имеем аналогичную квазинормальную форму (21) с граничными условиями

$$\partial \xi / \partial x|_{x=0} = \partial \xi / \partial x|_{x=2\pi} = 0.$$

\* Ряды, с помощью которых получены квазинормальные формы, приведены в Приложении В; соответствующие формулы имеют номера (B.1) - (B.5).

От нормальной формы (12) уравнение (21) отличается слагаемым  $i\alpha_0^* \mu^{-1} R \partial^2 \xi / \partial x^2 = A$ , которое описывает как дифракционный, так и диффузионный процессы, причем коэффициент возникшей реальной диффузии в (21)  $\text{Re}A = -2\Delta\mu(1+\mu)^{-3} * (1+\delta^2\nu^2)^{-1}$  всегда положительный при  $\Delta < 0$ , в отличие от результатов [4,5], где появлялась нефизическая отрицательная диффузия. Отметим также, что уравнение (21) определено на конечном пространственном интервале и теперь не имеет малых параметров при производной, как в исходной системе.

Комплексное уравнение Гинзбурга - Ландау (21) является одной из базовых моделей в гидродинамике, математической биологии, химической кинетике и подробно исследовалось как аналитически, так и численно [10,12]. В частности, показано, что сложные неоднородные режимы (инвариантные торы, диффузионный хаос, турбулентная динамика дефектов) возможны при разрушении устойчивости однородного решения ( $\partial \xi / \partial x = 0$ ). Линейный анализ показывает, что однородное решение уравнения (21), совпадающее с решением (13), устойчиво относительно малых возмущений, если  $1+c_1c_2 > 0$ , где  $c_1 = (1+\delta^2\nu)[\delta(1-\nu)]^{-1}$ ,  $c_2 = \delta\nu$ . Это неравенство всегда справедливо при отрицательной расстройке. Для  $\Delta < \Delta_0 = -N_{01}(1+\mu)^2/2$ , по-видимому, не существует других решений, кроме однородного и, следовательно, «высокая» размерность критического случая не приводит к усложнению динамики. Поэтому при превышении порога генерации однородная структура поля спонтанно не нарушается. Такой вывод поддерживается также отсутствием экспериментальных фактов возникновения длинноволновой турбулентности через хаотизацию динамики дефектов в лазерах [11], теоретически предсказанной в [4].

Для  $\Delta_0 < \Delta < 0$  наряду с устойчивым однородным решением в уравнении (21) с периодическими граничными условиями появляются простые решения в виде бегущих волн

$$E_k = [\epsilon N_{01} - \epsilon k^2 2\delta / (1+\mu)]^{1/2} \exp(i\omega_k t + ikx + i\phi),$$

где  $\omega_k = \delta\mu - \epsilon [k^2 / (1+\mu) + \mu\delta\nu / (\mu+1) / (1+\delta^2\nu^2)] + O(\epsilon^2)$ ,  $k=0,1,2 \dots$ , причем только некоторые из них являются устойчивыми. Число устойчивых бегущих волн возрастает при  $\Delta \rightarrow -0$ , и появляются длительные, неоднородные переходные режимы [12,13]. Следовательно, здесь возможно нарушение симметрии однородного состояния при жестком возбуждении.

Для граничных условий Неймана в области устойчивости однородного режима уравнение (21) других решений не имеет [10].

При значениях расстройки  $\Delta$ , близких к 0 (как отрицательных, так и положительных), динамика формируется также на пространственных модах, ближайших к нулевой. Формальные ряды для построения решения в этом случае даны в (B.2). С их помощью получаем квазинормальную форму для параметра порядка

$$\partial \xi / \partial \tau = K\mu^{-1} \partial^2 \xi / \partial x^2 + (N_{01} - i\Delta_1) K \xi - K \xi |\xi|^2 + O(\epsilon), \quad (22)$$

где  $K = \mu / (\mu+1)$ , с соответствующими граничными условиями. Уравнение (22) допускает решения в виде устойчивых бегущих волн для периодических граничных условий

$$E = (\epsilon N_{01})^{1/2} \exp[i\epsilon t (-K\Delta_1 - m^2 / (\mu+1)) + imx], \quad m=0,1,2 \dots$$

Таким образом, заключаем, что при малых расстройках наряду с устойчивым однородным режимом может реализоваться мультистабильность пространственных неоднородных структур. Для граничных условий Неймана имеем только устойчивое однородное решение.

