Изв.вузов «ПНД», т.3, № 1, 1995 УДК 537.876.23

ПРОХОЖДЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ СТАЦИОНАРНЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ СРЕДЫ

А.Е. Дубинов, В.Д. Селемир

Выведены волновые уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн через стационарные фрактальные среды. В основу вывода положен формализм операций интегрирования и дифференцирования дробного порядка. Полученные уравнения могут быть использованы при изучении прохождения электромагнитных волн через сильно турбулизированные потоки жидкости, газа, плазмы.

Введение

С момента появления обзора Мандельброта [1] началось стремительное проникновение идей фрактальной геометрии в различные области современного естествознания: фракталы обнаруживаются и в структуре твердых тел, и в турбулентных потоках, и на фазовых портретах динамических систем. Но, по-видимому, эпоха обнаружения новых фрактальных проявлений в природе начинает уже сменяться эпохой систематического изучения динамических явлений на фрактальных объектах. К числу таких явлений следует отнести перенос массы и энергии по фрактальным средам.

Неудивительно, что первые попытки описания этих явлений основывались на использовании традиционных линейных уравнений: уравнения диффузии для описания переноса массы [2,3], волнового уравнения и уравнения Гельмгольца для описания прохождения квантовой частицы через потенциальный барьер [4] и для описания андерсоновской локализации волн [5]. В некоторых из вышеперечисленных работ изучалось прохождение потоков частиц путем искусственного введения в уравнение степенных зависимостей с соответствующим дробным показателем. В других работах исследовались уравнения на фрактальных средах, заданных функциями, порождаемыми множеством Кантора или функцией Вейерштрасса - Мандельброта, причем эти функции аппроксимировались гладкими предфракталами очередного поколения. Несмотря на существенное отличие гладких предфракталов от истинных фракталов все же эти работы не представляются нам бесполезными: в них удалось выяснить, что с увеличением номера очередного предфрактала решение соответствующих традиционных уравнений все более усложняется, так что для истинного фрактала решение вряд ли может быть продифференцировано, по крайней мере, два раза для подстановки в уравнение (например, волновое). Поэтому распространение частиц и волн по истинным фрактальным средам должно описываться иными, более общими уравнениями, переходящими для гладких сред в традиционные линейные. Здесь уместно напомнить основные свойства фрактальных функций:

фрактальная функция всюду недифференцируема;

фрактальная функция самоподобна (или самоаффинна), причем свойство самоподобия случайного фрактала нужно понимать в статистическом смысле;

фрактальная функция имеет размерность Хаусдорфа - Безиковича, отличную от топологической (чаще всего дробную).

Заметим, что первое и, по нашему мнению, самое важное свойство зачастую остается без внимания. Ведь именно операция дифференцирования, входящая в формализм традиционных уравнений переноса массы и энергии, делает их непригодными для всюду негладких функций.

В настоящее время имеются достаточно веские основания предполагать, что для описания динамических явлений на фракталах может оказаться плодотворным формализм операций интегрирования и дифференцирования дробного порядка [6-8]. В этих работах анонсируются обобщенные уравнение диффузии и волновое уравнение, в которых используется оператор дифференцирования по временной переменной порядка $0 < \lambda < 1$ и $1 < \lambda < 2$, соответственно. Однако из этих работ пока не ясно, как связано с решениями предложенных уравнений прохождение, например, электромагнитных волн через среду с диэлектрической и/или магнитной проницаемостями, имеющими фрактальные профили. На наш взгляд, проблема еще далека от разрешения, указан лишь один из вариантов путей.

В настоящей работе с использованием операций интегрировнаия и дифференцирования дробного порядка получены непосредственно из уравнений Максвелла новые обобщенные волновые уравнения для динамики электромагнитных волн в стационарных фрактальных средах. Структура работы следующая. Сначала вводятся некоторые математические понятия, необходимые для вывода и анализа новых волновых уравнений, в частности, рассматривается иерархия пространств функций Гёльдера - Липшица. Далее приведены примеры непрерывных фрактальных функций, а затем введены понятия операций дифференцирования и интегрирования дробного порядка. Здесь же рассмотрены некоторые свойства интегральных и дифференциальных операторов дробного порядка. Перечисленных математических сведений достаточно для вывода волновых уравнений электродинамики во фрактальных средах, сделанного ниже. В заключение рассматриваются возможные перспективы данного подхода.

