

НЕЛИНЕЙНАЯ ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ СИСТЕМ

Д.А. Ковригин, А.И. Потапов

В части I развивается теоретико-волновой подход к исследованию задач нелинейной динамики одномерных упругих систем с сильной дисперсией. Излагается методика перехода от исходных нелинейных динамических уравнений в физических переменных к стандартной форме уравнений связанных нормальных волн, которые затем приводятся к эволюционным уравнениям, описывающим многоволновые резонансные взаимодействия, а также эффекты кроссвзаимодействия, самомодуляции и группового синхронизма длинных и коротких волн в зависимости от конкретной постановки задачи.

В части II исследуются эффекты нелинейного взаимодействия нормальных волн в прямолинейном стержне, совершающем плоские продольно-изгибные колебания. Показано, что в такой системе существуют два типа трехволновых резонансных взаимодействий, приводящих к повышению динамических напряжений вследствие распадной неустойчивости высокочастотных мод резонансных триплетов. Рассмотрены процессы формирования трехчастотных солитонов огибающих, самомодуляции изгибной волны и группового синхронизма длинной и короткой волн.

В части III показано, что в упругом кольце, обладающем дискретным спектром собственных частот, простейшими нелинейными динамическими объектами являются изолированные трехволновые резонансные ансамбли - триплеты. В частности, примером эволюции вырожденного триплета является взаимодействие осесимметричных колебаний кольца с двумя изгибными волнами половинной частоты, бегущими в противоположных направлениях. Описаны нелинейные эффекты периодического обмена энергии между модами триплета и возбуждения сопряженных форм изгибных колебаний кольца. Отмечена возможность самомодуляции изгибных волн и их трансформации в стационарные волны, близкие к солитонам огибающих. Приведены оценки коэффициента повышения динамических напряжений при распадной неустойчивости высокочастотных мод резонансного триплета, которые хорошо согласуются с известными экспериментальными данными.

Часть I. Метод связанных нормальных волн

Введение

Рост частоты и ширины спектра возбуждаемых колебаний в упругих телах делает невозможным однозначное разделение динамических процессов на колебания и волны деформации. Это приводит к необходимости изучения виброакустического поля как единого динамического процесса с изменяющейся пространственно-временной структурой [1]. В результате стираются грани между

исследованиями колебаний упругих систем, когда доминирует спектральный подход, и исследованиями волн деформации, где преобладает пространственно-временное описание динамических процессов. С другой стороны, для более полного анализа динамического поведения и расчета напряженно-деформированного состояния упругих систем часто недостаточно линейных теорий, так как линеаризация дифференциальных уравнений и краевых условий в ряде случаев приводит к тому, что существенные явления динамики упругой системы не отражаются даже качественно и исключаются из рассмотрения еще на этапе формулирования задачи. В этих случаях необходимы математические модели более высоких приближений, учитывающие геометрическую и физическую нелинейности упругих тел, взаимодействие полей деформации и температуры, влияние микроструктуры среды на напряженно-деформированное состояние и т.п. [2-4].

В последние годы в механике сплошных сред в результате синтеза нелинейной теории колебаний и нелинейной теории волн сформировалось новое направление - нелинейная волновая динамика [1-6]. В методическом плане оно представляет собой рациональное сочетание наиболее сильных сторон пространственно-временного и спектрального описаний динамических процессов. Нелинейная волновая динамика включает в себя, как составные части, вопросы построения нелинейных математических моделей, описывающих динамическое поведение упругих тел с требуемой степенью точности, выделение универсальных колебательно-волновых закономерностей из многочисленных деталей конкретной физической постановки задачи и выработку «колебательно-волновых» образов на основе адекватных им математических методов решения нелинейных уравнений, а также выявление характерных нелинейных эффектов в конкретных системах и экспериментальную проверку теоретических результатов.

Так как решение нелинейных динамических задач, описываемых уравнениями в частных производных, достаточно сложно даже при условии применения ЭВМ, то значительную роль играют различные соображения физического характера и асимптотические методы. Рассмотрение нелинейных задач, как правило, начинают с обсуждения общей ситуации и стараются выяснить возможности тех или иных упрощений с тем, чтобы свести их к виду, допускающему эффективное исследование методами теории нелинейных колебаний и волн [7-10].

При исследовании нелинейных волн деформации в упругих телах на протяжении последних 10-15 лет основное внимание уделялось изучению уединенных (солитоноподобных) волн и их взаимодействий в средах со слабой дисперсией (продольные и сдвиговые волны в стержнях и пластинах, в упругих средах с микроструктурой и т.п. [3,4,6]). Нелинейные волны деформации в средах с сильной дисперсией и несколькими типами нормальных волн остаются менее изученными. К ним относится широкий круг задач о нелинейном взаимодействии продольных и изгибных волн в стержнях, пластинах и оболочках [1,4,6,11], а также волн в ориентированных средах и средах с микроструктурой [12,13]. В таких системах, как правило, невозможно или затруднено формирование солитонов деформации, но весьма распространенными являются многоволновые резонансные взаимодействия, эффекты самомодуляции квазигармонических волн и образование солитонов огибающих [1,2,11,21,25].

1. Модельные уравнения нелинейной волновой динамики. Два типа нелинейных задач

Распространение слабонелинейных волн в упругих средах обычно описывается квазилинейными дифференциальными уравнениями с частными производными

$$\mathbf{M}_0 \mathbf{u}_t + \mathbf{C}_0 (\partial/\partial x) \mathbf{u} = \mu \mathbf{N}_0(\mathbf{u}, \partial/\partial x), \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(x,t) = \{u_i(x,t)\}$ ($i=1,2,\dots,N$) - вектор искомых физических величин; $\mathbf{M}_0(\partial/\partial x)$ и $\mathbf{C}_0(\partial/\partial x)$ - линейные дифференциальные матричные операторы, характеризующие инерционные и упругие свойства системы; \mathbf{N}_0 - вектор нелинейных величин; x - лагранжева координата; t - время; μ - малый параметр задачи.

Точные решения исходных нелинейных уравнений (1) удается получить в редких случаях. К ним относятся, например, простые и автомоделные волны, полученные путем разделения переменных после соответствующего преобразования подобия. Основным же способом аналитического решения являются приближенные методы, большинство из которых связано с близостью искомого решения к порождающему «невозмущенному» решению [7,8]. Эта близость характеризуется малым параметром μ , содержащимся либо в самих уравнениях (1), либо в граничных или начальных условиях.

Можно выделить два типа нелинейных задач. В задачах первого типа учет нелинейных факторов приводит к малым изменениям «невозмущенного» решения, описываемого известным семейством функций. При их решении используются традиционные методы возмущений, с помощью которых отыскиваются поправки по малому параметру к решению, определенному при $\mu=0$ [7].

Во втором типе задач учет малого нелинейного фактора приводит к появлению новых качественных эффектов, отсутствующих при $\mu=0$. При этом попытки описания новых нелинейных динамических свойств системы с помощью малых добавок к порождающему решению являются некорректными. Адекватное описание нелинейной динамики системы в этих случаях достигается путем замены (перенормировки) переменных, построением уравнений для новых искомых величин и нахождением формул связи между новыми и старыми переменными [1,14,15]. В этих переменных исходная система уравнений преобразуется к некоторой стандартной (модельной) форме. Это позволяет выделить из многочисленных деталей физической постановки ее главную волновую часть и более подробно изучить эволюцию нелинейных волн, их структуру и взаимодействие при минимальных предположениях о виде искомого решения.

2. Метод нормальных волн

Для приведения системы уравнений к стандартной (модельной) форме могут быть использованы различные методы. Здесь будет рассмотрен лишь метод связанных нормальных волн [14, 15], идея которого восходит к методу нормальных колебаний в системах с N степенями свободы. Как известно [9, 10], в линейных системах можно ввести нормальные координаты, такие, что движения по каждой из них (называемые нормальными колебаниями) происходят независимо от движения по остальным координатам. В нелинейных же системах нормальные колебания оказываются связанными между собой и тип их взаимодействия полностью определяется структурой нелинейных слагаемых [10]. Процедура введения нормальных переменных распространяется и на распределенные системы, описываемые дифференциальными уравнениями с частными производными. Такой подход максимально упрощает линейную часть задачи и создает предпосылки для эффективного и единообразного упрощения исходных уравнений.

Вернемся к уравнению (1). Его левая часть описывает суперпозицию линейных нормальных волн $u_i \sim u_0 \exp(\omega t - kx)$, свойства которых полностью определяются дисперсионным уравнением

$$D(\omega, k) = \det \{ \mathbf{C}_0(-ik) - \omega^2 \mathbf{M}_0(-ik) \}. \quad (2)$$

В неограниченных системах частоты ω и волновые числа k связаны, в общем случае, непрерывными зависимостями $\omega_n = \omega_n(k)$ ($n=1, 2, \dots, N$), которые выделяют N независимых нормальных мод. В ограниченных системах ω и k образуют дискретный спектр, который определяется из решения дисперсионного уравнения (2) совместно с краевыми условиями задачи.

Уравнения (1) при операторной форме записи ($\partial/\partial x \Rightarrow p$) можно интерпретировать как систему, описывающую движение N квазилинейных связанных осцилляторов. Чтобы избавиться от линейной связи, перейдем от физических переменных u к нормальным координатам $q = \{q_n\}$ с помощью линейного невырожденного преобразования

$$u = \Psi(p)q. \quad (3)$$

В этом случае система (1) сводится к квазинормальной форме

$$q_n + \Omega^2(p)q = \mu \Psi^{-1} M_0^{-1} N_0(\Psi q, p). \quad (4)$$

$\Psi(p)$ - невырожденная квадратная матрица преобразования к нормальным координатам, составленная из компонент правых собственных (поляризационных) векторов $\{\Psi_m\}$ ($m=1, 2, \dots, N$), определяемых из характеристического уравнения:

$$[C_0(p) - \omega_m^2 M_0(p)] \Psi_m = 0. \quad (5)$$

$\Omega^2(p) = \Psi^{-1} M_0^{-1} C_0 \Psi$ - диагональная матрица, составленная из собственных значений характеристической системы (5), Ψ^{-1} , M_0^{-1} - обратные матрицы.

Уравнения (4) наиболее удобны при анализе динамических процессов, когда удается разделить пространственную и временную переменные (разложение по стоячим волнам). Часто используют форму записи системы (4) через комплексно-сопряженные переменные Q и Q^* :

$$Q = \Omega(p)q + iE q, \quad Q^* = \Omega(p)q - iE q, \quad (6)$$

(E - единичная матрица), в которых (4) принимает вид уравнений связанных нормальных волн [1, 15]

$$Q_t + i\Omega(p)Q = \mu Y(Q, Q^*), \quad (7)$$

где $Y = i\Omega^{-1} M_0^{-1} N_0(q, q^*)$. Эта форма записи наиболее удобна при анализе динамических явлений с помощью теории нелинейных волн [9, 15].

Таким образом, переход к уравнениям связанных нормальных волн (4) разделяет проблему анализа нелинейной волновой динамики упругой системы на две задачи: выделение нормальных волн $Q(x, t)$ в линейной подсистеме (7) и изучение их нелинейного взаимодействия.

3. Два подхода к описанию нелинейной эволюции нормальных волн

Операторные уравнения (4) и (7) вместе с формулами связи (3) и (6) эквивалентны исходной системе уравнений (1), так как при их выводе не предполагались ни малость нелинейности, ни слабость дисперсии. Малость этих параметров используется только при дальнейшем упрощении уравнений (4), (7). В общем случае (4) и (7) соответствуют нелинейным интегродифференциальным уравнениям весьма сложного вида. В качестве малых параметров могут выступать также малость относительной ширины спектральной полосы волнового процесса, близость искомого решения к стационарной волне и т.п. В теории нелинейных волн для анализа уравнений (4), (7) применяются различные методы, основанные либо на пространственно-временном, либо на спектральном способах описания

волновых процессов. Пространственно-временное описание, как правило, используется при исследованиях нелинейных систем со слабой дисперсией. В этих случаях из-за возбуждения большого числа синхронизированных между собой гармоник форма волны может изменяться от синусоидальной при малой амплитуде до импульсной (солитонной) при большой амплитуде [6, 9].

Спектральное описание волновых процессов [8,9] используется при исследовании систем с сильной дисперсией, когда нелинейность существенно сказывается лишь для группы из небольшого числа нормальных волн, частоты и волновые числа которых удовлетворяют условиям *фазового синхронизма*

$$\sum_{j=1}^J n_j \omega_j = \Delta\omega; \quad \sum_{j=1}^J n_j k_j = 0. \quad (8)$$

Здесь J - число взаимодействующих волн; $\Delta\omega$ - малая частотная расстройка ($\Delta\omega/\omega_j \ll 1$). Такие группы волн называются резонансными волновыми ансамблями. Теоретический анализ показывает, что нелинейные слагаемые, входящие в правую часть уравнений (7), не все равноправны. Среди них есть «резонансные» слагаемые, приводящие к появлению секулярных слагаемых в решении, и «нерезонансные» слагаемые, дающие лишь малые поправки к порождающему решению нелинейной задачи. В принципе от «нерезонансных» нелинейных слагаемых всегда можно избавиться с помощью специальной замены переменных (теорема Пуанкаре-Дюлака) [10,18]. «Резонансные» же слагаемые, выделяемые с помощью условий (8), невозможно уничтожить никакими взаимно однозначными заменами переменных. По этой причине резонансные волновые ансамбли являются динамическими объектами сугубо нелинейной природы.

В прикладных задачах нелинейной динамики часто достаточно изучить лишь основные типы резонансных волновых ансамблей, состоящих из троек или четверок нормальных волн [1,19-21]. Они могут быть как изолированными, представляя собой структурно устойчивые нелинейные динамические объекты [3, 8, 12], так и неизолированными. Последнее приводит к возникновению каскадных процессов переноса энергии колебаний от одних мод колебаний к другим, вверх и вниз по спектру, что может привести к хаотизации движения [17].