#### 4. Высокомодовые пространственные бифуркации при малой дифракции и положительной расстройке

Пусть  $D_\epsilon = \epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow +0$ ,  $\Delta > 0$ . В этом случае пространственно-временная динамика формируется при участии асимптотически большого числа возбужденных пространственных мод вокруг мод с большими номерами  $n_\epsilon = \pm((\Delta/\epsilon)^{1/2} + \theta)$ , где  $\theta \in (-1, 0]$  и дополняет  $(\Delta/\epsilon)^{1/2}$  до целого числа.

Главный член разложения, определяющий скорость изменения амплитуд вследствие пространственных взаимодействий, имеет порядок  $\epsilon^{1/2}$ . Поэтому параметр надкритичности удобно выбрать в виде  $\epsilon^{1/2}N_{01}$  и рассматривать малую окрестность критического параметра  $N_0 = 1 + \epsilon^{1/2}N_{01}$ . Так как малость коэффициента дифракции  $\epsilon$  часто связана с большими поперечными размерами системы, то и коэффициент диффузии носителей удобно выбрать в виде  $D_n = \epsilon d_n$ . Конечно, дифракция, накачка и диффузия носителей - физически независимые параметры. Эта независимость учитывается в произвольном выборе множителей  $N_{01}$  и  $d_n$ . Тогда, как будет видно ниже, при некоторых их значениях может возникнуть необходимость повторной нормализации уже нормализованных уравнений.

В окрестности состояния равновесия решение системы (1) с периодическими граничными условиями следует искать в виде ряда, данного в (B.3). Динамика медленных амплитуд определяется квазинормальной формой

$$\begin{aligned} \partial \xi / \partial \tau' + \alpha \partial \xi / \partial x &= (N_{01} - i\Delta^{1/2}2\theta/\mu)K\xi - K\xi(|\xi|^2 + b^-\eta^2) + O(\epsilon), \\ \partial \eta / \partial \tau' - \alpha \partial \eta / \partial x &= (N_{01} - i\Delta^{1/2}2\theta/\mu)K\eta - K\eta(|\eta|^2 + b^-\xi^2) + O(\epsilon), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $b^- = 1 + (1 + 4\Delta d_n/\gamma)^{-1}$ ,  $\alpha = 2\Delta^{1/2}/(1 + \mu)$ , а медленное время теперь связано с дифракцией так:  $\tau' = \epsilon^{1/2}t$ . Систему (23) дополняют периодические граничные условия для  $\xi$  и  $\eta$ . В таком случае (23) допускает решения типа бегущих (вращающихся по кольцу) волн

$$\xi(\tau', x) = \xi_0 \exp[i\alpha(\theta - m) - imx], \quad \eta(\tau', x) = \eta_0 \exp[i\alpha(\theta - m) + imx], \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Линейный анализ показывает, что генерация противоположно вращающихся волн с амплитудами  $|\xi_0|^2 = |\eta_0|^2 = N_{01}(1 + b^-)^{-1}$  всегда неустойчива. Генерация однонаправленных волн  $\eta = 0$ ,  $|\xi_0|^2 = N_{01}$  или  $\xi = 0$ ,  $|\eta_0|^2 = N_{01}$  возможна, так как эти решения имеют характеристические числа  $g_{1n} = g_{2n} = -N_{01} - i\alpha$ ,  $g_{3n} = -i\alpha$ ,  $\text{Reg}_{4n} = -2N_{01} < 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  и, следовательно, являются нейтрально устойчивыми.

Таким образом, динамика исходной системы (1),(2) в главном демонстрирует вращающиеся волны

$$E_m(x, t) = \epsilon^{1/4} N_{01}^{1/2} \exp(i\omega_m t + ik_m x + i\phi) + O(\epsilon^{3/4}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

с частотой генерации  $\omega_m = -\Delta - (\epsilon\Delta)^{1/2}(\theta - m)/(1 + \mu) + O(\epsilon)$  и волновыми числами  $k_m = n_\epsilon - m$ . Известный скейлинговый закон роста амплитуды в закритической области связан теперь с параметром дифракции  $\epsilon$ .

Поскольку достоверные решения на компьютере системы уравнений (1) с малой дифракцией  $\epsilon$  получить затруднительно, особое значение приобретают экспериментальные факты. Реализацию коротковолновых режимов демонстрирует лазер на красителе [11], где обнаружено, что сложная светодинамика проявляется только на достаточно малых пространственных масштабах.