1. Иерархия пространств функций Гёльдера - Липшица и примеры фрактальных функций

Пусть функция одной переменной $f(x)$ задана на отрезке $\Omega=[a,b]$. Говорят, что функция, заданная на Ω, удовлетворяет условию Гёльдера порядка λ на Ω, если для всех $x_1; x_2 \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\sup_{x_1 \neq x_2} |f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^{\lambda}, \qquad (1.1)$$

где A - постоянная. В этом случае говорят, что указанная функция принадлежит пространству функций Гёльдера порядка λ. Этот факт будем обозначать $f(x) \in \mathrm{H\ddot{o}l}^{\lambda}(\Omega)$. При $\lambda = 1$ пространство Гёльдера обычно называют пространством Липшица (обозначение: $f\,(x) \in \mathrm{Lip}(\Omega)$). Свойства функциональных пространств Гёльдера - Липшица подробно рассмотрены в [9, 10].

Можно провести некоторое обобщение системы пространств функций типа $\mathrm{H\ddot{o}l}^{\lambda}(\Omega)$. Пусть имеется показатель $0 \leq \Lambda \leq \infty$. Его можно представить в виде суммы его целой и дробной частей $\Lambda=[\Lambda]+\{\Lambda\}$. Тогда будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит пространству функций $\mathrm{H\ddot{o}l}^{\Lambda}(\Omega)$ из расширенной системы этих пространств, если сама функция $f(x) \in C^n(\Omega)$, где $n = [\Lambda]$, а ее n-я производная принадлежит пространству $\mathrm{Höl}^{\lambda}(\Omega)$ порядка $\lambda = \{\Lambda\}$ [11].

Это обобщение для пространств можно кратко записать в виде

$$\sup_{x_1 \neq x_2} |\mathbf{D}^{\wedge}{}_x{}^n[f(x_1)] - \mathbf{D}^{\wedge}{}_x{}^n[f(x_2)]| \le A|x_1 - x_2|^{\lambda}, \tag{1.2}$$

$$(n = [\Lambda], \lambda = \{\Lambda\}),$$

где $\mathbf{D}^{\wedge}{}_x{}^n[f(x)]$ - оператор дифференцирования n-го порядка по переменной x.

Легко видеть, что данные расширенной системы пространств Гёльдера - Липшица включают в себя все классы непрерывных функций. Это можно схематично изобразить в виде диаграммы на рис. 1. Результат n-кратного дифференцирования функции находится на диаграмме левее самой функции на n единиц, а результат n-кратного интегрирования - правее на n единиц.

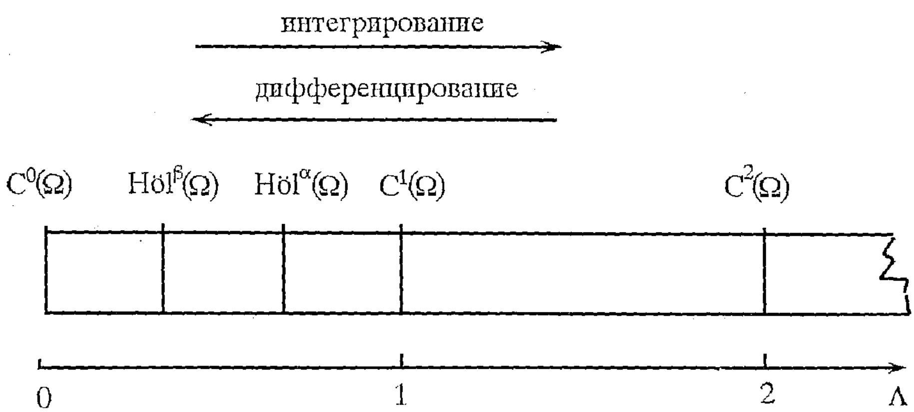

Рис. 1. Иерархия пространств функций Гёльдера

Обратим внимание на то, что показатель Λ при $\Lambda > 1$ не следует путать с порядком пространства λ, так как при $\lambda > 1$ пространство Гёльдера наполнено лишь постоянными функциями (см. выше). Из всех фрактальных функций или функций, порождаемых фракталами, нас будут интересовать всюду непрерывные, однозначные функции одного переменного на x. Такие функции должны иметь фрактальную размерность из диапазона $1 < \dim(f) < 2$.

Наиболее известной из таких функций является функция Вейерштрасса - Мандельброта

$$f_{WM}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K^{-n\alpha} \cos(K^n x), \tag{1.3}$$

где $K > 1$ - целое число и α - положительное число. Фрактальные свойства этой функции подробно рассмотрены, например, в [12]. В частности, фрактальная размерность этой функции удовлетворяет соотношению $\dim(f_{WM}) = 2-\alpha$.