4. Трехволновые взаимодействия. Первое приближение

В системах с квадратичной нелинейностью наиболее общими являются трехволновые резонансные взаимодействия. Тройка резонансно взаимодействующих волн называется *резонансным триплетом* или *триадой* [17,19,20]. Условия фазового синхронизма волн в резонансном триплете имеют следующий вид:

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega; \quad k_1 + k_2 = k_3. \quad (9)$$

Здесь ω_j, k_j - частоты и волновые числа взаимодействующих нормальных волн, пронумерованные в порядке возрастания частоты; $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$. Соотношения (9) можно условно изобразить в виде диаграммы, наглядно иллюстрирующей процесс распада высокочастотной волны на две (рис. 1,а) или слияния двух волн в одну (рис. 1,б).

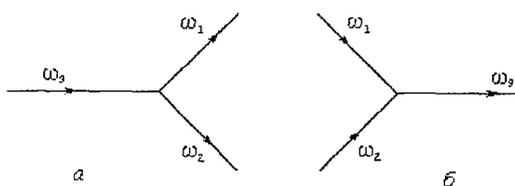


Рис. 1. Процессы распада (а) и слияния (б) волн резонансного триплетта

В непрерывной части спектра колебаний решение эволюционных уравнений (7) ищем в виде интеграла Фурье

$$Q_n(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_n(\chi,\tau,k) \exp i[\omega_n(k)t - kx] dk + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m w_m^{(n)}(x,t), \quad (10)$$

где $A_n(\chi,\tau,k)$ - медленно меняющиеся комплексные амплитуды квазинормальных волн; $\chi = \mu x$, $\tau = \mu t$ - «медленные» переменные; $w_m^{(n)}(x,t)$ - малые поправки к решению. В дискретной части спектра, $k=k_j$, спектральная плотность в последнем выражении в общем случае представляется в виде суммы дельта функций, то есть $A_n(\chi,\tau,k) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{nj}(\chi,\tau) \delta(k - k_j)$. В этом случае решение уравнений (7) является суперпозицией модулированных квазигармонических волн

$$Q_n(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{nj}(\chi,\tau) \exp i[\omega_n(k_j)t - k_j x] + \sum_{m=1}^{\infty} \mu^m w_m^{(n)}(x,t). \quad (11)$$

Однако, из всего набора квазинормальных волн (10) или (11) эффективно будут взаимодействовать лишь те волны, частоты ω_j и волновые числа k_j которых, помимо условий фазового синхронизма (9), удовлетворяют еще и дисперсионному соотношению линеаризованной системы уравнений (7)

$$\det[\omega_j E - \Omega(-ik_j)] = 0. \quad (12)$$

Поэтому в первом нелинейном приближении достаточно рассмотреть эволюцию резонансно взаимодействующих троек квазинормальных волн. Каждая изолированная тройка медленно меняющихся амплитуд $A_j(\chi,\tau) = A_n(\chi,\tau,k_j)$ в первом нелинейном приближении удовлетворяет системе укороченных уравнений (см. [2] и часть III данной работы; крышки над новыми переменными далее опускаются)

$$\partial A_j / \partial \tau + v_j \partial A_j / \partial \chi = -i \alpha \sigma_j \partial U / \partial A_j^*, \quad (13)$$

где $v_j = d\omega_j(k_j)/dk$ - групповые скорости взаимодействующих волн; $\sigma_j = \sigma_j(k_j)$ - нормированные коэффициенты линейной связи с $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_3$; $\alpha = \alpha(k_1, k_2, k_3)$ - коэффициент нелинейности. Усредненный потенциал трехволнового взаимодействия имеет следующий вид:

$$U(A_j, A_j^*) = A_1 A_2 A_3^* \exp(-i\Delta\omega t) + A_1^* A_2^* A_3 \exp i\Delta\omega t. \quad (14)$$

Краевые условия для комплексных амплитуд $A_n(\chi,\tau)$ получаются из граничных условий для физических переменных u после подстановки в них выражений (3), (6) и разложения в ряд по параметру μ . Эволюционные уравнения (13) корректно описывают поведение системы на временах $\omega t < 1/\mu$.

Трехволновое резонансное взаимодействие является весьма важным нелинейным эффектом в системах различной физической природы [17,19]. Оно описывает энергообмен между различными модами триплета, подкачку энергии по одной моде и ее последующую перекачку в другую моду, что приводит к возбуждению интенсивных колебаний на таких частотах и по таким направлениям, где непосредственно не действуют внешние силы.

Заметим, что эволюционные уравнения (13) могут быть записаны в форме уравнений Гамильтона [19]

$$i \partial A_n / \partial \tau = \delta H / \delta A_n^*, \quad (15)$$

где гамильтониан системы взаимодействующих волн имеет вид

$$H = \alpha \sigma_n U(A_n, A_n^*) + (i/2) \sum_{j=1}^3 v_j (A_j \partial A_j^* / \partial \chi - A_j^* \partial A_j / \partial \chi), \quad (16)$$

$\delta/\delta A_n = \partial/\partial A_n - \partial/\partial \chi [\partial/\partial (\partial A_n/\partial \chi)]$ - функциональная производная. Гамильтонова структура уравнений (13) указывает на существование законов сохранения. Один из законов сохранения очевиден: $H(A_j, A_j^*) = \text{const}$. Другие могут быть записаны в виде уравнений переноса для интенсивностей нормальных волн $I_n = |A_n|^2$

$$\begin{aligned} \partial(\sigma_2 I_1 - \sigma_1 I_2)/\partial \tau - \partial(v_1 \sigma_2 I_1 - v_2 \sigma_1 I_2)/\partial \chi &= 0, \\ \partial(\sigma_3 I_1 - \sigma_1 I_3)/\partial \tau - \partial(v_1 \sigma_3 I_1 - v_2 \sigma_1 I_3)/\partial \chi &= 0, \\ \partial(\sigma_3 I_2 + \sigma_2 I_3)/\partial \tau - \partial(v_2 \sigma_3 I_2 + v_3 \sigma_2 I_3)/\partial \chi &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В частных случаях пространственно однородного ($\partial/\partial \chi=0$) или установившегося ($\partial/\partial \tau=0$) волнового процесса уравнения (17) сводятся к интегралам движения, известным в форме частотно-энергетических соотношений Мэнли-Роу [17]:

$$\begin{aligned} \sigma_2 I_1 - \sigma_1 I_2 &= C_1, \\ \sigma_3 I_1 - \sigma_1 I_3 &= C_2, \\ \sigma_3 I_2 + \sigma_2 I_3 &= C_3, \end{aligned} \quad (18)$$

где C_n - постоянные интегрирования. Соотношения (18) содержат информацию о перераспределении энергии между компонентами резонансного триплета. Из них также следует, что полная энергия триплета сохраняется

$$I_1 + I_2 + I_3 = \text{const}, \quad (19)$$

то есть все интегральные кривые эволюционных уравнений (13) при $\partial/\partial \chi=0$ расположены в конфигурационном пространстве (A_1, A_2, A_3) на поверхности равной энергии (18), представляющей собой трехосный эллипсоид (рис. 2). На эллипсоиде имеются три состояния равновесия, отвечающие синусоидальным колебаниям на одной из компонент триплета: два из них типа «центр» ($A_3=0, A_{1,2} \neq 0$) и одно типа «седло» ($A_3 \neq 0, A_{1,2}=0$). Из (18) следует, что, если при $\tau=0$ энергия колебаний была запасена, в основном, в высокочастотной компоненте триплета, то есть $I_3(0) \gg \gg I_{1,2}(0)$, то уменьшение интенсивности первичной волны $I_3(t)$ сопровождается одновременным ростом интенсивностей вторичных волн $I_1(t)$ и $I_2(t)$. На поверхности равной энергии (19) этой ситуации соответствует движение изображающей точки по замкнутой кривой, лежащей вблизи сепаратрисы «седла» (траектория 1). Такой процесс называется *распадной неустойчивостью*. Он сопровождается периодическим обменом энергии между высокочастотной (I_3) и низкочастотными ($I_{1,2}$) волнами триплета.

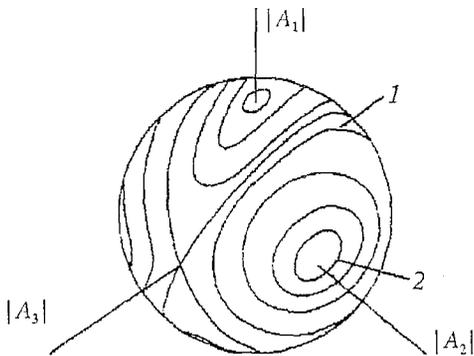


Рис. 2. Поведение фазовых траекторий триплета на поверхности постоянной энергии

Если при $\tau=0$ энергия была запасена в одной из низкочастотных компонент триплета, например, $I_2(0) \gg I_{1,3}(0)$, то изменения интенсивностей волн на частотах ω_2 и ω_3 будут незначительными. На поверхности (19) этому соответствует движение изображающей точки по замкнутой траектории вблизи «центра» (траектория 2). Это означает, что в системе реализуется практически одночастотное колебание с амплитудой $A_2(t) \approx A_2(0)$. Амплитуды других волн триплета останутся малыми по сравнению с $A_1(t)$.

Из интегралов движения (18), (19) следует, что выполнение условий фазового синхронизма (9) является лишь необходимым условием возникновения трехволновых резонансных взаимодействий. Сам же характер волнового процесса существенно зависит от того, в какой компоненте триплета запасена энергия колебаний в начальный момент времени.

В случае пространственно однородных или установившихся процессов уравнения (13) точно интегрируются в эллиптических функциях. Впервые это было показано Н. Бломбергом на примере трехволновых взаимодействий в нелинейной оптике [23]. В общем же виде эволюционные уравнения (13) могут быть проинтегрированы методом обратной задачи рассеяния [24].

5. Трехволновые взаимодействия. Второе приближение

Для вывода эволюционных уравнений второго приближения в выражении (10) необходимо учитывать слагаемые $w_n^{(1)}$, содержащие вторичные волны с комбинационными фазами, отличными от $\Phi_n = \omega_n t - k_n x$ и потребовать ограниченности следующей поправки $w_n^{(2)}$. В этом приближении уравнения трехволнового взаимодействия будут иметь следующую форму [25]:

$$(\partial A_n / \partial \tau + v_n \partial A_n / \partial \chi) - (\mu i v' / 2) \partial^2 A_n / \partial \chi^2 = -i \alpha \sigma_n \partial U / \partial A_n^* + \mu i A_n \sum_{m=1}^3 \alpha_{nm} |A_m|^2, \quad (20)$$

где v' - параметр дисперсии групповой скорости волнового пакета на частоте ω_n ; α_{nm} - матричные коэффициенты нелинейного взаимодействия второго приближения. Уравнения (20) описывают динамику нелинейной системы на временах $1/\mu \leq \omega t \leq 1/\mu^2$.

Отметим, что во втором приближении появились два новых слагаемых более высокого порядка малости. Третье слагаемое в левой части (20) описывает эффекты дисперсионного расплывания волновых пакетов из-за различия групповых скоростей волн в пределах спектральной полосы волнового пакета. Второе слагаемое в правой части (20) описывает взаимное влияние волн триплета на изменения их фазовых скоростей. Диагональные члены $\alpha_{nn} A_n |A_n|^2$ описывают изменения фазовой скорости волны A_n , пропорциональные квадрату ее амплитуды (самовоздействие волны), а недиагональные члены $\alpha_{nm} A_n |A_m|^2$ ($n \neq m$) - изменения фазовых скоростей в результате взаимного (перекрестного) влияния пар волн A_n и A_m (эффект кроссвзаимодействия). Первый из этих эффектов был открыт для нелинейных волн на воде Дж. Стоксом еще в 1847 году [22], а второй был обнаружен лишь через сто с лишним лет для нелинейных волн в плазме (так называемый Люксембург-Горьковский эффект) [26] и, независимо от этого, для нелинейных гравитационных волн на поверхности воды [22].

Влияние эффектов второго порядка на динамику резонансных триплетов при $\partial/\partial \chi = \partial^2/\partial \chi^2 = 0$ исследовалось в работах [17, 27]. Было показано, что соотношения Мэнли-Роу и закон сохранения энергии не нарушаются, но характер обмена энергии между модами триплета становится другим. В полном же виде нелинейные эволюционные уравнения (20) остаются пока еще не исследованными.

6. Четырехволновые взаимодействия

В системах с кубической нелинейностью наиболее общим является резонансное взаимодействие четверок квазигармонических нормальных волн, удовлетворяющих условиям пространственно-временного синхронизма

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 + \Delta\omega, \quad k_1 + k_2 = k_3 + k_4. \quad (21)$$

Диаграммы, иллюстрирующие процессы распада и слияния четверок волн, приведены на рис. 3. Такие ансамбли получили название *резонансных тетрад*. Эволюционные уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд тетрады A_n ($n=1,2,3,4$) имеют вид

$$(\partial A_n / \partial \tau + v_n \partial A_n / \partial \chi) - (\mu i v' / 2) \partial^2 A_n / \partial \chi^2 = i \mu \gamma \sigma_n \partial U / \partial A_n^* + \mu i A_n \sum_{m=1}^4 \gamma_{nm} |A_m|^2, \quad (22)$$

где γ, γ_{nm} - коэффициенты нелинейной связи нормальных волн. Усредненный потенциал четырехволнового взаимодействия имеет следующий вид:

$$U(A_n, A_n^*) = A_1^* A_2^* A_3 A_4 \exp i \Delta \omega t + A_1 A_2 A_3^* A_4^* \exp (-i \Delta \omega t). \quad (23)$$

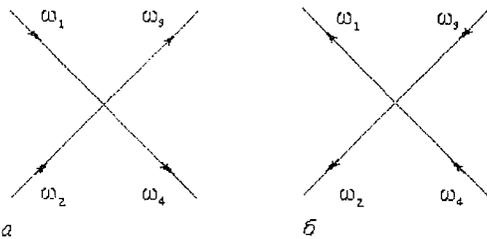


Рис. 3. Диаграммы четырехволновых взаимодействий: *a* - слияние волн, *б* - распад волн в тетраде

Заметим, что уравнения (22) по своей структуре совпадают с уравнениями второго приближения для трехволнового взаимодействия (20) в среде с квадратичной нелинейностью. Отличия заключаются лишь в выражениях для потенциала $U(A_n, A_n^*)$ и значениях коэффициентов нелинейной связи γ и γ_{nm} .