В уравнениях (23) значение постоянной фазы  $\phi$  и номера моды  $m$  равноправны и задаются начальными условиями. Вследствие нейтральной устойчивости решений малые члены порядка  $\epsilon^{1/2}$  в уравнениях (23) могут

накапливаться за время  $t > \varepsilon^{-1/2}$  и переводить систему из состояния с номером  $m$  в соседнее. Конечно, время жизни каждого решения будет уменьшаться при повышении уровня внешних шумов. Так как квазинормальные формы являются универсальными для различных систем с одинаковым характером потери устойчивости, то аналогичный сценарий может служить универсальным путем хаотизации динамики. Здесь отметим, например, эксперимент [16] с фоторефрактивным материалом, где исследовались поперечные световые структуры, возникающие при увеличении числа Френеля  $F$  (что эквивалентно уменьшению коэффициента дифракции). При достаточно больших  $F$  наблюдаются различные (близкие) поперечные структуры, сменяющие друг друга через длительные нерегулярные интервалы времени. Такую же природу, возможно, имеет явление «хаотического блуждания» [17,18] в лазерах с большим числом возбужденных продольных мод, а также в лазерах с внешней запаздывающей обратной связью [14,15], где при наличии внешней подсветки быстро осциллирующие решения оказывались нейтрально устойчивыми в укороченной системе для отобранных решений.

Поперечные световые структуры вызывают особый интерес, так как они претендуют на роль «образов» в оптическом нейрноподобном компьютере. Поэтому интересно отметить, что явление хаотического блуждания можно интерпретировать как генерацию новых, или распознавание близких образов, после предъявления исходного образа - моды с номером  $m$ .

Поскольку вращающиеся волны в эксперименте различимы только по частоте генерации, то более перспективной для визуального наблюдения структур оказывается геометрия отрезка с граничными условиями Неймана. В этом случае с помощью ряда (В.4) получаем уравнения для параметров порядка

$$\partial \xi / \partial \tau' - i \alpha \partial \eta / \partial x = (N_{01} - i \Delta^{1/2} 2\theta / \mu) K \xi - K \xi (|\xi|^2 + |\eta|^2) / 2 - K (b^{-1} - 1) \xi^* (\xi^2 + \eta^2) / 4 + O(\varepsilon^{1/2}), \quad (24)$$

$$\partial \eta / \partial \tau' + i \alpha \partial \xi / \partial x = (N_{01} - i \Delta^{1/2} 2\theta / \mu) K \eta - K \eta (|\xi|^2 + |\eta|^2) / 2 - K (b^{-1} - 1) \eta^* (\xi^2 + \eta^2) / 4 + O(\varepsilon^{1/2})$$

со смешанными граничными условиями

$$\partial \xi / \partial x |_{x=0} = \partial \xi / \partial x |_{x=2\pi} = 0, \quad \eta |_{x=0} = \eta |_{x=2\pi} = 0.$$

Уравнения (24) допускают решения вида

$$\xi(\tau', x) = \rho(\tau') \cos(mx), \quad \eta(\tau', x) = \rho(\tau') \sin(mx), \quad m=0, 1, 2, \dots$$

При нейтральной устойчивости в исходной системе будем наблюдать медленную смену пространственных структур типа стоячей волны с различным числом узлов и пучностей:  $E = \varepsilon^{1/4} \rho_0 \cos(n_\varepsilon x - mx) \exp(i\omega t + i\varphi)$  с максимальной интенсивностью в пучностях  $|\rho_0|^2 = 4 N_{01} (1+b)^{-1}$  и с частотой генерации  $\omega = -\Delta - (\varepsilon \Delta)^{1/2} 2\theta / (1+\mu) + O(\varepsilon)$ .

Остановимся теперь на важном случае «малой накачки» в задаче с периодическими граничными условиями, когда в уравнениях (23)  $N_{01} \ll 1$  и существенными оказываются слагаемые порядка  $O(\varepsilon^{1/2})$ . Тогда возникает необходимость повторной нормализации уже нормализованных уравнений. При этом будем использовать информацию о решениях системы (23). Поскольку генерация противоположно направленных волн неустойчива, то будем строить решения на основе волны, бегущей в одном направлении. В окрестности критического значения накачки  $N_0 = 1 + \varepsilon N_{01}$  ищем решения в виде ряда (В.5). Получаем уравнение для медленных амплитуд с периодическими граничными условиями

$$\partial \xi / \partial \tau = (i \partial^2 \xi / \partial x^2 - 2\theta \partial \xi / \partial x) / (1+\mu) + (N_{01} - i \theta^2 / \mu) K \xi - K \xi |\xi|^2 + O(\varepsilon). \quad (25)$$