Справедливо утверждение, доказательство которого можно найти в [13].

Утверждение 1.1. Если $0 < \alpha < 1$, то $f_{WM}(x) \in \mathrm{Höl}^{\alpha}(\Omega)$.

Вейерштрасс показал, что при достаточно малых α функция $f_{WM}(x)$ нигде не дифференцируема. Распространение этого результата на случай $\alpha \le 1$ впервые было получено Харди. (Для $\alpha > 1$ производная $\mathbf{D}^{\wedge}{}_x{}^n[f_{WM}(x)]$, очевидно, существует и непрерывна). Этими же свойствами обладает и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K^{-n\alpha} \sin(K^n x). \tag{1.4}$$

Функциями Вейерштрасса не исчерпывается арсенал фрактальных функций: большое количество примеров таких функций представлено в [14]. Среди них, например, функция Ван-дер-Вардена

$$f_V(x)=\Sigma\langle 10^n x\rangle 10^{-n}, \tag{1.5}$$

где через $\langle y\rangle$ обозначен модуль разности между y и ближайшим к нему целым числом. Функция Ван-дер-Вардена всюду непрерывна, но всюду и недифференцируема.

2. Интегрирование и дифференцирование дробного порядка

Интегрирование и дифференцирование дробного порядка представляет собой достаточно разработанный математический аппарат, но, к сожалению, не нашедший пока широкого применения в теоретической физике. Весь накопленный материал по этому вопросу опубликован в основном на страницах математических журналов, и только сравнительно недавно изданная книга [15], где подробно, в удобной для практического применения форме изложены основы дробного интегрирования и дифференцирования, позволит в ближайшем будущем применить этот аппарат для прикладных целей.

Перед введением понятий интегралов и производных дробного порядка уместно напомнить хорошо известное тождество

$$\underbrace{\int_a^x dx \ldots \int_a^x dx \int_a^x}_{n} f(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \tag{2.1}$$

доказательство которого легко провести методом математической индукции. Замечая, что $(n-1)! = \Gamma(n)$, видим, что правой части (2.1) можно придать более общий смысл при нецелых значениях n. Поэтому естественно определить интеграл дробного порядка следующим образом:

$$\mathbf{I}^{\wedge}{}_x^{\alpha}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt, \qquad (x>a). \tag{2.2}$$

Интеграл типа (2.2) называется дробным интегралом Римана - Лиувилля. Справедливо тождество

$$\mathbf{I}^{\wedge}{}_x^{\alpha}\,\mathbf{I}^{\wedge}{}_x^{\beta} = \mathbf{I}^{\wedge}{}_x^{\beta}\,\mathbf{I}^{\wedge}{}_x^{\alpha} = \mathbf{I}^{\wedge}{}_x^{\alpha+\beta}. \tag{2.3}$$

По аналогии с интегралом дробного порядка Римана - Лиувилля можно определить и дробные производные

$$\mathbf{D}^{\wedge}{}_x^{\alpha}[f(x)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\,\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}\, dt, \tag{2.4}$$

которые называются производными дробного порядка Римана - Лиувилля. Здесь имеет место тождество

$$\mathbf{D}^{\wedge}{}_x^{\alpha}\,\mathbf{D}^{\wedge}{}_x^{\beta} = \mathbf{D}^{\wedge}{}_x^{\beta}\,\mathbf{D}^{\wedge}{}_x^{\alpha} = \mathbf{D}^{\wedge}{}_x^{\alpha+\beta}. \tag{2.5}$$

Заметим, что результат дробного интегрирования порядка α находится на диаграмме рис. 1 на α единиц правее подынтегральной функции, а результат дробного дифференцирования соответственно левее. Имеет место следующее утверждение, касающееся операторов дробного порядка $\mathbf{D}^{\wedge}{}_x^{\alpha}[\ldots]$ и $\mathbf{I}^{\wedge}{}_x^{\alpha}[\ldots]$.

Утверждение 2.1. Справедлива композиция операторов

$$\hat{\mathbf{D}}_x^{\alpha}[\hat{\mathbf{I}}_x^{\alpha}[f(x)]]=f(x), \tag{2.6}$$

но

$$\hat{\mathbf{I}}_x^{\alpha}[\hat{\mathbf{D}}_x^{\alpha}[f(x)]]=f(x)-\sum_{k=1}^{[\alpha]}\hat{\mathbf{D}}_x^{\alpha-k}[f(x)]|_{x=a}\frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}. \tag{2.7}$$

Действие операторов $\hat{\mathbf{I}}_x^{\alpha}[f(x)]$ и $\hat{\mathbf{D}}_x^{\beta}[f(x)]$ для дробных значений порядка легко проследить на рис. 2.