Так как все нелинейные слагаемые, входящие в (22), имеют третий порядок малости, то четырехволновые взаимодействия являются более слабыми по сравнению с трехволновыми. Тем не менее, в системах с кубической нелинейностью они являются весьма распространенным механизмом обмена энергии между различными нормальными волнами [17, 19, 20].

В таких системах имеют место процессы синхронного взаимодействия, аналогичные трехволновым резонансным взаимодействиям волн в системах с квадратичной нелинейностью, если, например, одно из полей является статическим: $\omega_4=0, k_4 \neq 0$. Другими частными примерами четырехволновых взаимодействий являются возбуждение третьей гармоники $\omega+\omega+\omega \Rightarrow 3\omega$, или третьей субгармоники $3\omega \Rightarrow \omega+\omega+\omega$. К четырехволновым синхронным взаимодействиям относится также параметрический резонанс $2\omega_1 \Rightarrow \omega_3+\omega_4$, соответствующий второй зоне параметрической неустойчивости. При таком взаимодействии энергия основной волны (ω_1, k_1) в результате развития параметрической неустойчивости передается сателлитам с частотами как выше, так и ниже частоты основной волны.

Кроме того, возможны эффекты *несинхронных взаимодействий*. К ним относится, в первую очередь, эффект самовоздействия $\omega_1 - \omega_1 \Rightarrow \omega_1 - \omega_1$, проявляющийся в возникновении нелинейной добавки к фазовой скорости волны (к частоте), пропорциональной квадрату амплитуды волны. Этот эффект описывается диагональными членами последнего слагаемого в правой части (22). В теории же нелинейных колебаний упругих систем этот эффект известен как явление неизохронности колебаний [9, 10, 28].

Другим типом несинхронного взаимодействия является *кросс-взаимодействие*, наблюдаемое при распространении двух волн с различными частотами $\omega_1 \pm \omega_2 \Rightarrow \omega_1 \pm \omega_2$.

Оно описывается недиагональными членами последнего слагаемого в правой части (22) и учитывает изменение фазовых скоростей волн в результате их перекрестного влияния друг на друга. Этот эффект используется, в частности, для измерения нелинейных модулей упругости четвертого порядка [29].

Заключение

Многоволновые нелинейные взаимодействия в одномерных упругих системах с сильной дисперсией адекватно описываются уравнениями связанных нормальных волн различных типов.

В таких системах могут формироваться резонансные волновые ансамбли, простейшие из которых состоят из троек и четверок квазигармонических волн, выделяемых с помощью условий фазового синхронизма (9) и (21).

Для трехволновых взаимодействий характерна неустойчивость высокочастотной компоненты по отношению к малым возмущениям (распадная неустойчивость). Низкочастотные компоненты триплета устойчивы. При четырехволновых взаимодействиях волны сливаются и распадаются парами. В случае совпадения волн, составляющих отдельные пары, могут наблюдаться эффекты самомодуляции и кроссмодуляции.

Эволюционные уравнения, описывающие амплитудно-фазовую модуляцию взаимодействующих волн, содержат минимальное количество характеристических параметров, описывающих нелинейные дисперсионные и диссипативные свойства изучаемых объектов.

Поэтому такие уравнения могут быть использованы в качестве структурных схем для идентификации объектов по экспериментальным данным в обратных задачах нелинейной динамики [30].

Мы признательны А.А. Новикову, совместно с которым была опубликована работа [15] и профессору Ж.А. Можену, любезно предоставившему отписки своих статей [13].

Часть II. Системы со сплошным спектром

Введение

Проблема нелинейного взаимодействия различных типов волн в твердых деформируемых телах сравнительно давно привлекает внимание исследователей [1-4]. Простейшей моделью твердого тела, где возможны подобные эффекты, может служить бесконечный прямолинейный стержень, совершающий плоские продольно-изгибные колебания. Такая система обладает сплошным спектром собственных частот, и к ней в полной мере применима теория нелинейного взаимодействия связанных нормальных волн, развитая в части I. Кроме того, эта задача имеет и самостоятельный интерес, так как она тесно связана с проблемой потери устойчивости длинных прямых стержней [5, 6] и тонких цилиндрических оболочек [6-9] при осевом ударе.

1. Основные уравнения. Условия фазового синхронизма

Нелинейные продольно-изгибные волны в прямом стержне в простейшем случае описываются следующей системой уравнений [11]:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= (\mu/2) \partial_x w_x^2, \\ w_{tt} + \alpha^2 w_{xxxx} &= \mu \partial_x u_x w_x + (\mu^2/2) \partial_x w_x^3, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u = u'/u_0$, $w = w'/u_0$ - безразмерные продольные и поперечные смещения точек срединной линии стержня, соответственно (штрихами обозначены физические переменные); $u_0 = \max(u'^2 + w'^2)^{1/2}$; $x = x'/\lambda$, $t = (c/\lambda)t'$ - безразмерные координата и время; $c = (E/\rho)^{1/2}$ - скорость распространения продольной волны; $\mu = u_0/\lambda \ll 1$ - характерная деформация; λ - характерная длина волны (например, минимальная длина волны в изучаемом процессе или длина стержня между опорами); $\alpha = a/\lambda \ll 1$ - параметр, характеризующий малость радиуса инерции стержня по отношению к характерной длине волны (для круглого стержня $a = d/4$, где d - диаметр; для стержня прямоугольного сечения $a = h/12^{1/2}$, где h - толщина).

При исследовании низкочастотных изгибных колебаний стержня часто используют допущение о нерастяжимости срединной линии [6,10] и пренебрегают инерционным слагаемым в уравнении для продольных волн. В этом случае система (1) сводится к одному нелинейному уравнению для изгибных волн. Однако при высоких частотах колебаний растяжимостью срединной линии и наличием инерции продольных деформаций пренебрегать уже нельзя. Учет этого фактора приводит к возникновению нелинейной связи между изгибными и продольными волнами и появлению резонансного взаимодействия между ними [14, 15].

В линейном приближении ($\mu=0$) система (1) обладает двумя дисперсионными ветвями

$$\omega_b = \alpha k^2, \quad \omega_l = k. \quad (2)$$

Одна из них, ω_l , описывает продольные волны, а другая, ω_b , - изгибные. Дисперсионные кривые имеют две «особые» точки: точку группового синхронизма, $\omega_g=1/4\alpha$, $k_g=1/2\alpha$, где скорость продольной волны совпадает с групповой скоростью изгибной волны, и точку фазового синхронизма, $\omega_g=1/\alpha$, $k_g=1/\alpha$, где скорость продольной волны совпадает с фазовой скоростью изгибной волны. Мы будем рассматривать волновые процессы при $|k|<1/\alpha$, так как в противном случае математическая модель (1) теряет физический смысл.

Система уравнений (1) уже имеет стандартную форму (I.4)¹, где переменные u и w образуют компоненты вектора нормальных координат q_1 и q_2 соответственно, а дифференциальные операторы, соответствующие различным дисперсионным ветвям системы, имеют вид: $\Omega_1^2 = -p^2$, $\Omega_2^2 = \alpha^2 p^4$ ($p = \partial/\partial x$). Правые части уравнений (1) описывают нелинейное взаимодействие нормальных волн u и w , и содержат как квадратичные, так и кубические слагаемые.

Уравнения (1) имеют решения в виде бегущих стационарных волн $u=u(\zeta)$ и $w=w(\zeta)$, где $\zeta=x-Vt$, свойства которых подробно проанализированы в работах [10,12²,13]. Здесь же мы остановимся на рассмотрении резонансных взаимодействий троек квазигармонических волн, удовлетворяющих дисперсионному соотношению (2) и условиям фазового синхронизма (I.9). Анализ показывает, что такие тройки волн (триплеты) состоят из одной продольной и двух изгибных волн и могут быть двух типов.

В триплете первого типа (триплет-1) высокочастотной является продольная волна (то есть $\omega_3=k_3$; $\omega_{1,2}=\alpha k_{1,2}^2$). В этом случае действительные решения дисперсионного уравнения (2), удовлетворяющие условиям фазового синхронизма (I.9) при $\Delta\omega=0$, имеют следующий вид [14]:

$$k_{2,1} = 1/2 k_3 \pm (k_3/2\alpha - k_3^2/4)^{1/2}, \quad \omega_{2,1} = 1/2 \omega_3 (1 \pm (2\omega_3/\alpha - \omega_3^2)^{1/2}). \quad (3)$$

Эти решения существуют в интервале $|k_3|<1/\alpha$, причем вторичные волны всегда направлены в противоположные стороны, так как $k_1 k_2 < 0$. Графическое изображение триплета-1 на дисперсионной плоскости приведено на рис. 1, а.

В триплете второго типа (триплет-2) высокочастотной является изгибная волна (то есть $\omega_3=\alpha k_3^2$, $\omega_2=k_2$, $\omega_1=\alpha k_1^2$). В этом случае решения системы (2) и (I.9) при $\Delta\omega=0$ имеют вид

$$\begin{aligned} k_1 &= 2k_3 - 1/\alpha, & k_2 &= 1/\alpha - k_3, \\ \omega_1 &= 2(\omega_3/\alpha)^{1/2} - 1/\alpha, & \omega_2 &= \omega_3 - 2(\omega_3/\alpha)^{1/2} + 1/\alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

¹ Римская цифра означает ссылку на соответствующую часть данной работы.

² В работе [12] изучались плоские волны в тонкой пластине.

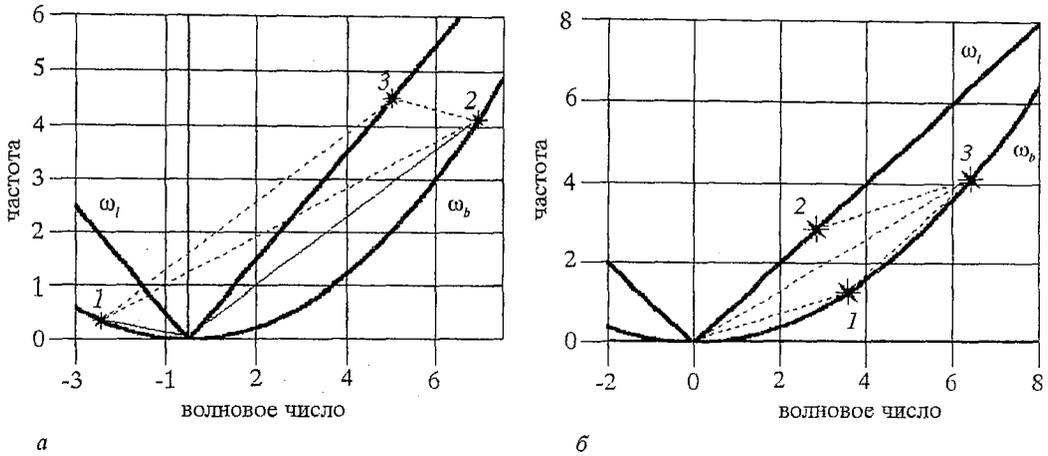


Рис. 1. Резонансные триплеты в прямолинейном стержне: а - триплет первого типа, б - триплет второго типа

Такой триплет существует при $|k_3| > 1/2\alpha$, причем все взаимодействующие волны бегут в одном направлении, так как $k_i k_j > 0$ ($i, j=1, 2, 3$). На рис. 1, б дано графическое изображение триплета-2 на дисперсионной диаграмме.

2. Нелинейная динамика триплета-1

Решение уравнений (1) в случае резонансного взаимодействия волн первого типа записывается в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A_3(\chi,\tau) \exp i\Phi_3 + c.c., \\ w(x,t) &= A_1(\chi,\tau) \exp i\Phi_1 + A_2(\chi,\tau) \exp i\Phi_2 + c.c., \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Phi_i = \omega_i t - k_i x$ - быстро вращающиеся фазы; A_n - комплексные амплитуды квазигармонических волн, медленно меняющиеся в пространстве $\chi = \mu x$ и времени $\tau = \mu t$, и удовлетворяющие в первом приближении следующим укороченным уравнениям (I.12):

$$\begin{aligned} (\partial/\partial\tau - v_1 \partial/\partial\chi) A_1 &= \beta \omega_1^{-1} A_2^* A_3, \\ (\partial/\partial\tau + v_2 \partial/\partial\chi) A_2 &= \beta \omega_2^{-1} A_1^* A_3, \\ (\partial/\partial\tau + \partial/\partial\chi) A_3 &= \beta \omega_3^{-1} A_1 A_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $v_{1,2} = 2\alpha k_{1,2}$ - групповые скорости изгибных волн; $\beta = k_1 k_2 k_3 / 2$ - коэффициент нелинейного взаимодействия, принимающий отрицательное значение для триплета первого типа.

