Изв.вузов «ПНД», т.3, № 1, 1995

УДК 517.9

АЗБУКА СИНЕРГЕТИКИ НА ДИСПЛЕЕ УЧЕБНОГО КОМПЬЮТЕРА 12

Р.Р. Мударисов, Б.Н. Пойзнер

Разработан учебный вычислительный эксперимент «Азбука синергетики: порядок в дискретной системе, бифуркации, одномерный хаос, фракталы». Основные дефиниции синергетики и объекты ее изучения сжато изложены во Введении. Методические указания разделов помогают освоить базовые термины и математические модели, необходимые для понимания учебных и научных текстов, в которых используются категории синергетики. Для наглядности и простоты изложения выбраны различные сюжеты синергетики, позволяющие продемонстрировать процессы, наиболее показательные для очерченного круга явлений. Индивидуализация задания в учебном вычислительном эксперименте служит удобным способом организации проблемного обучения [1].

Необходимо класть в основу всего число.
Платон, V-IV в. до н.э.

1. Сложные упорядоченные режимы в дискретных системах

Для дискретной среды достаточно сложные структуры можно получить, задавая состояние её элементарной ячейки - «клетки», которое меняется в зависимости от состояния ее соседей. По такому принципу построена игра «Жизнь». Эта игра имитирует рост, распад и различные изменения в популяции простейших живых организмов - белковых цепей [2]. Рассмотрим правила и условия игры.

Игра происходит на плоской поверхности квадратных ячеек-клеток. Клетка может быть «живой» или «мертвой». Время изменяется дискретно. Изменение состояния клетки в момент времени $t+1$ определяется состоянием ее соседей в предшествующий момент времени t. У каждой клетки восемь соседей, из них четыре имеют с ней общее ребро, а четыре - вершины. Если клетка «мертва» в момент времени t, она «оживает» в момент $t+1$ тогда и только тогда, если трое из ее восьми соседей были живы в предшествующий момент t. Если клетка была «жива» в момент времени t, она «погибает» в момент $t+1$ тогда и только тогда, если меньше, чем две, или больше, чем три соседних клетки были «живы» в предшествующий момент t .

Содержанием деятельности студента является:

- варьирование условий, влияющих на ход образования, рост, различные изменения и распад упорядоченных структур в дискретных системах;
- выяснение влияния симметрии/асимметрии формы начального состояния на окончательную структуру;
- определение роли простоты/сложности формы начального состояния на окончательную структуру.

2. Бифуркации

Рассматривается система уравнений вида

$$\partial X/\partial t = f(X, A), \tag{1}$$

где $X=(x_1,\ldots,x_n)\in R$ - вектор фазовых переменных, $A=(a_1,\ldots,a_k)\in R$ - вектор параметров системы. Даются определения [3]: качественной одинаковости двух фазовых портретов; структурной устойчивости уравнения (1); бифуркации; точки бифуркации. Исследуются три основных типа бифуркации фазового портрета.

2.1. Бифуркация типа седло-узел. В качестве примера выбрано однопараметрическое уравнение

$$\partial x/\partial t = x^2 + a, \qquad x\in R,\ a\in R. \tag{2}$$

Анализ фазового портрета уравнения (2) показывает, что при $a=0$ происходит качественное изменение фазового портрета, то есть значение 0 является бифуркационным значением параметра a. Построение зависимости положения равновесия от параметра a дает диаграмму стационарных решений. Верхняя ветвь диаграммы показывает точки неустойчивого положения равновесия ($x(a)=+|a|^{1/2}$), нижняя ветвь - устойчивого ($x(a)=-|a|^{1/2}$). При значениях $a>0$ система неустойчива. При $a<0$ система стабилизируется в одном положении равновесия, другое положение равновесия (неустойчивое), как правило, не наблюдается. Название типа бифуркации появилось благодаря тому, что в двумерном случае положения равновесия имеют форму седла и узла.

2.2. Бифуркация типа вилки возникает в системах, в которых есть симметрия, то есть для которых дифференциальное уравнение (1) обладает свойством $f(-x,a)=-f(x,a)$. Примером является уравнение вида

$$\partial x/\partial t = ax - x^3. \tag{3}$$

Анализ фазовых портретов этого уравнения и диаграммы стационарных решений приводит к выводу, что при $a>0$ система имеет три положения равновесия: два устойчивых ($X(a)=(a)^{1/2}$, $X(a)=-(a)^{1/2}$) и одно неустойчивое ($X=0$). При $a<0$ существует одно положение равновесия ($X=0$).