В заключение приведем важное для решения уравнений в дробных производных свойство совместного действия преобразования Лапласа и оператора дробного интегрирования

$$\hat{\mathbf{L}}[\hat{\mathbf{I}}_x^{\alpha}[f(x)]]=p^{-\alpha}\hat{\mathbf{L}}[f(x)] \tag{2.8}$$

и обобщенное правило Лейбница

$$\hat{\mathbf{D}}_x^{\alpha}[f(x)g(x)]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\begin{matrix}\alpha\\ k\end{matrix}\right]\hat{\mathbf{D}}_x^{\alpha-k}[f(x)]\hat{\mathbf{D}}_x^{k}[g(x)], \tag{2.9}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_x^{\alpha}[f(x)g(x)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\begin{matrix}\alpha\\ k+\beta\end{matrix}\right]\hat{\mathbf{D}}_x^{\alpha-\beta-k}[f(x)]\hat{\mathbf{D}}_x^{\beta+k}[g(x)], \tag{2.10}$$

с обобщенным биноминальным коэффициентом

$$\left[\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right]=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta+1)}=\frac{\sin[(\beta-\alpha)\pi]}{\pi}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta+1)}. \tag{2.11}$$

Наряду с формулами Лейбница типа (2.9) и (2.10) имеет место формула Лейбница с остаточным членом

$$\hat{\mathbf{D}}_x^{\alpha}[f(x)g(x)]=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\begin{matrix}\alpha\\ k\end{matrix}\right]\hat{\mathbf{D}}_x^{\alpha-k}[f(x)]\hat{\mathbf{D}}_x^{k}[g(x)]+\hat{\mathbf{R}}_n, \tag{2.12}$$

где

$$\hat{\mathbf{R}}_n=\frac{(-1)^n}{\Gamma(-\alpha)(n-1)!}\int_a^x(x-t)^{-\alpha-1}f(t)dt\int_t^x(x-\xi)^{n-1}\hat{\mathbf{D}}_{\xi}^{n}[g(\xi)]d\xi. \tag{2.13}$$

Формула (2.12) имеет то преимущество по сравнению с (2.9), что не требует от функции $g(x)$ бесконечной дифференцируемости.

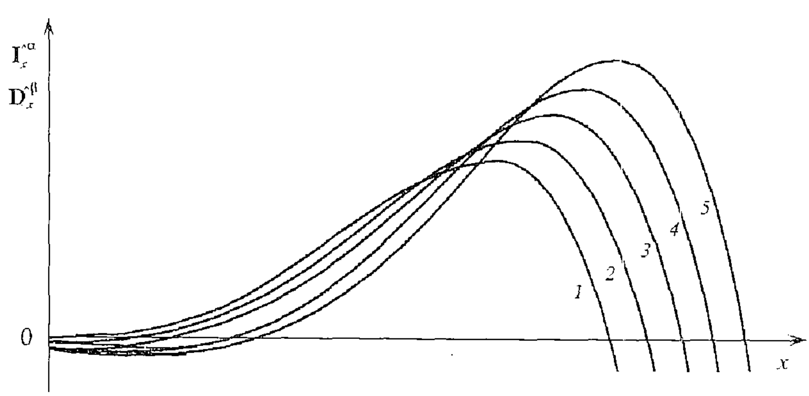

Рис. 2. Действие операторов $\hat{\mathbf{I}}_x^{\alpha}[f(x)]$ и $\hat{\mathbf{D}}_x^{\beta}[f(x)]$ для различных значений α и β ($\alpha=1-\beta$): *1* - $\alpha=0$; *2* - $\alpha=0.25$; *3* - $\alpha=0.5$; *4* - $\alpha=0.75$; *5* - $\alpha=1.0$

3. Уравнения для плоских электромагнитных волн в стационарных фрактальных средах

Приступим теперь к выводу волновых уравнений, описывающих распространение плоских волн через фрактальные стационарные среды.