Анализ частных решений (6) при $\partial/\partial\chi = 0$ дан в работах [14, 15]. Пусть $A_j = a_j(\tau) \exp i\varphi_j(\tau)$, где a_j и φ_j - действительные амплитуды и фазы. Тогда при начальных условиях $a_1(0) = 0$, $a_2(0) = a_{20}$, $a_3(0) = a_{30}$, $\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \pi n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), когда ($a_{30} \gg a_{20}$), динамический процесс носит характер периодического обмена энергии между продольной и изгибными модами триплета («биения») (рис. 2, а)

$$\begin{aligned} a_1(\tau) &= -a_{30} (\omega_3/\omega_1)^{1/2} \operatorname{cn}(\zeta, s), \\ a_2(\tau) &= a_{30}/s (\omega_3/\omega_2)^{1/2} \operatorname{dn}(\zeta, s), \\ a_3(\tau) &= a_{30} \operatorname{sn}(\zeta, s), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\zeta = K(s) + a_{30}\beta\tau/[s(\omega_1\omega_2)^{1/2}]$, $s = a_{30}[\omega_3/(\omega_3 a_{30}^2 + \omega_2 a_{20}^2)]^{1/2}$ - аргумент и модуль

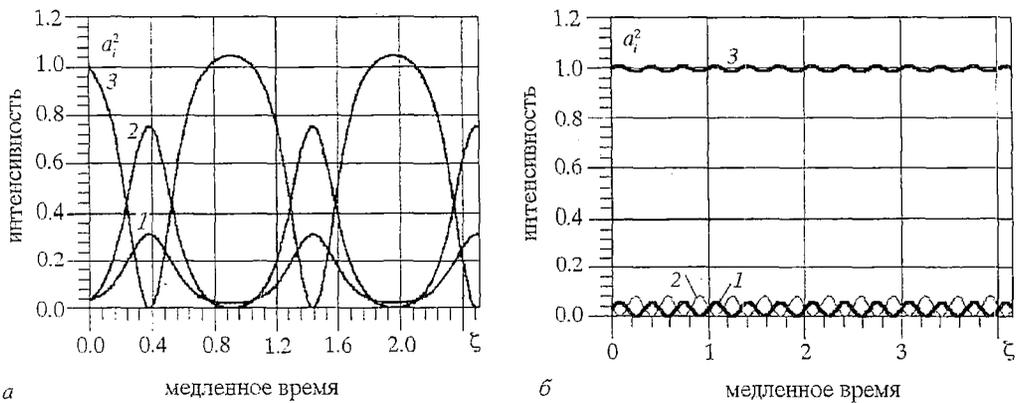


Рис. 2. Эволюция интенсивностей волновых мод триплета: *a* - процесс распадной неустойчивости (в начальный момент времени энергия сосредоточена в высокочастотной моде), *б* - устойчивые колебания (первоначально энергия сосредоточена в низкочастотной моде)

эллиптических функций Якоби, соответственно; $K(s)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Период энергообмена между продольной (первичной) и изгибными (вторичными) волнами равен

$$T = 2sK(s)(\omega_1\omega_2)^{1/2}/(\mu\beta a_{30}). \quad (8)$$

Если мощной является одна из низкочастотных изгибных волн триплета, например ($a_{20} \gg a_{30}$), $a_{10} = 0$, то реализуется практически одночастотное колебание (рис. 2, б)

$$\begin{aligned} a_1(\tau) &\approx -a_{30}(\omega_3/\omega_1)^{1/2}\cos(\Omega\tau+\pi/2), \\ a_2(\tau) &\approx a_{20}[1 - \omega_3 a_{30}^2/(2\omega_2 a_{20}^2)]^{1/2}\sin^2(\Omega\tau+\pi/2), \\ a_3(\tau) &\approx a_{30}\sin(\Omega\tau+\pi/2), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Omega = \beta a_{20}/(\omega_1\omega_3)^{1/2}$ - характерная частота амплитудной модуляции квазигармонической изгибной волны.

3. Нелинейная динамика триплета-2

В этом случае высокочастотной (ω_3, k_3) является изгибная волна. Решение уравнений (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A_1(\chi,\tau)\exp i\Phi_1 + c.c., \\ w(x,t) &= A_2(\chi,\tau)\exp i\Phi_2 + A_3(\chi,\tau)\exp i\Phi_3 + c.c., \end{aligned} \quad (10)$$

где комплексные амплитуды A_j удовлетворяют укороченным уравнениям

$$\begin{aligned} (\partial/\partial\tau + \partial/\partial\chi)A_1 &= \beta\omega_1^{-1}A_2^*A_3, \\ (\partial/\partial\tau + v_2\partial/\partial\chi)A_2 &= \beta\omega_2^{-1}A_1^*A_3, \\ (\partial/\partial\tau + v_3\partial/\partial\chi)A_3 &= \beta\omega_3^{-1}A_1A_2, \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11) по своей структуре аналогичны уравнениям (6) и отличаются лишь тем, что в рассматриваемом случае все взаимодействующие волны бегут в одном направлении. Поэтому коэффициент нелинейного взаимодействия β положителен. Для пространственно однородных процессов уравнения (6) и (11) совпадают, и следовательно, все свойства триплета-1 присущи и триплету-2.

4. Повышение динамических напряжений в стержне

Решения уравнений (6), (11) описывают периодический энергообмен между высокочастотной и низкочастотными модами триплетов. Потеря устойчивости высокочастотной волны, и сопровождающее ее резонансное возбуждение двух низкочастотных волн, может привести к повышению динамических напряжений в стержне.

Определим коэффициент повышения динамических напряжений, как отношение максимальной продольной деформации $\varepsilon = u_x - (zw_{xx}/\lambda) + O(\mu)$, измеряемой в крайних волокнах стержня в случае полного преобразования энергии высокочастотной продольной (или изгибной) волны в энергию двух низкочастотных изгибных (или продольной и изгибной) волн, к первоначальной максимальной продольной деформации

$$\Gamma = \varepsilon(|A_1| \rightarrow \max; |A_2| \rightarrow \max; |A_3| \rightarrow \min) / \varepsilon(|A_1| \rightarrow \min; |A_2| \rightarrow \min; |A_3| \rightarrow \max).$$

При распаде интенсивной продольной волны в триплете-1 коэффициент повышения динамических напряжений равен

$$\Gamma_1 \approx 3^{1/2} [s^{-1} \omega_1^{1/2} + \omega_2^{1/2}] / \omega_3^{1/2}, \quad (12)$$

а при распаде интенсивной изгибной волны в триплете-2

$$\Gamma_2 \approx [\omega_1^{1/2} + 3^{1/2} s^{-1} \omega_2^{1/2}] / (3^{1/2} \omega_3^{1/2}). \quad (13)$$

Очевидно, что численные значения коэффициентов повышения напряжения Γ_1 и Γ_2 всегда больше единицы в силу условий фазового синхронизма. Отсюда следует, что начальное напряжение в крайних волокнах стержня $\sigma = E\varepsilon$ должно быть всегда меньше предела прочности σ^* , деленного на соответствующий коэффициент повышения напряжений. Последнее условие можно рассматривать как ограничение на начальную деформацию стержня

$$E\varepsilon < \sigma^* / \Gamma_{1,2},$$

которое обеспечивает корректное описание нелинейной эволюции волн в пределах упругих деформаций. В таблицах 1 и 2 приводятся максимальные расчетные

Таблица 1

Максимальные значения коэффициента повышения динамических напряжений для триплетов первого типа с различными спектральными масштабами N

N	Γ_1	ω_1	ω_2	ω_3	k_1	k_2	k_3
1	1.874	5.740	5.698	4.24E-2	5.740	6.283	5.42E-1
2	1.886	5.638	5.588	4.93E-2	5.638	6.222	5.84E-1
3	1.900	5.516	5.459	5.78E-2	5.516	6.149	6.32E-1
4	1.916	5.371	5.303	6.86E-2	5.371	6.061	6.89E-1
5	1.936	5.194	5.112	8.26E-2	5.194	5.951	7.56E-1
6	1.961	4.974	4.873	1.00E-1	4.974	5.810	8.36E-1
7	1.991	4.693	4.567	1.25E-1	4.693	5.625	9.32E-1
8	2.031	4.322	4.163	1.58E-1	4.322	5.371	1.048
9	2.085	3.813	3.610	2.03E-1	3.813	5.001	1.187
10	2.160	3.074	2.814	2.59E-1	3.074	4.415	1.341
11	2.275	1.903	1.607	2.96E-1	1.903	3.337	1.433

Таблица 2

Максимальные значения коэффициента повышения динамических напряжений для триплетов второго типа с различными спектральными масштабами N

N	Γ_1	ω_1	ω_2	ω_3	k_1	k_2	k_3
1	1.825	5.698	5.638	6.00E-2	6.283	5.638	6.45E-1
2	1.834	5.588	5.516	7.18E-2	6.222	5.516	7.05E-1
3	1.844	5.459	5.371	8.74E-2	6.149	5.371	7.78E-1
4	1.857	5.303	5.194	1.08E-1	6.061	5.194	8.66E-1
5	1.872	5.112	4.974	1.37E-1	5.951	4.974	9.76E-1
6	1.892	4.873	4.693	1.80E-1	5.810	4.693	1.115
7	1.916	4.567	4.322	2.44E-1	5.625	4.322	1.302
8	1.947	4.163	3.813	3.49E-1	5.371	3.813	1.557
9	1.983	3.610	3.074	5.35E-1	5.001	3.074	1.926
10	1.993	2.814	1.903	9.10E-1	4.415	1.903	2.512

значения коэффициента повышения динамических напряжений для нескольких триплетов обоих типов с различными спектральными масштабами.

Теперь рассмотрим численный пример, иллюстрирующий распад плоской бегущей продольной квазигармонической волны с длиной $\lambda_3 = 0.276$ м на две изгибные волны, распространяющиеся в тонкой упругой пленке толщиной $h=10^{-3}$ м. Длина пленки считается достаточно протяженной, чтобы пренебречь краевым эффектом. Пусть скорость распространения продольных волн $c = 5 \cdot 10^3$ м/сек. При этом спектральные параметры триады резонансно возбуждаемых волн будут следующими: $\nu_3=18.083$ кГц; $\lambda_3=0.276$ м ($\Pi_3=5.52 \cdot 10^{-5}$ сек); $\nu_2 = 10.075$ кГц; $\lambda_2 = 0.03$ м ($\Pi_2 = 9.92 \cdot 10^{-5}$ сек); $\nu_1=8.008$ кГц; $\lambda_1=0.033$ м ($\Pi_1 = 1.24 \cdot 10^{-4}$ сек). Здесь $\nu_i = c\omega_i/2\pi\lambda$ являются размерными собственными частотами волн; λ_j обозначают соответствующие длины волн; $\Pi_i = 2\pi/\omega_i$ - периоды быстрых осцилляций на несущих частотах. Если отождествить характерную длину волны λ с минимальной длиной волны в изучаемом процессе $\lambda_2=0.03$ м, то для того чтобы остаться в пределах упругих деформаций, следует выбрать, например, следующие начальные условия: $a_{30}=3 \cdot 10^{-6}$ м; $a_{20}=3 \cdot 10^{-7}$ м. Потеря устойчивости высокочастотной продольной волны сопровождается периодическим обменом энергии между этой волной и двумя изгибными волнами. Этот период, определяемый выражением (8), равен 0.027 сек, что примерно составляет 200 периодов быстрых осцилляций на минимальной несущей частоте ν_1 . Коэффициент повышения динамических напряжений (13) вследствие усиления изгибных волн равен 2.4454.

5. Пример начально-краевой задачи

Рассмотрим постановку краевой задачи, моделирующую простейшую экспериментальную установку для демонстрации распадной неустойчивости продольных стоячих волн с длиной полуволны λ_3 в тонком стержне, опертм на два шарнира

$$\begin{aligned} w(0,t) = w(l,t) = 0, \\ w_{,xx}(0,t) = w_{,xx}(l,t) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

расположенные на расстоянии $l = \lambda_3 n_3$, где n_3 - некоторое заданное натуральное число. Такие волны можно возбудить с помощью внешних гармонических сил, действующих на торцах стержня

$$Eu_x(0,t) = Eu_x(l,t) = -\sigma_0 \sin \omega_3 t, \quad (15)$$

где σ_0 - амплитуда внешнего усилия, а частота возбуждения ω_3 пусть совпадает с собственной частотой продольной волны (2) с волновым числом π/λ_3 . Однако изгибные перемещения стержня должны при этом отсутствовать, скажем, на полубесконечном интервале времени $-\infty < t < 0$, например, за счет того, что последние запрещены двусторонними ограничителями поперечного хода. Пусть в момент времени $t = 0$ внешние источники сил отключаются, а ограничители снимаются. При этом неоднородные условия (15) заменяются однородными. Например, условиями отсутствия продольных смещений на краях:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \quad (16)$$

Предположим, что в результате снятия ограничений в стержне возникают малые изгибные возмущения всевозможных частот. В результате ожидаемой распадной неустойчивости продольной волны резонансно возбуждаться будут только две изгибные волны с длинами полуволин $\lambda_1 = l/n_1$ и $\lambda_2 = l/n_2$, где n_1 и n_2 - натуральные числа, зависящие от числа n_3 , поскольку частоты и волновые числа вторичных волн должны удовлетворять, кроме дисперсионных соотношений, условиям фазового синхронизма (I.9). Фазы указанной тройки волн будут строго синхронизированы, если выполняются следующие условия:

$$n_3 = n_2 - n_1, \quad n_3 = \pi(al)(n_1^2 + n_2^2).$$

При заданных значениях n_i эти выражения определяют спектр «резонансных» значений параметра $\alpha = al$, характеризующего отношение толщины стержня к его длине. Этот параметр должен быть малым, поскольку $a \ll \lambda_i$ из-за принятого длинноволнового приближения.