2.3. Бифуркация Хопфа. Для примера рассматривается однопараметрическая система уравнений в полярных координатах [4]

$$\partial r/\partial t = r(a - r^2),$$
$$\partial \varphi/\partial t = 2\pi. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что положение равновесия $r=0$ существует при любых значениях параметра a. Для $a<0$ у уравнения существует еще один корень: $r=a$. Если рассматривать фазовую плоскость (r,φ), то второй корень будет соответствовать окружности. При значениях параметра a от $-a$ до a малому изменению параметра соответствует малое изменение величины r - мягкая потеря устойчивости. Противоположный случай называется жесткой потерей устойчивости и описывается системой однопараметрических уравнений вида

$$\partial r/\partial t = r(a + 2r^2 - r^4),$$
$$\partial \varphi/\partial t = 2\pi. \tag{5}$$

3. Одномерный хаос

Рассматривается одномерное разностное уравнение, описывающее динамику нелинейной системы. Например, изменение популяции какого-либо вида животного в определенном районе описывается отображением

$$X_{n+1} = AX_n(1 - X_n). \qquad (6)$$

Здесь X - число животных, n - номер года наблюдения изменения их числа, A - параметр, который определяется внешними факторами (питание, хищники, погодные условия и т.д.). Подчеркивается, что уравнение (6) описывает детерминированный процесс, поскольку начальное условие X_0 и параметр A не являются случайными. Казалось бы, движение, задаваемое уравнением (6), не может быть непредсказуемым. Однако при определенных значениях параметра A процессы, описываемые этим уравнением, могут обладать рядом стохастических свойств. Далее изучается, как происходит переход от упорядоченных режимов к стохастическим; как чередуются порядок и хаос; каковы основные сценарии переходов к стохастическим режимам.

3.1. Хаос по сценарию Фейгенбаума. Результат наблюдения за эволюцией популяции согласно (6) представляется графически посредством кривой $Y=X_{n+1} = f(A,X)$ (рис. 1 [5]). Из рис. 1, *а* видно, что при $n \to \infty$ $X_n \to 0$. Таким образом, при $A\leq 1$ уравнение (6) имеет единственный корень $X=0$. Для $A=2$ (рис.1, *б*), при $n \to \infty$ $X_n \to X''$, то есть у уравнения (6) два неотрицательных корня: $X=0$ и $X=X''$. В случае

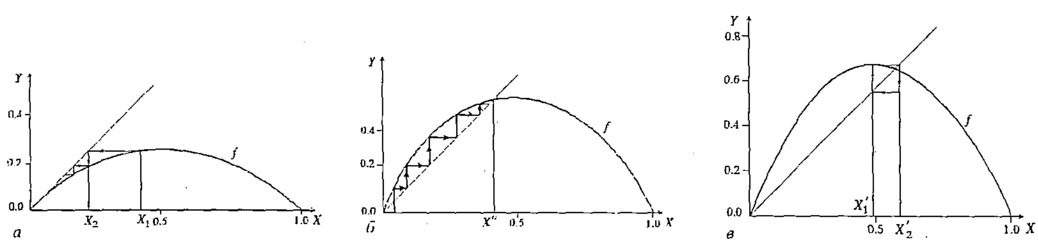


Рис. 1. Отображение первого возвращения для последовательности, формируемой уравнением (6) [5]: *а* - A =1.0; *б* - A = 2.0; *в* - A = 3.236

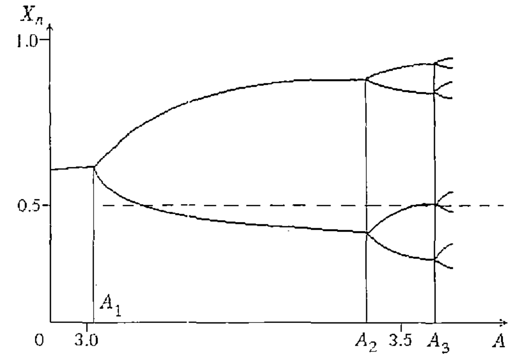
же, когда параметр $A=1+5^{1/2}$ (рис. 1, *в*), то, начиная с достаточно больших n, мы будем получать чередующиеся значения величин X_1' и X_2'. Такое решение называется устойчивым циклом с периодом 2 и обозначается S_2. Переход к S_2 происходит благодаря бифуркации, которая в данном случае носит название бифуркации удвоения периода. Дальнейшее увеличение A приводит к возникновению циклов с периодом 4, 8 и т.д.