Пусть среда представляет собой неоднородный диэлектрик с профилями $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ диэлектрической и магнитной проницаемостей, соответственно, причем $\varepsilon(x) \in \mathrm{H\ddot{o}l}^{\lambda_\varepsilon}(\Omega)$ и $\mu(x) \in \mathrm{H\ddot{o}l}^{\lambda_\mu}(\Omega)$ $(0 < (\lambda_\varepsilon;\lambda_\mu) < 1)$. Рассмотрим уравнения Максвелла для волны, имеющей лишь компоненты $E_y(x,t)$ и $H_z(x,t)$,

$$\mathbf{D}\hat{}_x^{1}\,[E_y(x,t)] = -(1/c)\mathbf{D}\hat{}_t^{1}[\mu(x)H_z(x,t)], \tag{3.1}$$

$$\mathbf{D}\hat{}_x^{1}[H_z(x,t)] = (1/c)\mathbf{D}\hat{}_t^{1}[\varepsilon(x)E_y(x,t)]. \tag{3.2}$$

Пусть $E_y(x,t) \in \mathrm{H\ddot{o}l}^{\Lambda_E}(\Omega)$ и $H_z(x,t) \in \mathrm{H\ddot{o}l}^{\Lambda_H}(\Omega)$.Тогда для нахождения показателей Λ_E и Λ_H из (3.1) и (3.2) получим систему уравнений

$$\Lambda_E - 1 = \min(\lambda_\mu;\ \Lambda_H), \tag{3.3}$$

$$\Lambda_H - 1 = \min(\lambda_\varepsilon;\ \Lambda_E\ ), \tag{3.4}$$

имеющую единственное решение $\Lambda_H = 1 + \lambda_\varepsilon$, $\Lambda_E = 1 + \lambda_\mu$. Продифференцируем оба уравнения по x с порядком $\lambda = \min\ (\lambda_\varepsilon;\ \lambda_\mu)$, пользуясь при этом обобщенным правилом Лейбница (2.12),

$$\mathbf{D}\hat{}_x^{1+\lambda}[E_y(x,t)] = \frac{1}{c}\mathbf{D}\hat{}_x^{\lambda}[\mu(x)]\mathbf{D}\hat{}_t^{1}[H_z(x,t)] +$$

$$+ \frac{1}{c\Gamma(-\lambda)}\int_a^x (x-\xi)^{-\lambda-1}\mu(\xi)d\xi\int_\xi^x \mathbf{D}\hat{}_\eta^{1}[\mathbf{D}\hat{}_t^{1}[H_z(\eta,t)]]d\eta, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{D}\hat{}_x^{1+\lambda}[H_z(x,t)] = \frac{1}{c}\,\mathbf{D}\hat{}_x^{\lambda}[\varepsilon(x)]\mathbf{D}\hat{}_t^{1}[E_y(x,t)]\ -$$

$$- \frac{1}{c\Gamma(-\lambda)}\int_a^x (x-\xi)^{-\lambda-1}\varepsilon(\xi)d\xi\int_\xi^x \mathbf{D}\hat{}_\eta^{1}[\mathbf{D}\hat{}_t^{1}[E_y(\eta,t)]]d\eta. \tag{3.6}$$

Меняя порядок дифференцирования во внутренних интегралах правых частей (3.5) и (3.6) и подставляя в них (3.1) и (3.2), получим искомые волновые уравнения

$$\mathbf{D}\hat{}_x^{1+\lambda}[E_y(x,t)] = \frac{1}{\mu(x)}\,\mathbf{D}\hat{}_x^{\lambda}[\mu(x)]\mathbf{D}\hat{}_x^{1}[E_y(x,t)] +$$

$$+ \frac{1}{c^2\Gamma(-\lambda)}\int_a^x (x-\xi)^{-\lambda-1}\mu(\xi)d\xi\int_\xi^x \varepsilon(\eta)\mathbf{D}\hat{}_t^{2}[E_y(\eta,t)]d\eta, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{D}\hat{}_x^{1+\lambda}[H_z(x,t)] = \frac{1}{\varepsilon(x)}\,\mathbf{D}\hat{}_x^{\lambda}[\varepsilon(x)]\mathbf{D}\hat{}_x^{1}[H_z(x,t)]\ +$$

$$+ \frac{1}{c^2\Gamma(-\lambda)}\int_a^x (x-\xi)^{-\lambda-1}\varepsilon(\xi)d\xi\int_\xi^x \mu(\eta)\mathbf{D}\hat{}_t^{2}[H_z(\eta,t)]d\eta, \tag{3.8}$$

описывающие динамику плоской электромагнитной волны при прохождении ее через фрактальную среду. Кстати, к аналогичным уравнениям приводят интегральные и дифференциальные операции дробного порядка над системой телеграфных уравнений для длинных линий с фрактальными стационарными параметрами.