Это уравнение имеет устойчивые решения, соответствующие генерации бегущих волн

$$E_m = (\varepsilon N_{01})^{1/2} \exp(i\omega_m t + ik_{mz} z)$$

с частотой генерации

$$\omega_m = -\Delta - (\varepsilon \Delta)^{1/2} 2\theta / (1 + \mu) - \varepsilon(\theta^2 - 2\theta m - 2m\Delta^{1/2}) / (1 + \mu) + O(\varepsilon^{3/2})$$

и волновыми числами  $k_m = n_\varepsilon - m$ .

Таким образом, увеличение накачки в закритической области приводит (в отличие от явления кооперативного захвата частоты [1]) к изменению устойчивости бегущих волн и возможности переходов между ними.

### Заключение

Рассмотрена задача о формировании пространственных структур в кольце и одномерном отрезке активной среды на основе полуклассических лазерных уравнений с дифракцией.

С использованием методов теории нормальных форм получены решения нелинейных уравнений в малой окрестности первого порога генерации. Показано существенное различие задач с конечным и малым значением коэффициента дифракции.

Для отрицательной расстройки и коэффициента дифракции, не являющимся малым параметром, найдено однородное по пространству и осциллирующее во времени решение. При этом изучаемая система ведет себя, как сосредоточенная, и не зависит от геометрии и граничных условий.

Если же расстройка положительная, то имеет место потеря устойчивости, обусловленная временной и пространственной динамикой. Критический случай может быть реализован для двух, трех или четырех пространственных мод одновременно. Решения существенно зависят от граничных условий. Кольцо активной среды будет генерировать право- или левовращающуюся волну, причем их одновременная генерация невозможна. На отрезке активной среды, наоборот, реализуется стоячая волна. Возможны би- и трехстабильные по пространственному распределению интенсивности излучения режимы генерации: однородный, неоднородный стационарный и неоднородный автоколебательный (вращающийся).

В случае малого коэффициента дифракции предложен корректный метод построения квазинормальных форм для параметров порядка, определяющих динамику системы с учетом граничных условий. Параметр надкритичности оказывается существенно связанным с дифракцией. Для отрицательной расстройки квазинормальной формой является одномерное комплексное уравнение Гинзбурга - Ландау, причем спонтанным (мягким) образом рождаются только однородные структуры.

Для положительной расстройки получены быстро осциллирующие по пространственной переменной решения типа бегущих волн в кольце или стоячих волн на отрезке. Возможна генерация счетного количества таких волн, а их амплитуда и изменение частоты определяются коэффициентом дифракции. Полученные волны имеют нейтральную устойчивость в укороченных уравнениях. Это может стать причиной явления «хаотического блуждания».

Полученные нормальные и квазинормальные формы являются универсальными для различных задач, имеющих одинаковый характер потери устойчивости. Размерность нормальной формы определяется числом характеристических показателей с близкой к нулю вещественной частью, а тип нелинейности исходной задачи учитывается в конкретных значениях постоянных коэффициентов нормальной формы. Такой подход может стать основой для классификации явлений пространственно-временной самоорганизации в диссипативных системах.

Развитые методы построения квазинормальных форм могут быть распространены и на двумерные пространственно-временные динамические задачи. Результаты будут представлены в последующих публикациях.

*Работа частично финансировалась Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь, грант Ф35-211.*

## Приложение А

Амплитуды нулевой  $\xi_0$  и первой  $\eta_0$  пространственных мод и поправка к частоте  $w_0$  в закритической области в случае периодических граничных условий

$$\xi_0^2 = \frac{N_{01}B + D_1C(1+B)}{(1+B)^2 - 1}, \quad \eta_0^2 = \frac{N_{01}B - D_1C}{(1+B)^2 - 1},$$

$$w_0 = \frac{\mu}{\mu+1} \left[ -D_1/\mu + \left(1 + \frac{\delta}{1+D_n/\gamma}\right) (|\xi_0|^2 + |\eta_0|^2) \right].$$

Амплитуды нулевой  $\xi_1$  и первой  $\eta_1$  пространственных мод и поправка к частоте  $w_1$  в закритической области в случае граничных условий Неймана

$$\xi_1^2 = \frac{N_{01}(B - B_1) + D_1C(1+B)}{(1+B)^2 - (1+B_1)}, \quad \eta_1^2 = \frac{2(N_{01}B - D_1C)}{(1+B)^2 - (1+B_1)},$$

$$w_1 = \frac{\mu}{\mu+1} \left[ -D_1/\mu + \left(1 + \frac{\delta}{1+D_n/\gamma}\right) (|\xi_0|^2 + \frac{1}{2} |\eta_0|^2) \right].$$

## Приложение В

Формальные ряды, с помощью которых получены квазинормальные формы в следующих случаях.