Пусть в стержне возбуждена основная продольная форма колебаний ($n_3=2$) при «резонансном» значении параметра $\alpha=1/10\pi$, что реализуется, например, если толщина стержня с прямоугольным поперечным сечением равна $h=12^{1/2}$ мм, а его длина $l = 10\pi$ мм. Пусть в качестве «затравки» для вторичных волн служат малые флуктуации, возникшие при снятии ограничений. Тогда следует ожидать неустойчивости малых изгибных возмущений на полуволне ($n_1=1$) и трех полуволнах ($n_2=3$). Пусть для простоты начальные условия для системы уравнений (1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= (\sigma_0/k_3) \sin k_3 x, \\ w(x,0) &= a_1 \sin k_1 x, \end{aligned} \quad (17)$$

где $|a_1(0)| \ll |\sigma_0/k_3|$. Тогда система уравнений (1) с краевыми (14), (16) и начальными условиями (17) составляет задачу о свободных колебаниях шарнирно опертого стержня. В первом приближении эта задача имеет решение в форме (7) с тем отличием, что величина коэффициента нелинейности β должна быть вдвое меньше величины, представленной в решении (7). Последнее связано с тем, что в ограниченном стержне пространственно однородный динамический процесс реализуется в виде стоячих волн, которые можно представить как результат суперпозиции трех пар бегущих волн, входящих в состав двух триплетов. Причем амплитуды бегущих волн попарно равны по абсолютной величине. Схема резонансного взаимодействия представлена на рис. 3.

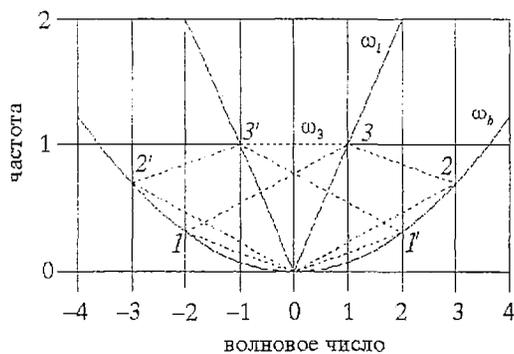


Рис. 3. Схема суперпозиции двух триплетов в начально-краевой задаче

например методами тензометрии, представляется одной из простых тестовых задач, способных подтвердить или опровергнуть развиваемую теорию.

6. Трехчастотные солитоны огибающих

Так как условия синхронизма (I.9) не зависят от групповых скоростей, то волновые пакеты с пространственно локализованными огибающими A_j в общем случае будут двигаться каждый со своей групповой скоростью v_j . Однако при некоторых условиях, благодаря компенсирующему воздействию нелинейности, все три волновых пакета могут двигаться с единой скоростью. К таким связанным состояниям относится специальный класс волновых пакетов, называемых трехчастотными солитонами огибающих [16]. В этом случае все три амплитуды A_j в уравнениях (6), (11) принимают только действительные значения (фазовая модуляция отсутствует)

$$\begin{aligned} A_1 &= A_{10} \operatorname{sech}(\xi/\xi_s), \\ A_2 &= A_{20} \operatorname{sech}(\xi/\xi_s), \\ A_3 &= A_{30} \operatorname{th}(\xi/\xi_s), \end{aligned} \quad (18)$$

зависящие лишь от одной «бегущей» координаты $\xi = \chi - V_s \tau$. Амплитуды солитонов огибающих A_{j0} , их длительность ξ_s и скорость V_s связаны тремя соотношениями

$$(V_s - v_j) A_{j0}^2 = \xi_s \beta / \omega_j A_{10} A_{20} A_{30} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (19)$$

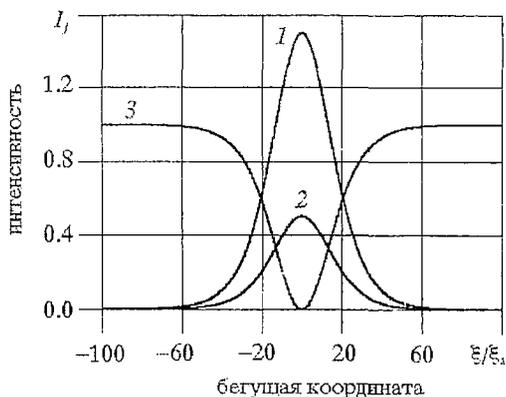


Рис. 4. Профили интенсивностей мод трехчастотного солитона

В приведенном примере существенный интерес представляет задача определения продольных реакций опор $N_x = -E(u_x + w_x^2/2)$, возникающих в точках $x=0$ и $x=l$ при периодической перекачке энергии продольной волны в энергию изгибных волн. В те моменты времени, когда продольная волна доминирует над изгибными волнами ($w_x^2 \ll u_x$), реакция в опорах будет знакопеременной. Когда же преобладают изгибные волны ($u_x \ll w_x^2$), реакция будет отрицательной, что свидетельствует о наличии деформации сжатия по всей длине стержня. Экспериментальное измерение динамических реакций в опорах стержня,

например методами тензометрии, представляется одной из простых тестовых задач, способных подтвердить или опровергнуть развиваемую теорию.

В зависимости от знаков правых частей равенств (19), скорость солитонов огибающих V_s формально может быть либо больше групповых скоростей волновых пакетов v_j , составляющих данный ансамбль, либо меньше их. Однако для физической реализации трехчастотных солитонов необходимо, чтобы скорость V_s не превышала скорости распространения волновой энергии в данной среде, то есть, по-видимому, $V_s < v_j$.

Зависимость интенсивностей трехчастотных солитонов $I_j = A_j^2$ от переменной ξ/ξ_s показана на рис. 4. Из

рисунка видно, что солитоны огибающих на частотах ω_1 и ω_2 являются «светлыми», а солитон на частоте ω_3 - «темным». «Темный» солитон имеет такой же профиль, что и «светлый», только «опрокинутый» относительно уровня A_{30}^2

$$I_3 = A_{30}^2 \text{th}^2(\xi/\xi_s) = A_{30}^2 [1 - A_{30}^2 \text{sech}^2(\xi/\xi_s)]. \quad (20)$$

Скорость связанных солитонов зависит от соотношений между их амплитудами. Поэтому в общем случае трехчастотные солитоны распространяются с различными скоростями и могут сталкиваться друг с другом [17].

7. Резонанс длинных и коротких волн. Солитоны огибающих

Если в стержне возбуждена интенсивная изгибная волна с волновым числом $|k| < 1/2\alpha$, то она может входить в триплеты типа 1 или 2 только в качестве одной из низкочастотных компонент, и будет слабо обмениваться энергией с другими волнами триплета. В первом приближении такая волна будет практически изолированной квазигармонической волной с узким частотным спектром. Для анализа ее дальнейшей эволюции на временах $\mu^{-1} < \omega t < \mu^{-2}$ необходим анализ уравнений второго нелинейного приближения. Так как трехволновое резонансное взаимодействие в этом случае становится малоэффективным, то следует поискать другие нелинейные взаимодействия изгибных и продольных волн. Одним из них является взаимодействие медленно меняющейся амплитудной огибающей изгибной волны с неосцилляторной волной продольной деформации. Решение системы (1) в этом случае ищем в виде

$$u(x,t) = A(\chi,\tau) + \mu u^{(1)}(x,t) + \mu^2 u^{(2)}(x,t) + c.c., \quad (21)$$

$$w(x,t) = B(\chi,\tau) \exp i\Phi + \mu w^{(1)}(x,t) + \mu^2 w^{(2)}(x,t) + c.c.,$$

где $A(\chi,\tau)$ - медленно меняющееся в пространстве и времени продольное возмущение, порождаемое изгибной волной; $B(\chi,\tau)$ - комплексная амплитуда мощной изгибной волны; $\Phi = \omega t - kx$ - фаза изгибной волны. Эволюционные уравнения, описывающие изменения A и B , существенно отличаются от уравнений второго приближения (I.19) для трехволнового взаимодействия и имеют вид [18]

$$[\partial_\tau + v\partial_\chi + (i\mu v'/2)\partial_{\chi\chi}]B = (i\mu/2\omega)B[\gamma|B|^2 + k^2A_\chi], \quad (22)$$

$$A_{\tau\tau} - A_{\chi\chi} = k^2\partial_\chi|B|^2.$$

Здесь v - групповая скорость изгибной волны; $\gamma = 1.5(\omega^2 + k^2)k^4/(\omega^2 - k^2)$ - коэффициент нелинейного самовоздействия. Уравнения (22) являются аналогами одномерных уравнений Захарова-Бенни [19], описывающих взаимодействие коротких капиллярных и длинных гравитационных волн на поверхности жидкости, а также ленгмюровских и ионно-звуковых волн в плазме. К аналогичной системе уравнений приводится также задача об электрон-фононном взаимодействии в кристаллах [21] и о коллективных возбуждениях в молекулах белков [22]. Динамика волновых процессов, описываемая уравнениями (22), существенно зависит от соотношения между групповой скоростью изгибной волны и скоростью продольной волны. Для решения уравнений (22), последние необходимо дополнить, например, условием отсутствия деформации на бесконечности, то есть $|A_\chi| \rightarrow 0$, $|B| \rightarrow 0$, когда $|\chi| \rightarrow \infty$.

8. Самомодуляция изгибной волны

Если в первом уравнении системы (22) $v < 1$, то продольное возмущение A содержит две компоненты, одна из которых описывает деформацию, вызванную изгибной волной

$$A_\chi = k^2 |B|^2 / (v^2 - 1), \quad (23)$$

распространяющуюся с групповой скоростью изгибной волны v , а другая компонента описывает свободные продольные волны, бегущие с единичной скоростью. На достаточно больших временах эти возмущения разделяются, и в той области пространства, где сосредоточен пучок изгибной волны, останется лишь вынужденное продольное возмущение (23). Подставляя (23) в (22), получаем нелинейное уравнение Шредингера, описывающее самовоздействие изгибной волны

$$[\partial_\tau + v \partial_\chi + (i\mu v'/2) \partial_{\chi\chi}] B = i\mu \sigma B |B|^2, \quad (24)$$

где $\sigma = k^4 [3(V_{ph}^2 + 1)(v^2 - 1) + 2(V_{ph}^2 - 1)] / [4\omega(V_{ph}^2 - 1)(v^2 - 1)]$ - коэффициент нелинейности, $V_{ph} = \omega/k$ - фазовая скорость изгибной волны ($|V_{ph}| \leq 0.5$). Слагаемые в круглых скобках описывают волну модуляции, бегущую в среде с групповой скоростью v , второе слагаемое отвечает за дисперсионное расплывание волнового пакета, а третье описывает нелинейное самовоздействие волны и приводит к зависимости ее фазовой скорости от амплитуды.

Параметры нелинейности σ и дисперсии групповой скорости изгибной волны v' , входящие в (24), имеют противоположные знаки

$$\sigma v' < 0. \quad (25)$$

Условие (25) называется критерием модуляционной неустойчивости Лайтхилла [20], из которого следует, что первоначально малые возмущения гармонической изгибной волны с течением времени могут усиливаться. Это приводит к явлению самомодуляции, которое связано с расширением частотного спектра волны при перекачке энергии из центральной области спектра в боковые составляющие.

Результатом развития модуляционной неустойчивости изгибной волны является формирование локализованного в пространстве волнового пакета - солитона огибающей

$$B(\chi, \tau) = B_s \operatorname{sech}((- \sigma / v')^{1/2} B_s [\chi - (v + V_s) \tau]) \exp i \alpha [(v + V_s / 2) \tau - \chi] \exp i \mu \sigma B_s^2 \tau / 2. \quad (26)$$

Здесь $B_s = [2(v - v\alpha - 0.5\mu v' \alpha^2) / \mu \sigma]^{1/2}$ - амплитуда солитона, $V_s = \mu v' \alpha$ - его скорость относительно системы координат, движущейся с групповой скоростью линейного волнового пакета v , ν - частота и α - волновое число, характеризующее фазовую модуляцию солитона огибающей. Отметим, что в отличие от однопараметрического семейства солитонов, описываемых уравнением КдВ, солитон огибающей (26) является двухпараметрическим, так как его скорость и амплитуда независимы, а ширина обратно пропорциональна амплитуде

$$\Delta = (v' - \sigma)^{1/2} / B_s. \quad (27)$$

Другими характерными особенностями решения (21), (26) являются наличие только амплитудной модуляции и различие между скоростями распространения амплитудной огибающей и несущей волны.

Из (23) следует, что волновой пакет изгибной волны (21), (26), пробегая по стержню, вызывает в нем продольное сжатие колоколообразной формы:

$$A_\chi = -[\alpha^2 B_s^2 / (1 - V_s^2)] \operatorname{sech}^2((- \sigma / v')^{1/2} B_s [\chi - (v + V_s) \tau]). \quad (28)$$

Амплитуда сжатия пропорциональна квадрату амплитуды изгибающей волны B_s , а ширина такая же, как и у солитона огибающей (26).

9. Групповой синхронизм продольных и изгибных волн

Если в системе (22) $\nu = 1$, то между продольной и изгибающей волнами возникает резонансное взаимодействие. Эта ситуация является предельным случаем трехволнового синхронизма (1.9) для триплета-2, когда изгибные волны с близкими волновыми числами $k_2 = k_g - \Delta k$, $k_3 = k_g + \Delta k$ образуют единый волновой пакет с несущей частотой $\omega_g = \alpha k_g^2$.