Обсуждается устойчивость таких циклов. Как известно из теории устойчивости Ляпунова, в первом приближении можно предположить, что цикл устойчив, если выполняется условие

$$|\, \partial f(X_1')/\partial x * \partial f(X_2')/\partial x * \ldots * \partial f(X_n')/\partial x| < 1,$$

где X_n' - чередующиеся величины. Показано, что каждый раз, когда параметр A становится таким, что цикл S_p теряет устойчивость, происходит бифуркация и устойчивым становится цикл S_{p+1}. По мере роста A уравнение (6) дает непериодическую последовательность X_n, поскольку в этом случае в некоторой области фазового пространства существует бесконечное множество неустойчивых периодических циклов. Диаграмма стационарных решений для уравнения (6) представлена на рис. 2 [5]. Как было показано М. Фейгенбаумом, числовая

Рис. 2. Диаграмма стационарных решений уравнения (6) [5]



последовательность A_n точек бифуркационных значений параметра A ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем δ=4.6692016... . Поэтому можно записать выражение $(A_{n+1}-A_n)/(A_{n+2}-A_{n+1}) \to \delta$ при $n \to \infty$. Число δ, называемое числом Фейгенбаума, есть универсальная постоянная.

3.2. Хаос, связанный с перемежаемостью. Напоминается, что при наблюдении за спокойно текущей жидкостью можно заметить появление вихрей, поведение которых кажется случайным. После исчезновения вихрей картина становится вновь простой до появления следующего вихря. Между появлениями вихрей может пройти непредсказуемый по длительности интервал времени. Формулируются определения перемежаемости как типа хаотического движения, и в качестве простейшей модели, иллюстрирующей этот феномен, приводится следующее отображение

$$X_{n+1} = 1 - |X_n - A|^{1/2}/[1 + (X_n - A)^2]. \qquad (7)$$

Типичная картина перемежаемости применительно к (7) представлена на рис. 3[5] и рис. 4 [5]. В связи с анализом нелинейных систем вводятся понятия и даются определения странного аттрактора, кризиса аттрактора и метастабильного переходного хаоса (рис. 5 [5]).

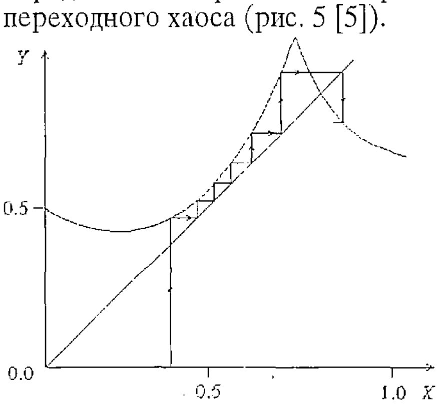


Рис. 3. Отображение первого возвращения для последовательности, формируемой уравнением (7) при A=0.769 [5]

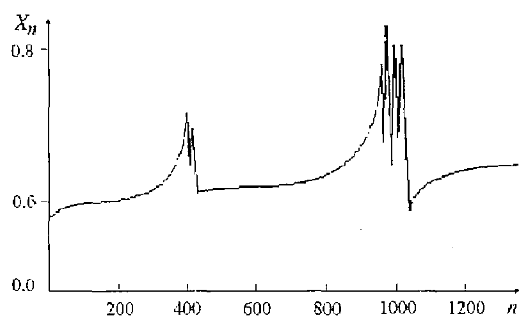


Рис. 4. Зависимость точек последовательности (7) от номера итераций [5]

Содержанием деятельности студента является:

- знакомство с типами переходов к хаосу через бифуркации и через перемежаемость;
- анализ на примерах одномерных отображений (6) и (7) эволюции систем, приводящей к детерминированному хаосу; к попаданию системы в странный аттрактор; к кризису.

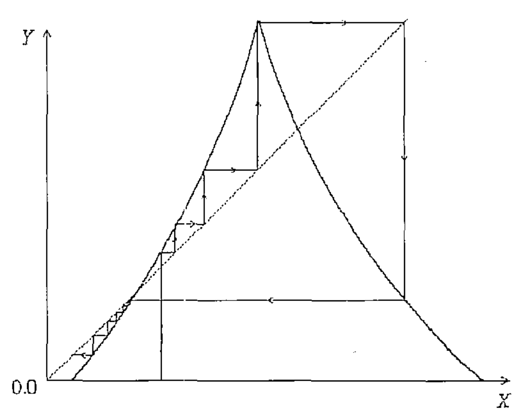


Рис. 5. Отображение первого возвращения для последовательности, формируемой уравнением (7) (метастабильный хаос) [5]