1. Критические условия (10) для обоих типов граничных условий

$$E = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau, x) \exp(i\omega_0 t) + \varepsilon^{3/2} e_3(\tau, x, t) + \dots,$$

$$P = \varepsilon^{1/2} a_0 \xi(\tau, x) \exp(i\omega_0 t) + \varepsilon^{3/2} p_3(\tau, x, t) + \dots, \quad (\text{B.1})$$

$$N = N_0 \sim + \varepsilon n_2(\tau) + \dots,$$

$$\tau = \varepsilon t, \quad \omega_0 = \delta \mu, \quad a_0 = 1 + i\delta, \quad N_0 \sim = 1 + \delta^2.$$

2. Критические условия (10) и  $\Delta \rightarrow 0$

$$E = \varepsilon^{1/2} \xi(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} e_3(\tau, x, t) + \dots,$$

$$P = \varepsilon^{1/2} a \xi(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} p_3(\tau, x, t) + \dots, \quad (\text{B.2})$$

$$N = N_0 \sim + \varepsilon n_2(\tau) + \dots,$$

$$\tau = \varepsilon t, \quad a = 1, \quad N_0 \sim = 1.$$

3. Критические условия (11) и «большая» накачка  $N_0 = N_0 \sim + \varepsilon^{1/2} N_{01}$  для периодических граничных условий

$$E = \varepsilon^{1/4} [\xi(\tau, x) \exp(i\omega_1 t + n_\varepsilon x) + \eta(\tau, x) \exp(i\omega_1 t - n_\varepsilon x)] + \varepsilon^{3/4} e_3(\tau, x, t) + \dots,$$

$$P = \varepsilon^{1/4} a [\xi(\tau, x) \exp(i\omega_1 t + n_\varepsilon x) + \eta(\tau, x) \exp(i\omega_1 t - n_\varepsilon x)] + \varepsilon^{3/4} p_3(\tau, x, t) + \dots, \quad (\text{B.3})$$

$$N = N_0 \sim + \varepsilon^{1/2} n_2(\tau, x) + \dots,$$

$$\tau = \varepsilon^{1/2} t, \quad \omega_1 = -\Delta, \quad a = 1, \quad N_0 \sim = 1.$$

4. Критические условия (11) и «большая» накачка для граничных условий Неймана

$$\begin{aligned} E &= \varepsilon^{1/4}[\xi(\tau, x)\cos(n_\varepsilon x) + \eta(\tau, x)\sin(n_\varepsilon x)]\exp(i\omega_1 t) + \varepsilon^{3/4}e_3(\tau, x, t) + \dots, \\ P &= \varepsilon^{1/4}\gamma[\xi(\tau, x)\cos(n_\varepsilon x) + \eta(\tau, x)\sin(n_\varepsilon x)]\exp(i\omega_1 t) + \varepsilon^{3/4}p_3(\tau, x, t) + \dots, \\ N &= N_0 \sim + \varepsilon^{1/2}n_2(\tau, x) + \dots, \\ \tau &= \varepsilon^{1/2}t, \quad \omega_1 = -\Delta, \quad a = 1, \quad N_0 \sim = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

5. Критические условия (11) и «малая» накачка для периодических граничных условий

$$\begin{aligned} E &= \varepsilon^{1/2}[\xi(\tau, x - \alpha\tau)\exp(i\omega_1 t + n_\varepsilon x - i\alpha\theta\varepsilon^{1/2}t)] + \varepsilon^{3/2}e_3(\tau, x, t) + \dots, \\ P &= \varepsilon^{1/2}a[\xi(\tau, x - \alpha\tau)\exp(i\omega_1 t + n_\varepsilon x - i\alpha\theta\varepsilon^{1/2}t)] + \varepsilon^{3/2}p_3(\tau, x, t) + \dots, \\ N &= N_0 \sim + \varepsilon n_2(\tau, x) + \dots, \\ \tau &= \varepsilon t, \quad \omega_1 = -\Delta, \quad a = 1, \quad N_0 \sim = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