Эволюционные уравнения второго приближения, описывающие нелинейное взаимодействие продольной и изгибающей волн при выполнении условия группового синхронизма, получаются из (22), если положить в них $\nu = 1$, $\nu' = 2\alpha$, $\omega = \omega_g = \alpha k_g^2$, $k = k_g = 1/2\alpha$,

$$(\partial_\tau + \partial_\chi + i\mu\alpha\partial_{\chi\chi})B = -i\mu B/(2\alpha) [5|B|^2/(8\alpha^2) - A_\chi], \quad (29)$$

$$A_{\tau\tau} - A_{\chi\chi} = 1/(4\alpha^2) \partial_\chi |B|^2.$$

В отличие от предыдущего случая, система уравнений (29) не сводится к нелинейному уравнению Шредингера, так как выражение (23) становится непригодным при $\nu = 1$. Точные решения системы (29) удается получить лишь в исключительных случаях. Одним из них является решение, описывающее связанные солитоноподобные волны, бегущие с одинаковой скоростью V_s (рис.5),

$$A = -8\alpha^2 \{ [\alpha^2 - (\nu - \alpha)/(\mu\alpha)]^{1/2} \text{th} [\alpha^2 - (\nu - \alpha)/(\mu\alpha)]^{1/2} (\chi - V_s \tau) \} / (7 - 5V_s^2), \quad (30)$$

$$B = [\alpha^2 - (\nu - \alpha)/(\mu\alpha)]^{1/2} [32(1 - V_s^2)/(7 - 5V_s^2)]^{1/2} \alpha \times$$

$$\times \text{sech} [\alpha^2 - (\nu - \alpha)/(\mu\alpha)]^{1/2} (\chi - V_s \tau) \exp(i\nu\tau - \alpha\chi),$$

где выражение $\nu = \alpha + \mu\alpha^2 - \mu(7 - 5V_s^2)/[32\alpha^7(1 - V_s^2)^2]$ играет роль «дисперсионного» соотношения, а интеграл

$\int_{-\infty}^{\infty} |B|^2 d\chi = N = \text{const}$ - ограниченная постоянная величина.

Очевидно, что скорость двухкомпонентного солитона (30), являющегося обобщением решений (26) и (27), не может быть выше скорости распространения продольных волн, то есть $|V_s| < 1$.

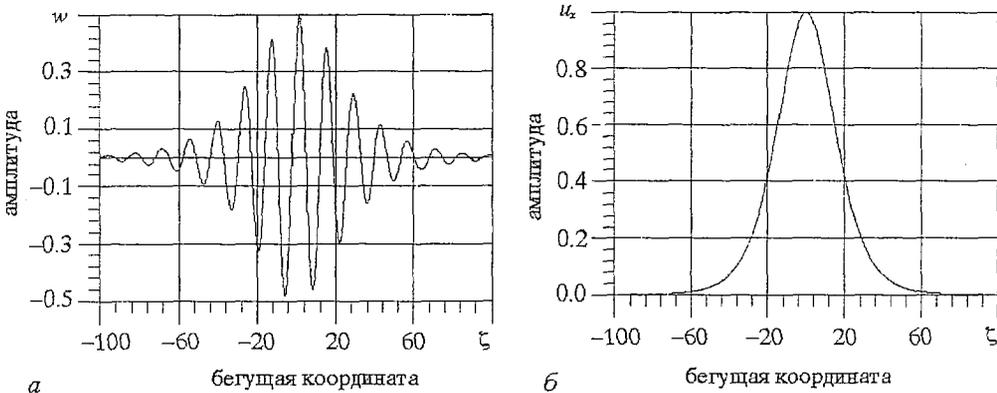


Рис. 5. Связанные компоненты солитона огибающей изгибающей волны (а) и локализованной области продольной деформации (б)

Заключение

В этой статье на простейшем примере системы со сплошным спектром нормальных волн, тонкого прямолинейного стержня, показано, что трехволновые резонансные взаимодействия могут подразделяться на два типа, триплет-1 и триплет-2, в зависимости от того, является ли высокочастотная компонента триплета диспергирующей (изгибной) или недиспергирующей (продольной) волной. Интенсивные недиспергирующие моды являются модуляционно неустойчивыми во всем диапазоне частот. Диспергирующие моды неустойчивы лишь в области длин волн, где их групповая скорость превышает фазовую скорость недиспергирующей моды. В противном случае диспергирующая волна в первом приближении устойчива к малым возмущениям и многоволновые взаимодействия в этом приближении не возникают.

В таких системах могут формироваться трехчастотные солитоны огибающих. Их скорость, по-видимому, не должна превышать наименьшей групповой скорости составляющих волнового ансамбля.

Устойчивая в первом приближении изгибная волна, с волновым числом $|k| < 1/2\alpha$, во втором приближении теряет свою устойчивость и распадается на солитоны огибающих. При этом в системе возникает медленно меняющаяся продольная деформация, пропорциональная квадрату амплитуды первичной волны. При совпадении групповой скорости изгибной волны со скоростью продольной волны в системе наблюдается явление группового синхронизма.

Волновые ансамбли различных типов могут образовывать триплетные «цепочки», где процесс переноса энергии вверх и вниз по спектру приобретает каскадный характер, типичный для многоволновых взаимодействий в системах гидродинамического типа. Внимательный читатель уже мог проследить схему одного из таких каскадов, анализируя спектральный состав триплетов, параметры которых приведены в таблицах 1 и 2. Теория каскадных процессов в твердых телах захватывает новую обширную область исследований [23], которые не могут успешно развиваться без детального изучения динамических свойств таких простейших резонансных волновых ансамблей, какими являются, например, изолированные резонансные триплеты.

Часть III. Системы с дискретным спектром

Введение

В системах с дискретным спектром, в отличие от систем со сплошным спектром (часть II), условия фазового синхронизма не всегда выполнены строго. Точный синхронизм между резонансно взаимодействующими модами реализуется лишь при наложении некоторых дополнительных ограничений, например, на геометрические параметры системы. Если параметры системы «настроены» на фазовый синхронизм, то система становится нелинейным резонатором [1,2]. Ниже рассматривается пример многоволновых взаимодействий в одной из простейших нелинейных распределенных систем с дискретным спектром - тонком кольцевом резонаторе, совершающем плоские колебания в радиальном и окружном направлениях.

Экспериментальные исследования нелинейных колебаний тонких колец [3, 4] и цилиндрических оболочек [5 - 9] показывают, что режимы их динамической неустойчивости носят, как правило, нестационарный характер, когда в общем движении могут участвовать сразу несколько форм собственных колебаний. Это приводит к появлению нелинейных эффектов, таких как периодический обмен энергией, сопровождаемый повышением динамических напряжений упругой системы [4, 10]; возбуждение доминантных (сопряженных) форм колебаний, вызванное неустойчивостью осесимметричных колебаний [11]; самомодуляция бегущих по окружности волн и образование стационарных волн, близких к солитонам огибающих [12]. Ниже приводится краткий теоретический анализ подобных эффектов с позиций теоретико-волнового подхода, развитого в I части.

1. Уравнения нелинейной динамики тонкого кольца

Нелинейные колебания тонкого кольца толщиной h , радиусом R ($h/R \ll 1$), описываются следующей системой уравнений [13]:

$$v_{tt} - V_{\varphi} + \varepsilon^2 W_{\varphi\varphi} = \mu [1/2 \partial(3V^2 + W^2)/\partial\varphi + WV], \quad (1)$$

$$w_{tt} + V + \varepsilon^2 W_{\varphi\varphi} = \mu [\partial(VW)/\partial\varphi - 1/2 \partial(3V^2 + W^2)/\partial\varphi],$$

где $v = v'/u_0$, $w = w'/u_0$ - безразмерные компоненты смещений в окружном и радиальном направлениях соответственно (штрихами обозначены физические переменные); $t = ct'/R$ и φ - безразмерные время и угловая координата; $\varepsilon = h/(12^{1/2}R) \ll 1$ - параметр, характеризующий малость толщины кольца по сравнению с его радиусом; $\mu = u_0/\lambda \ll 1$ - малый параметр, характеризующий относительные смещения точек срединной линии кольца; $V = v_{\varphi} + w$, $W = w_{\varphi} - v$. Система уравнений (1) дополняется условиями замкнутости кольца

$$v(\varphi, t) = v(\varphi + 2\pi, t), \quad w(\varphi, t) = w(\varphi + 2\pi, t), \quad (2)$$

которые представляют собой условия пространственной периодичности окружных и изгибных колебаний.

2. Нормальные волны

В кольце в отличие от прямого стержня окружные и радиальные смещения связаны уже в линейном приближении. Решение задачи (1), (2) при $\mu = 0$ можно представить в виде суперпозиции нормальных мод

$$v(\varphi, t) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{m,n} \exp i\Phi_{m,n} + c.c., \quad (3)$$

$$w(\varphi, t) = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{m,n} \exp i\Phi_{m,n} + c.c.,$$

где $A_{m,n}$ и $B_{m,n}$ - комплексные амплитуды; $\Phi_{m,n} = \omega_{m,n}t + n\varphi$ - фазы бегущих волн. Частоты $\omega_{m,n}$ связаны с волновым числом n с помощью следующего дисперсионного соотношения:

$$\omega_{m,n}^2 = 1/2 (n^2 + 1)(1 + \varepsilon^2 n^2) \pm 1/2 [(n^2 + 1)^2(1 + \varepsilon^2 n^2)^2 - 4n^2\varepsilon^2(n^2 - 1)^2]^{1/2}. \quad (4)$$

В отличие от систем со сплошным спектром, переменная n в выражении (4) принимает лишь целочисленные значения; индекс m определяет номер дисперсионной ветви. Знак плюс в (4) (при $m = 1$) отвечает высокочастотной нормальной моде, которой, в основном, соответствуют волны, описывающие смещение точек срединной линии кольца в окружном направлении. Такие волны мы назовем окружными. Знак минус в (4) (при $m = 2$) отвечает низкочастотной нормальной моде, которой соответствуют, в основном, изгибные волны. Амплитудные коэффициенты связи нормальных волн ($B_{m,n} = -ip_{m,n} A_{m,n}$) даются выражением

$$p_{m,n} = n(1 + \varepsilon^2 n^2)/[(1 + \varepsilon^2)n^2 - \omega_{m,n}^2]. \quad (5)$$

Эти коэффициенты удовлетворяют условию ортогональности $p_{1,n} p_{2,n} = -1$, и указывают на наличие линейной связи между продольными и поперечными смещениями срединной линии кольца. Для колец малой кривизны ($\varepsilon \ll 1$) $p_{1,n} \approx -n$,

$p_{2,n} \approx 1/n$. При низкочастотных длинноволновых изгибных колебаниях колец малой кривизны растяжение срединной линии практически отсутствует, то есть $V = (1 - nr_{2,n})B_{2,n} \exp i\Phi_{2,n} \approx 0$. Это так называемое условие нерастяжимости кольца широко используется в задачах нелинейной динамики тонкостенных конструкций [5,7,14]. Дисперсионное соотношение (4) в этом случае значительно упрощается

$$\omega_{2,n} = \varepsilon n(n^2 - 1)/(n^2 + 1)^{1/2}. \quad (6)$$

В случае же высокочастотных колебаний кольца ($m = 1$), напротив, изгибная деформация практически отсутствует, то есть $|V| \approx n|W|/2$. При этом высокочастотная нормальная мода приближенно описывается следующим дисперсионным соотношением:

$$\omega_{1,n} = (n^2 + 1)^{1/2}, \quad (7)$$

где значению $n = 0$ соответствуют осесимметричные радиальные колебания.

3. Трехволновые взаимодействия

В нелинейном приближении в кольце возникают резонансные взаимодействия между тройками нормальных волн. В этом случае комплексные амплитуды нормальных волн в выражении (3) являются функциями медленного времени $\tau = \mu t$. Частоты $\omega_j = \omega_{m,n}$ и волновые числа $n = n_j$ волн удовлетворяют, кроме дисперсионного соотношения (4), еще и условиям фазового синхронизма

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega, \quad n_1 + n_2 = n_3, \quad (8)$$

где ω_j пронумерованы в следующем порядке: $\omega_3 \geq \omega_2 \geq \omega_1$; $\Delta\omega \sim \mu \max \omega_j$ - малая частотная расстройка. Совместные решения уравнений (4) и (8) выделяют из всего множества нормальных волн в кольце лишь резонансно взаимодействующие тройки волн (триплеты). На рис. 1 графически изображены возможные варианты таких решений. Из них видно, что в кольце, как и в прямом стержне (часть II), существуют триплеты двух типов. В первом случае высокочастотная окружная волна с частотой ω_3 резонансно взаимодействует с низкочастотными изгибными волнами на частотах ω_1 и ω_2 , бегущими в противоположных направлениях (рис. 1,а). Частным случаем такого триплетта является резонансное взаимодействие осесимметричных радиальных колебаний кольца с изгибными волнами: $n = n_1 = -n_2$, $n_3 = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/2$ (рис. 1,б). Во втором случае высокочастотная окружная волна (ω_3, n_3) резонансно взаимодействует с одной изгибной (ω_1, n_1) и окружной (ω_2, n_2) волнами (рис. 1,в).

Заметим, что в дисперсионное уравнение (4) в качестве свободного параметра входит относительная толщина кольца ε , поэтому при $\Delta\omega = 0$ и

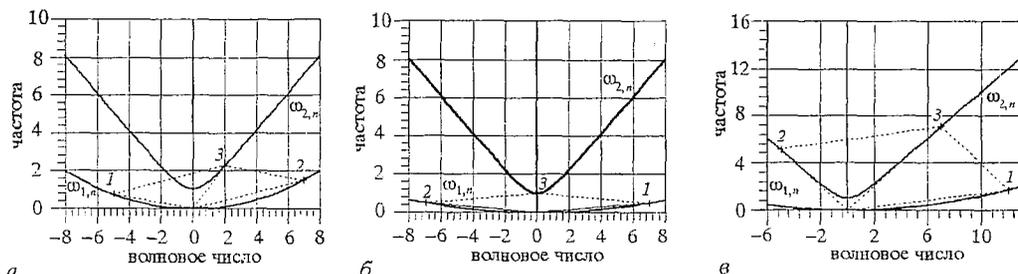


Рис. 1. Резонансные триплеты в кольце при различных критических значениях относительной толщины кольца ε^* : а - 0,0315; б - 0,0105; в - 0,0187

фиксированных значениях волновых чисел n_j уравнения (4) и (8) определяют критические значения относительной толщины кольца $\varepsilon = \varepsilon^*$, при которых возникает тот или иной тип резонансного триплета.