4. Фракталы

Даются понятие и примеры фракталов; вводится фрактальная размерность как количественная мера структурности фракталов. Для этого предварительно рассматривается плоский однородный кружок массой M и радиусом 1. При увеличении радиуса объекта от 1 до R, его масса увеличивается в R^2 раз, то есть связь массы и длины можно записать в виде

$$M(R) \sim R^d, \qquad (8)$$

где d - размерность пространства. Масштабное соотношение (8) тесно связано с интуитивным представлением о размерности и оказывает полезным для обобщения на другие значения размерности. Если d целая величина, то масштабное соотношение для плотности $\rho=M/R^d$ будет одинаковым для всех R и выразится как $\rho\sim R^0$. В самом общем случае d - величина не целочисленная (обозначается d_f). Тогда выражение (8) принимает вид: $M(R)\sim R^{d_f}$ и, следовательно, соотношение для плотности выглядит так

$$\rho(R) \sim M/R^d \sim R^{d_f-d},$$

то есть плотность такого объекта зависит от его радиуса. Величина d_f называется фрактальной размерностью. Приводится более точное определение фрактальной размерности, принадлежащее Ф. Хаусдорфу: пусть изучаемое множество лежит в p-мерном евклидовом пространстве. Рассматривается его покрытие p-мерными шарами радиуса ε_i, и определяется величина $l_d(\varepsilon)$ как

$$l_d(\varepsilon) = \inf \sum_i \varepsilon_i^d ,$$

где нижняя грань берется по всем возможным покрытиям таким, что $\varepsilon_i < \varepsilon$. Пусть

$$l_d = \lim_{\varepsilon\to 0} l_d(\varepsilon).$$

При больших значениях d $l_d \to 0$, при малых - $l_d \to \infty$. Хаусдорф показал, что существует критическое значение d_h: $d_h=\inf(d{:}l_d=0)=\sup(d{:}l_d = \infty)$. Обычно при $d=d_h$ величина l_d конечна. Вводится понятие хаусдорфовой размерности d_h множества. Для простых геометрических объектов хаусдорфова размерность является целочисленной: для отрезка $d_h=1$, для квадрата $d_h=2$, для куба $d_h=3$. Однако для фракталов, например, канторового множества хаусдорфова размерность будет дробной. Дробная хаусдорфова размерность называется фрактальной.

Содержанием деятельности студента является:

- подтверждение существования фракталов и возможности их конструирования на примере множества X_{n+1}= AMOD(X_n + C, 1.0);
- письменная интерпретация полученных результатов с использованием учебного словаря [6].

Библиографический список

1. *Паскаль И.Ю., Пойзнер Б.Н.* Сочетание реального и численного эксперимента в лабораторном практикуме вуза // Изв.вузов.Сер.Физика.1986. № 7. С.124.

2. *Баблоянц А.* Молекулы, динамика и жизнь. М.: Мир, 1990. С. 242.

3. *Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей . М. : Мир,1991

4. *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991.

5. *Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П.,Малинецкий Г.Г., Самарский А.А.* Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.

6. 101 термин синергетики: Учебный словарик/ Б.Н.Пойзнер,Т.А. Тухфатуллин.Томск, 1991.

Томский государственный университет

Поступила в редакцию 27.07.94
после переработки 31.01.95

THE ABC OF SYNERGETICS IS DISPLAYED ON THE COMPUTER SCREEN

R.R. Mudarisov, B.N. Poizner

Educational computing experiment «The ABC of synergetics: order in discrete system, bifurcations, one-dimension chaos, fractals» is elaborated. Basic definitions of synergetics and objects under exploring are briefly presented. Methodics accounted in the manual familiarize students with the basic ideas and mathematical models, necessary for understanding educational and scientific texts, concerning synergetics. Various nonlinear scenarios illustrate the processes typical for synergetics. Individual tasks solving by means of computer simulation carried out by students serve as a method of the problem education.

Мударисов Ренат Рамильевич - родился в 1967 году в Томске. Аспирант радиофизического факультета Томского университета. Области научных интересов: оптическая синергетика, нелинейная динамика лазерных систем.

Пойзнер Борис Николаевич - родился в 1941 году в Томске, окончил Томский университет в 1963 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ТГУ (1970) в области теории колебаний и волн. Доцент ТГУ. Область научных интересов: квантовая электроника, применение нелинейной динамики в оптике и материаловедении, прикладная наукометрия, культурологическая теория образования. Соавтор учебных пособий «Лабораторный практикум по физике лазеров», «Импульсные лазеры на плотных газах» и др. Опубликовал статьи по указанной тематике и по ряду гуманитарных проблем. Инициатор издания и редактор библиографических указателей, посвященных научному творчеству, применению компьютера в образовании, литературе и философии русской эмиграции, университетскому образованию, синергетике и сопредельным наукам. Член комиссии по творческому наследию Густава Шпета. Председатель Вольного Гуманитарного Семинара Томска.