### Библиографический список

1. *Lugiato L.A.* Spatio-temporal structures. Part 1. // *Phys.reports.* 1992. 219, Nos 3-6. P. 293.
2. *Brambilla M. et.al.* Transverse laser patterns. 1. Phase singularity crystals // *Phys.Rev.A* 1991. Vol. 3. P. 5090.
3. *Jakobsen P.K., Moloney J.V., Newell A.C., Indik R.* Space-time dynamics of wide-gain-section lasers // *Phys.Rev.A* 1992. Vol. 45. P. 8129.
4. *Staliunas K.* Laser Ginzburg - Landau equation and laser hydrodynamics // *Phys.Rev.A* 1993. Vol. 48. P. 1573.
5. *Collett P., Gil L., Rocca F.* Optical vortices // *Commun.* 1989. Vol. 73. P. 403.
6. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
7. *Каценко С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // *Докл. акад. наук СССР.* 1989. №. 299. С. 1049.
8. *Каценко С.А.* Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией // *Kashchenko S.A. // Sov.J.Diff.Equat.* 1989. Vol.25. P. 262.
9. *Loper Ruiz R., Midlin G.B., Perez-Garcia P., Tredicce J.* Mode-mode interaction for CO<sub>2</sub> laser with imperfect O(2) symmetry // *Phys.Rev. A* 1993. Vol. 47. P. 500.
10. *Ахромеева Т.С., Курдюмова С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* О классификации решений системы нелинейных уравнений в окрестности точки бифуркации // *Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. ВИНТИ АН СССР.* 1986. Т. 28. С. 207.
11. *Perez-Garcia V.M., Guerra J.M.* Weak turbulent behavior and dynamical frequency locking in high-Fresnel-number laser // *Phys.Rev.A* 1994. Vol. 50. № 1.
12. *Collett P., Gil L., Lega J.* A form of turbulence associated with defects // *Physica D* 37. 1989. P. 91.
13. *Bekki N., Nozaki K.* Formations of spatial patterns and holes in the generalized Ginzburg - Landau equation // *Phys.Lett.* 1985. Vol. 110 A P. 133.
14. *Grigorieva E.V., Kashchenko S.A.* Complex temporal structures in models of a laser with optoelectronic delayed feedback // *Opt.Commun.* 1993. Vol. 102. P. 183.
15. *Grigorieva E.V., Kashchenko S.A.* Regular and chaotic pulsations in laser diode with delayed feedback // *Bifurcation & Chaos.* 1993. Vol. 3. № 15. P. 15-15.29.
16. *Arecchi F.T. et.al.* Experimental evidence of chaotic itinerancy and spatio-temporal chaos in optics // *Phys.Rev.Lett.* 1990. Vol. 65. P. 2531.
17. *Ikeda K., Otsuka K., Matsumoto K.* Maxwell - Bloch Turbulence // *Progr. Theor.Phys.Suppl.* 1989. Vol. 99. P. 295.

18. *Otsuka K.*// Phys.Rev.Lett. 1990.Vol.65. P. 329.

Беларуский государственный университет  
Международный лазерный центр  
Ярославский государственный университет

Поступила в редакцию 14.10.94  
после переработки 14.02.95

## NORMAL AND QUASI-NORMAL FORMS OF THE SEMICLASSICAL LASER EQUATIONS WITH DIFFRACTION

*E.V. Grigorieva, S.A. Kashchenko*

The transverse pattern formation of rotating and standing waves and transverse mode beating in laser are considered using of the normal form method. The complicated dynamics possibility due to the neutral stability solutions of the shortened equations is demonstrated.



*Григорьева Елена Викторовна* - окончила физический факультет Белорусского государственного университета (1979). Работала в Институте физики АН БССР в лаборатории общей спектроскопии по теме формирования сложных режимов генерации в лазерах с нелинейными элементами. В настоящее время - сотрудник Международного лазерного центра при БГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика лазерно-оптических систем.



*Кашченко Сергей Александрович* - родился в 1953 году. Окончил Ярославский государственный университет. В 1990 году защитил докторскую диссертацию (МГУ). С 1991 года - профессор, зав. кафедрой математического моделирования ЯГУ. Область научных интересов - асимптотические методы исследования сложной динамики систем с запаздыванием, систем параболического и гиперболического типов.