Тройка медленно меняющихся амплитуд резонансно взаимодействующих нормальных волн $A_j^*(\tau) = A_{m,n}(\tau)$ в первом нелинейном приближении удовлетворяет системе укороченных уравнений [10,15] (крышки над новыми переменными далее опускаются)

$$dA_j/d\tau = -i\omega_j^{-1}\Psi_j^2\alpha dU/\partial A_j^*, \quad (9)$$

где $U = A_1A_2A_3^*\exp i\Delta\omega\tau + A_1^*A_2^*A_3\exp(-i\Delta\omega\tau)$ - усредненный потенциал трехволнового взаимодействия, $\Psi_j = (1+p_j^2)^{1/2}$. Коэффициент нелинейности равен

$$\alpha = 3\Pi_{l=1}^3(1 - p_l n_l) + \Pi_{l=1}^3(p_l - n_l)\sum_{i=1}^3 e_i(1 - p_i n_i)/(p_i - n_i),$$

где $e_{1,2}=1$, $e_3=-1$. Система уравнений (9) интегрируема в общем случае [18] в эллиптических функциях. Приведем здесь лишь частное решение, отвечающее начальным условиям $|A_3(0)|=a_{30}$, $|A_2(0)|=a_{20}$ и $|A_1(0)|=0$ при точном синхронизме ($\Delta\omega=0$),

$$\begin{aligned} A_1(\tau) &= -a_{30}(\omega_3/\omega_1)^{1/2}(\Psi_3/\Psi_1)\text{cn}(\zeta, s), \\ A_2(\tau) &= (a_{30}/s)(\omega_3/\omega_2)^{1/2}(\Psi_3/\Psi_2)\text{dn}(\zeta, s), \\ A_3(\tau) &= a_{30}\text{sn}(\zeta, s), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\zeta = K(s) + a_{30}\alpha\tau/(s\Psi_1\Psi_2(\omega_1\omega_2)^{1/2})$, $s = a_{30}\Psi_3(\omega_3/(\omega_3\Psi_3^2 a_{30}^2 + \omega_2\Psi_2^2 a_{20}^2))^{1/2}$ - аргумент и модуль эллиптических функций Якоби, соответственно; $K(s)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Выражения (10) описывают динамическую перестройку колебаний кольца с одних форм на другие. По своему виду они совпадают с выражениями (П.7). Как и в случае прямого стержня, динамическое поведение кольца существенно зависит от того, где была запасена энергия колебаний в начальный момент времени.

Если первоначально энергия была сосредоточена, в основном, в высокочастотной волне, то есть $|a_{30}| \gg |a_{20}|$, то будет происходить циклический обмен энергии между различными модами триплета с периодом, обратно пропорциональным начальной амплитуде высокочастотной волны

$$T = 4sK(s)\Psi_1\Psi_2(\omega_1\omega_2)^{1/2}/(\mu\alpha a_{30}). \quad (11)$$

При этом перекачка энергии высокочастотной окружной волны в энергию низкочастотных изгибных волн сопровождается ростом динамических напряжений в кольце.

Коэффициент динамических напряжений Γ определяется как отношение максимального значения окружных напряжений $\varepsilon_{\text{фф}} = V - (zW_{\text{ф}}/R) + O(\mu)$ к соответствующему минимальному значению. В крайних волокнах кольца он приближенно равен

$$\Gamma \approx [|\Gamma_1|/(\Psi_1\omega_1^{1/2}) + |\Gamma_2|/(\Psi_2\omega_2^{1/2}s)]\Psi_3\omega_3^{1/2}/|\Gamma_3|, \quad (12)$$

где $\Gamma_j = n_j p_j - 1 + 3^{1/2}\varepsilon n_j(n_j - p_j)$. Численные значения Γ для некоторых типов триплетов приведены в таблице.

Если в начальный момент времени энергия была запасена в низкочастотной волне, $|a_{30}| \ll |a_{20}|$, то заметного энергообмена между различными модами триплета не происходит и реализуется практически одночастотное колебание (ω_2, n_2) с небольшой амплитудной модуляцией

Максимальные значения коэффициентов повышения динамических напряжений для некоторых триплетов с различными спектральными масштабами.

N	ω_1	ω_2	ω_3	n_1	n_2	n_3	ε^*	Γ
1	0.574	0.818	1.414	6	7	1	0.017	2.56
2	0.611	0.802	1.414	7	8	1	0.013	2.53
3	0.622	0.791	1.414	8	9	1	0.01	2.51
4	0.799	1.436	2.235	6	8	2	0.023	2.66
5	0.838	1.396	2.235	7	9	2	0.017	2.61
6	0.869	1.366	2.235	8	10	2	0.014	2.57
7	2.948	4.122	7.07	11	4	7	0.025	2.03
8	0.983	5.098	6.08	11	5	6	0.008	1.63
9	2.963	5.098	8.062	13	5	8	0.018	1.93

$$A_1(\tau) \approx -a_{30}(\omega_3/\omega_1)^{1/2}(\Psi_3/\Psi_1)\cos(\Omega t + \pi/2),$$

$$A_2(\tau) \approx a_{20}(1 - \omega_3\Psi_3 a_{30}^2/2\omega_2\Psi_2 a_{20}^2)\sin^2(\Omega t + \pi/2), \quad (13)$$

$$A_3(\tau) \approx a_{30}\sin(\Omega t + \pi/2),$$

где $\Omega = a_{20}\alpha\tau/[\Psi_1\Psi_3(\omega_1\omega_3)^{1/2}]$. Из последнего выражения следует, что изгибные волны в кольце в первом нелинейном приближении устойчивы по отношению к малым возмущениям. Рост динамических напряжений практически отсутствует.

Для более детального анализа нелинейной эволюции интенсивных низкочастотных изгибных волн в кольце на больших временах $\mu^{-1} < \omega t < \mu^{-2}$ необходимо привлекать уже уравнения второго приближения, учитывающие кубическую нелинейность системы и четырехволновые резонансные взаимодействия (см. раздел I.6). В работе [11] на основе дискретного аналога нелинейного уравнения Шредингера с периодическими граничными условиями (2) показано, что во втором приближении изгибная волна неустойчива относительно низкочастотной модуляции ее амплитуды. Дальнейшее развитие модуляционной неустойчивости приводит к формированию солитоноподобной (кноидальной) огибающей. По-видимому, похожие нелинейные эффекты наблюдались в экспериментах с изгибными волнами в коротких цилиндрических оболочках [12].

4. Неустойчивость осесимметричных колебаний кольца

Рассмотрим одну весьма важную для практических приложений задачу о резонансном взаимодействии осесимметричных радиальных колебаний кольца с изгибными волнами. Такое взаимодействие является вырожденным случаем трехволновых взаимодействий первого типа, когда $n=n_1=-n_2$, $n_3=0$, $\omega_1=\omega_2=\omega_3/2$ (см. рис. 1, б). Из (4) и (8) следует, что между радиальными колебаниями кольца и изгибными волнами на n -й форме имеет место точный синхронизм ($\Delta\omega=0$), если параметр относительной толщины кольца удовлетворяет следующему условию:

$$\varepsilon^* = \{(4(n^2 + 1) - 1)/(4n^2[4(n^2 - 1) - (n^2 + 1)^2])\}^{1/2}. \quad (14)$$

График зависимости изображен на рис. 2. Из него видно, что в тонком кольце

($\epsilon \ll 1$) могут резонансно возбуждаться изгибные формы колебаний с номером $n \geq 3$, причем при уменьшении толщины кольца номер резонансно возбуждаемой формы колебаний возрастает.

Решение уравнений (1), описывающее вырожденный резонансный триплет, имеет вид

$$\begin{aligned}
 w(\varphi, t) &= 2a_{30} \{ \text{sn} \xi \sin \omega_3 t + [2/(1+p^2)]^{1/2} [(s^{-1} \text{dn} \xi - \text{cn} \xi) \cos(\omega_3 t/2) \cos n\varphi + \\
 &\quad + (s^{-1} \text{dn} \xi + \text{cn} \xi) \sin(\omega_3 t/2) \sin n\varphi] \}, \\
 v(\varphi, t) &= 2p [2/(1+p^2)]^{1/2} a_{30} \{ (s^{-1} \text{dn} \xi + \text{cn} \xi) \cos(\omega_3 t/2) \sin n\varphi - \\
 &\quad - (s^{-1} \text{dn} \xi - \text{cn} \xi) \sin(\omega_3 t/2) \cos n\varphi \}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Амплитудные коэффициенты связи для изгибных волн в последнем выражении равны по абсолютной величине из-за симметрии, $p=p_1=-p_2$, а $\xi=K(s)+2\alpha a_{30} \tau/[s(1+p^2)\omega_3]$. Первое слагаемое в (15) описывает осесимметричные радиальные колебания кольца с частотой ω_3 , второе - стоячую волну, соответствующую n -й собственной форме колебаний. Третье слагаемое описывает другую стоячую волну, соответствующую также n -й форме колебаний, но узлы последней расположены в пучностях предыдущей изгибной формы (такие формы колебаний еще называют сопряженными или доминантными [7]). Амплитуды всех составляющих резонансной триады медленно изменяются в физическом времени с периодом $T \approx 2sK(s)(1+p^2)\omega_3/(\mu\alpha a_{30})$, причем амплитуды сопряженных форм меняются в противофазе. В целом динамический процесс в кольце представляет собой «биения». В моменты времени $\xi/K=1+4m$ ($m=0,1,2,\dots$) доминирует изгибная форма, пропорциональная $\sin n\varphi$, а при $\xi/K=3+4m$ - сопряженная ей изгибная форма, пропорциональная $\cos n\varphi$. Если $\xi/K=2m$, то амплитуды обеих сопряженных форм примерно одинаковы и их суперпозиция образует бегущую волну, пропорциональную $\cos(\omega_3 t/2 - n\varphi)$.

Трансформация осесимметричных колебаний в изгибные волны сопровождается повышением динамических напряжений. Коэффициент динамических напряжений (12) в этом случае равен

$$\Gamma = [6/(1+p^2)]^{1/2} (1+s)\epsilon n(n-p). \tag{16}$$

Его величина для любых значений n близка к $6^{1/2}$, что согласуется с экспериментальными данными [4].

Данные теоретические результаты подтверждаются экспериментальными наблюдениями нелинейных колебаний свободного торца тонкой цилиндрической оболочки [7]. Оболочка размещалась на вибростенде, совершающем колебания в вертикальном направлении. Частота колебаний подбиралась так, чтобы в оболочке параметрическим образом возбуждались стоячие осесимметричные изгибные волны. В этих условиях ее свободный торец можно рассматривать как кольцо, совершающее осесимметричные радиальные колебания. Эксперименты показали, что такие колебания торца являются неустойчивыми и трансформируются в неосесимметричные колебания по n -ой изгибной форме кольца. Колебания торца

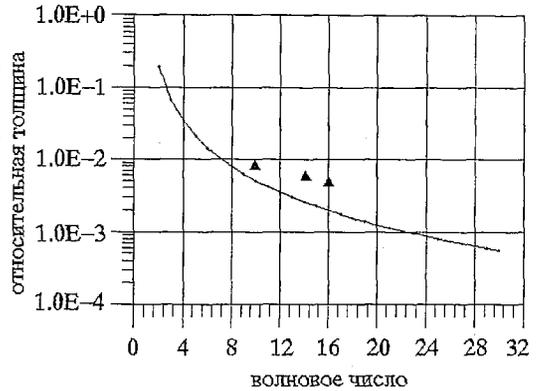


Рис. 2. Зависимость номера резонансно возбуждаемой формы колебаний кольца от его относительной толщины ϵ ; треугольниками обозначены экспериментальные данные [4]

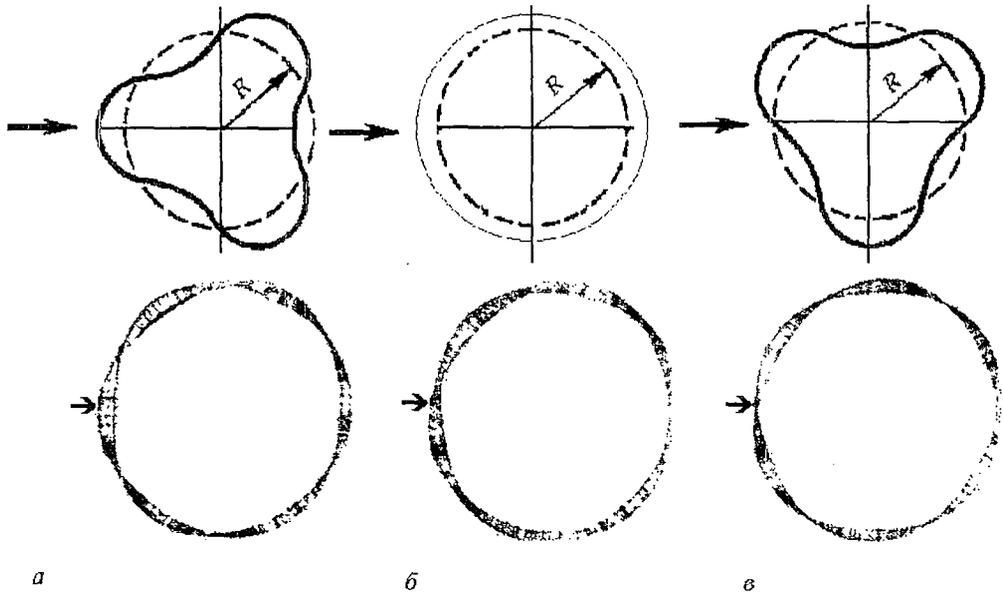


Рис. 3. Динамическая перестройка нелинейных колебаний между сопряженными изгибными формами на свободном торце тонкой цилиндрической оболочки при $n = 3$ [7]

оболочки снимались кинокамерой с выдержкой кадра Δt , много большей периода колебаний, но много меньшей периода «биений», то есть $2\pi/\omega_3 \ll \Delta t \ll T$. На приведенных кинокадрах (рис. 3) отчетливо просматривается перестройка колебаний торца оболочки между сопряженными изгибными формами при $n = 3$. Стрелка на кинокадрах указывает первоначальное положение пучности изгибных колебаний.