При выводе полученных волновых уравнений возникает один деликатный вопрос: почему мы брали производную именно порядка λ в (3.3) и (3.4)? Ведь мы могли взять производную любого другого порядка λ' при условии лишь $0 < \lambda' < \lambda$? Да, могли. И в этом случае мы получили бы другое волновое уравнение. Однако это другое уравнение имело бы то же самое решение, что и уравнение любого другого порядка, ведь все такие уравнения являются следствиями единых уравнений Максвелла. Поэтому полученные волновые уравнения справедливы и для обычных гладких сред. Фактически, порядок пространства функций Гёльдера - Липшица, к которому принадлежат $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$, как раз и определяет возможный порядок производной и, следовательно, возможный внешний вид волнового уравнения.

Заключение

Итак, получены новые волновые уравнения для описания динамики плоских электромагнитных волн в стационарных фрактальных (недифференцируемых) средах. Но остались два обстоятельства, о которых хочется упомянуть.

Во-первых, важным свойством фрактала является самоподобие (самоаффинность). Учет этой симметрии позволит, подобно теореме Флоке, эффективно решать интегродифференциальные уравнения с фрактальными коэффициентами. Тут слово за математиками.

Во-вторых, можно представить себе среду, однородную в пространстве, параметры $\varepsilon(t)$ и $\mu(t)$ которой меняются во времени фрактальным образом, то есть $\varepsilon(t)$; $\mu(t) \in \mathrm{H\ddot{o}l}^{\lambda}(\Omega)$. В этом случае уравнения Максвелла (3.1) и (3.2) не имеют смысла. Значит, должны существовать более общие, чем уравнения Максвелла, соотношения, которые можно вывести из вариационного принципа для лагранжиана электромагнитного поля путем дробного интегрирования и дифференцирования. Об этой идее сообщается в [16] со ссылкой на неопубликованную работу Гелиодора и Мьети. Во всяком случае, обобщение уравнений Максвелла для фрактальных нестационарных сред - дело ближайшего будущего.

Библиографический список

1. *Mandelbrot B.B.* Fractals, Form, Chance, and Dimension/ Ed. W.H.Freeman. San Francisco (CA), 1977.

2. *Bahavar J.R., Willemsen J.F.* Probability density for diffusion on fractals// Phys. Rev. B. 1984. Vol. 30, №11. P. 6778.

3. *Соколов И.М.* Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания// Успехи физических наук. 1986. Т. 150, № 2. С.221.

4. *Носков М.Д., Шаповалов А.В.* Прохождение квантовой частицы через одномерный фрактальный потенциальный барьер// Изв. вузов. Сер. Физика. 1993. № 7. С. 120.

5. *De Vries P., de Raedt H., Lagendijk A.* Wave localization in disordered and fractal systems // Comp. Phys. Comm. 1993. Vol. 75, № 3.

6. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теоретическая и математическая физика. 1992. Т. 90, № 3. С. 354.

7. *Wyss W.* The fractional diffusion equation// J. Math. Phys. 1986. Vol. 27, № 11. P. 2782 .

8. *Schneider W.R., Wyss W.* Fractional diffusion and wave equations // Ibid. 1989. Vol. 30, №1. P. 134.

9. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М., 1985.

10. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.

11. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.

12. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.

13. *Зигмунд М.* Тригонометрические ряды. Т.1. М.: Мир, 1965.

14. *Дринфельд Г.И.* Дополнение к общему курсу математического анализа. Харьков: Изд-во ХГУ, 1958.

15. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

16. *Konotop V.V., Bulgakov S.A.* Two-scale method in the theory of scattering by fractal structures: one-dimensional regular problems// Phys. Rev. A. 1992. Vol. 45, № 8. P. 1007.

Российский федеральный ядерный центр
ВНИИ экспериментальной физики

Поступила в редакцию 7.10.94
после переработки 25.04.95

DESCRIPTION OF FLAT ELECTROMAGNETIC WAVES THROUGH STATIONARY FRACTAL MEDIA

A.E. Dubinov, V.D. Selemir

New wave equations, describing electromagnetic propagation through fractal media, are derived. The formalism of fractional order of integration and differentiation serves as a basis for the derivation, mentioned above. The equations derived can be used at studying propagation of electromagnetic waves through highly turbulized fluxes of liquid, gas and plasma.