Заключение

В кольце, обладающем дискретным спектром, простейшими нелинейными динамическими объектами являются изолированные трехволновые ансамбли - триплеты. В частности, распад осесимметричных колебаний на изгибные волны, бегущие в противоположных направлениях, является примером эволюции вырожденного триплета. Так как изгибные волны в данном случае возбуждаются на половинной частоте, то естественно, что в пионерских работах [4] подобная задача анализировалась с помощью «параметрического» подхода. В рамках этого подхода удалось получить некоторые интересные результаты, в частности, оценить номер резонансно возбуждаемой изгибной волны и вычислить коэффициент динамических напряжений. Однако «параметрический» подход способен описать лишь начальную стадию развития нелинейных динамических процессов в кольце. Адекватный же математический анализ рассматриваемых процессов удастся получить лишь при рассмотрении нелинейной самосогласованной задачи на основе предлагаемого теоретико-волнового подхода к исследованию нелинейных многоволновых взаимодействий в упругих системах [10,17,18].

Работа выполнена при поддержке Международного Научного Фонда (грант N R9B000).

Библиографический список

Часть I

1. *Потапов А.И.* Нелинейная виброакустика тонкостенных конструкций // Волновая динамика машин. М.: Наука, 1991. С.110.

- *Линейные и нелинейные волновые процессы в упругих средах с пространственной дисперсией*. Дисс. ... док. физ.-мат. наук. Ленинград: ЛГУ, 1989.
3. *Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К.* Нелинейные волны деформации. М.: Наука, 1981. 256 с.
 4. *Багдоев А.Г.* Распространение волн в сплошных средах // Ереван: Изд. Арм АН ССР. 1981. 308 С.
 5. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р.* Волновая динамика газопарожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.
 6. *Потапов А.И.* Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький: ГГУ, 1985. 108 с.
 7. *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
 8. *Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е., Энгельбрехт Ю.К.* Нелинейные эволюционные уравнения. Таллин: Валгус, 1984.
 9. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
 10. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.
 11. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев : Наукова думка, 1984. 220 с.
 12. *Erofeyev V.I., Potapov A.I.* Nonlinear wave processes in elastic media with inner structure / Ed. V.G.Bar'yaktar // Nonlinear world. Vol. 2, World Scientific. 1990. P.1197.
 13. *Pauget J, Maugin G.A.* Nonlinear dynamics of oriented elastic solids. Parts I and II // J. of Elasticity. 1991. Vol. 22. P.135 and 157.
 14. *Новиков А.А.* О применении метода связанных нормальных волн к анализу нерезонансных взаимодействий // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т.19, № 2. С.321.
 15. *Ковригин Д.А., Новиков А.А., Потапов А.И.* Нелинейные взаимодействия нормальных волн в одномерных упругих системах // Волновые задачи механики. Н.Новгород, 1991. С.115.
 16. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
 17. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
 18. *Арнольд В.И.* Потеря устойчивости автоколебаний вблизи резонансов // Нелинейные волны / Под ред. А.В. Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С.116.
 19. *Львов В.С.* Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987. 272 с.
 20. *Гапонов А.В., Островский Л.А., Рабинович М.И.* Одномерные волны в нелинейных системах с дисперсией // Изв. вузов. Радиофизика. 1970. Т.13, № 2. С.163.
 21. *Ковригин Д.А., Потапов А.И.* Нелинейные резонансные взаимодействия в тонком кольце // Докл. АН СССР. 1989. Т.305, № 4. С.803.
 22. *Филлипс О.* Взаимодействие волн - эволюция идей // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир, 1984. с.297.
 23. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. М.: Мир, 1965. 424 с.
 24. *Каур D.J., Reiman A., Bers A.* Space-time evolution of nonlinear three-wave interactions. Interaction in a homogeneous medium // Rev. Modern Phys. 1979. Vol.51, № 2. P. 275.
 25. *Ковригин Д.А.* Нелинейные резонансные взаимодействия волн в упругих элементах конструкций. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Н. Новгород: ННГУ, 1992.
 26. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967. 684 с.
 27. *Гончаров В.В.* О влиянии нелинейностей высокого порядка на трехволновые процессы // Изв. АН СССР ФАО. 1981. Т.17, № 1. С. 88.
 28. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
 29. *Шалашов Г.М.* Кроссмодуляция акустических волн на кубической нелинейности твердых тел // Акуст.ж. 1984. Т.30, № 3. С.386.

30. *Kovriguine, D.A.; Potapov A.I.* Identification of large mechanical structures in terms of triad cells // Abs.IUTAM Symposium on Identification of Mechanical Systems. University of Wuppertal. 1993. P.29.

Часть II

1. *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // УФН. 1970. Т.102, № 2. С.549.
2. *Jones G.I., Kobett D.R.* Interactions of elastic waves in isotropic solid // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. Vol. 35, № 1. P.5.
3. *Степанов Н.С.* К вопросу о взаимодействии продольных и поперечных упругих волн // Акуст. журн. 1967. Т.13, № 2. С. 270.
4. *Maugin G.A., Cadet F.* Existence of solitary waves in martensite alloys // Int. J. Engn. Sci. 1991. Vol. 29, № 2. P.243.
5. *Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю.* Динамические формы выпучивания упругих систем // Изв. вузов СССР. 1949. Т.64, № 6. С.779.
6. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
7. *Ginsberg J.M.* Dynamic stability of transverse waves in circular cylindrical shell // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1974. Vol. 41, № 1. P.77.
8. *Goodier J.N., McIvor I.K.* The elastic cylindrical shell under nearly uniform radial impulse // Trans. ASME J. Appl. Mech. 1964. Vol. 31, № 2. P.259.
9. *Новиков В.В.* О неустойчивости упругих оболочек как проявлении внутреннего резонанса // ПММ. 1988. Т.52, № 6. С.1022.
10. *Потапов А.И.* Нелинейные взаимодействия продольных и изгибных волн в стержне // Межвуз. сб.: Дифф. и интегральные уравнения. Горький: ГГУ, 1983. С.52.
11. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 778с.
12. *Шенявский Л.А.* Влияние геометрической нелинейности на волны, распространяющиеся в свободной тонкой пластине // ПММ. 1979. Т.43, № 6. С.1089.
13. *Березовский А.А., Жерновой Ю.В.* Нелинейные продольно-поперечные волны в упругих стержнях. Математ. физика, Киев, 1981. № 30 С.41.
14. *Ерофеев В.И., Потапов А.И.* Трехчастотные резонансные взаимодействия продольных и изгибных волн в стержне // Динамика систем. Устойчивость, автоколебания и стохастичность. Межвуз. сб. Горький: ГГУ, 1984. С.74.
15. *Потапов А.И.* Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький: ГГУ, 1985. 108 с.
16. *Сухоруков А.П.* Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. М.: Наука, 1988. 232 с.
17. *Курин В.В.* Образование и взаимодействие трехволновых солитонов. Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т.31, № 10. С.1201.
18. *Ковригин Д.А.* Нелинейные резонансные взаимодействия волн в упругих элементах конструкций. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Н.Новгород: ННГУ, 1992.
19. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988, 694 с.
20. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.
21. *Пушкаргов Д.И.* Дефекты в кристаллах. Метод квазичастиц в квантовой теории дефектов. М.: Наука, 1993. 436 с.
22. *Давыдов А.С.* Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наук. думка, 1984. 288 с.
23. *Kovriguine D.A.* Modélisation mathématique du transfert l'énergie dans une lattice de triplets résonants. Un exemple de l'évolution non linéaire d'une onde quasi harmonique dans une plaque solide // Proc. Int.Symp. Active control in mechanical engineering. 1993. 'Ecole centrale de Lyon. Vol. 2.

1. *Островский Л.А., Папилова И.А., Сутин А.М.* Параметрическая генерация и усиление акустических волн в кольцевом резонаторе на твердом теле // *ЖТФ*. 1973. Т.43, № 10. С. 2213.
2. *Пуговкин А.В., Щандаров С.М.* Нелинейное взаимодействие упругих волн в акустических резонаторах // *ФТТ*. 1974. Т.16, № 4. С.1761.
3. *Evensen D.A.* Nonlinear flexural vibrations of thin circular ring // *Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E*. 1966. Vol. 33, № 3. P.553.
4. *Lindberg H.E.* Stress amplification in a ring caused by dynamic instability // *Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E*. 1974. Vol. 41, № 2. P.392.
5. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
6. *Гинсберг Дж.* Динамическая устойчивость поперечных колебаний осесимметричных волн в круговой цилиндрической оболочке // *Нестационарные процессы в деформируемых телах*. М.: Мир, 1976. С.63.
7. *Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Краснопольская Т.С.* Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. Киев: Наукова думка, 1984. 220 с.
8. *Терровере В.Р.* Динамическое разрушение токонесящей цилиндрической оболочки // *Прикл. мех.* 1984. Т.20, № 6. С.93.
9. *Образцова Е.И., Шклярчук Ф.И.* Нелинейные параметрические колебания цилиндрического бака с жидкостью // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1974. № 4. С.133.
10. *Ковригин Д.А., Потапов А.И.* Нелинейные резонансные взаимодействия в тонком кольце // *Докл. АН СССР*. 1989. Т.305, № 4. С.803.
11. *Ковригин Д.А.* Нелинейные резонансные взаимодействия волн в упругих элементах конструкций. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Н.Новгород: ННГУ, 1992.
12. *Wu J., Wheatley J., Putterman S., Rudnick I.* Observation of envelope solitons in solids // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol. 59, № 24. P.2744.
13. *Потапов А.И.* Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах. Горький: ГГУ, 1985. 108 с.
14. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: Изд-во иностр. лит. 1961. 778с.
15. *Ковригин Д.А., Потапов А.И.* О взаимодействии резонансных триад при нелинейных колебаниях тонкого кольца // *Дифф. и интегр. уравнения*. Горький: ГГУ, 1987. С.91.
16. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика. М.: Мир, 1965. 424 с.
17. *Ковригин Д.А., Потапов А.И.* О нелинейных колебаниях тонкого кольца // *Прикл. мех.* 1989. Т.25, № 3. С.76.
18. *Ostrovsky L.A., Soustova I.A., Sutin A.M.* Nonlinear and parametric phenomena in dispersive acoustic systems // *Acoustica*. 1978. Vol. 39, № 5. P. 298.

NONLINEAR WAVE DYNAMICS OF ONE-DIMENSIONAL ELASTIC SYSTEMS

D.A. Kovrighine, A.I. Potapov

Part I. Method of coupled normal waves

In present paper the theoretical wave approach is developed for investigation of nonlinear dynamics of one-dimensional elastic systems with a strong dispersion. A technique is proposed to reduce the physical field equations to those for nonlinearity coupled normal waves. Then the equations of coupled normal waves are reduced to the evolution equations, which describe either multiwave resonant interaction or wave self-modulation or group synchronism between short and long waves, depending on a problem formulation.

Part II. Systems with continuous spectrum

Nonlinear interactions of normal waves are investigated in a thin rectilinear bar, which has a planar oscillations. It was shown that two types of three-wave resonant interaction exist there, which lead to increase of dynamic stress in the bar, as a result of break-up instability of high-frequency mode involved in a resonant triad. Conditions of three-frequency envelope solitons formation, self-modulation of bending wavetrains and group synchronism of short and long waves are considered.

Part III. Systems with discrete spectrum

It is shown that in a ring-like systems with own frequency discrete spectrum, the isolated three-wave resonant ensembles, triads, play the role of simplest nonlinear dynamic structures. It is found that the interaction between the axisymmetric radial oscillations and two mid-frequency bending waves, travelling each towards other, is a particular case of degenerated triads. The periodic energy exchange takes place between the interacting triad modes. Break-up of the axisymmetric radial oscillations is accompanied by the resonant excitation of two conjugated dominant shapes of oscillations. A possibility of the self-modulation of bending waves travelling around the ring is remarked as well as their further transformation into stationary envelope soliton-like wavetrains. Stress increase constants are estimated for several illustrative examples. An agreement between obtained results and known experimental data as well as theoretical achievements, having used other investigation tools is reached.



Ковригин Дмитрий Анатольевич родился в Горьком (1962). Окончил механико-математический факультет Горьковского государственного университета (1984). С 1987 года работает в Нижегородском филиале Института машиноведения РАН, старший научный сотрудник. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ННГУ (1993). Область научных интересов - нелинейные волны в механике. Имеет 25 публикаций.



Потапов Александр Иванович родился в г. Горьком (1949). Окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1973). Работал в ГГУ на кафедре теории колебаний (1973-1975), а затем на кафедре теоретической механики (1975-1989). С 1989 года заведующий лабораторией Нижегородского филиала института Машиноведения РАН. Защитил в Горьковском университете кандидатскую диссертацию, а в Ленинградском университете - диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «Механика деформируемого твердого тела» (1989). Область научных интересов - нелинейные волны деформации и их взаимодействие, нелинейная механика сред с микроструктурой. Автор более 100 публикаций и четырех учебных пособий по волновым процессам в нелинейных и параметрических системах. В том числе «Нелинейные волны деформации в стержнях и пластинах» (ГГУ, 1985) и «Модулированные волны в линейных средах с дисперсией» (совместно с Л.А. Островским, ГГУ, 1988). Член Европейского общества механиков (EUROMECH).