



## О ФАЗОВЫХ КАРТИНАХ СТАНДАРТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ТОРА

*Л.В. Лебедева*

Стандартное отображение тора, описывающее работу ряда физических систем, является сложным и интересным математическим объектом. Для него характерны многие процессы (смена регулярного поведения хаотическим, наличие последовательности бифуркаций удвоения периода и последовательности бифуркаций рождения гетероклинических структур и т.п.), вызывающие сегодня повышенный интерес ученых. В настоящей работе представлены серии фазовых картин стандартного отображения тора, в которых демонстрируются: структура счетного множества циклов различного типа неподвижных точек, параметрическая зависимость структуры множества фазовых траекторий, скорость заполнения фазового тора сепаратрисной инвариантной кривой гиперболической неподвижной точки.

### Введение

Рассмотрим свойства отображения  $F$

$$\bar{x} = x + y - a \sin x \pmod{2\pi},$$

$$\bar{y} = y - a \sin x \pmod{2\pi}$$

как динамической системы.  $F$  есть широко известное отображение тора, называемое в литературе [1,2] отображением Б.В.Чирикова,

$$T = (x, y / -\pi \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi),$$

используемое как модель возникновения стохастичности, например, для неавтономной гамильтоновой системы второго порядка. Им занимались [1-17] в связи с изучением механизма перехода к хаотическим движениям и с возникающими при этом проблемами устойчивости и разрушения инвариантных кривых, ширины стохастического слоя, взаимодействием резонансов. Рассматриваемое отображение характеризуют многие процессы, типичные для динамических систем: смена регулярного поведения хаотическим, последовательность бифуркаций удвоения периода, последовательность бифуркаций рождения гетероклинических структур и т. п. Численное моделирование позволяет продемонстрировать изменение динамического поведения системы с увеличением параметра  $a$ , показать механизм перехода от регулярного движения к хаотическому.

Ниже представлены результаты изучения структуры счетного множества циклов различного типа неподвижных точек, параметрической зависимости структуры множества фазовых траекторий, скорости заполнения фазового тора сепаратрисной инвариантной кривой гиперболической неподвижной точки.

### Предварительный анализ

Известно, что поведение динамической системы, описанной системой разностных уравнений, в первую очередь определяется наличием неподвижных точек, типом их устойчивости, взаимным расположением инвариантных кривых [4,5, 18-21].

Множество точек  $t = t(x,y)$  с координатами  $x, y$ , удовлетворяющих условию:  $t_0, t_1 = F(t_0), t_2 = F(t_1) = F^2(t_0), \dots$ , назовем траекторией отображения  $F$ . Неподвижной точкой типа  $q/p$  отображения  $F$  будем называть точку  $t_0$  такую, что  $F^p(x_0, y_0) = (x_0 + 2\pi q, y_0) = t'_0$ , но для всех  $0 < i < p, 0 < j < q$  это равенство не выполняется.

Будем говорить, что точки  $t_0, t_1 = F(t_0), \dots, t_p = F^p(t_0) = t'_0$  образуют  $q/p$  - цикл, если  $t_0$  есть неподвижная точка типа  $q/p$ .

Как известно, при  $a=0$  [22] любая окружность  $S_y, (y=c=\text{const}) \in T$  является инвариантом отображения  $F$ . При этом каждая точка окружности  $S_0$  является неподвижной точкой типа  $0/1$ . Окружности  $S_c, c \in (0, 2\pi)$  заполнены траекториями: периодическими при  $\mu = c/2\pi = q/p$  - рациональном, квазипериодическими, если число вращения  $\mu$  иррационально. Структура множества фазовых траекторий в данном случае очевидна.

Согласно теории КАМ [22] при малых положительных значениях параметра  $a$  в лиувилевом отображении  $F$  инвариантные кривые с рациональными числами вращения разрушаются, одновременно возникает конечное число гиперболических и эллиптических  $q/p$ -циклов таких, что гиперболические инвариантные кривые образуют гомоклинические структуры, а инвариантные кривые с иррациональными числами вращения остаются инвариантами, разделяя фазовое пространство на «невзаимодействующие слои».

Известно [22, 2], что при любом значении параметра отображение  $F$  имеет как минимум два  $q/p$ -цикла ( $q=1,2, p=1,2,3, \dots$ ) с некоторой плотностью распределения точек этих циклов по всему тору. Иначе говоря, при любом значении параметра отображение имеет счетное множество различных  $q/p$ -циклов. Вычисления показывают, что неподвижные точки одного из  $q/p$ -циклов (обозначим его через  $U_{q/p}$ ) имеют гиперболический характер устойчивости. Неподвижные точки второго из  $q/p$ -циклов (обозначим его через  $S_{q/p}$ ) при  $0 < a < a^*_{q/p}$  являются эллиптическими, а при  $a > a^*_{q/p}$  имеют гиперболический характер устойчивости, где  $a^*_{q/p}$  - некоторое бифуркационное значение параметра  $a$ , свое для каждого из  $q/p$ -циклов. Известно [22,2], что существует некое критическое значение  $a^*$  параметра, которое делит область значений параметра  $a$  на две подобласти, характер поведения фазовых траекторий отображения  $F$  в которых принципиально различен. В области  $a < a^*$  движение в фазовом пространстве отображения является ограниченным: изменения переменной  $y$  вдоль любой фазовой траектории ограничены некоторой окрестностью начального значения. При  $a > a^*$  в системе имеет место «полное перемешивание» [22,2] - наступает вращение по координате  $y$ .

### Счетное множество $q/p$ -циклов

Свойства этого множества описываются следующими утверждениями.

**Теорема 1.** При любом значении параметра отображение  $F^*$ :  $\bar{x} = x + y$ ,

$\bar{y} = y - a \sin x$ , являющееся «поднятием» отображения  $F$  [26], имеет неподвижные точки  $O_{q/p,1}(0, y_{q/p}^*)$  и  $O_{q/p,2}(\pi, y_{q/p}^*)$  типа  $q/p$ , для любого  $p \in (1, 2, \dots)$  и  $q \in (\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots)$ .

Для доказательства теоремы использованы метод математической индукции, лемма 1 и ее следствия.

**Лемма 1.** Если  $x_0 = 0$ ,  $x_p = 2\pi q$ ,  $y_p = y_0$ , то для всех  $k = \overline{0, p}$  справедливы равенства  $(y_{p-(k-1)} = y_k, x_{p-k} = 2\pi q - x_k)$ .

**Следствие 1.** Для любого  $p > 1$  справедливо:  $y_{1/p}^* \in (0, 2\pi)$ ,  $y_{1/(p+1)}^* < y_{1/p}^*$ ,  $y_{q/p}^* \in (0, 2\pi q]$ .

**Следствие 2.** При  $0 < a < 4$  отображение  $F$  имеет две неподвижные точки типа  $q/1$  (для любого целого значения  $q$ ): гиперболическую (седловую)  $O_{q/2}(\pi, 2\pi q)$  и эллиптическую  $O_{q/1}(0, 2\pi q)$ . При  $a = 4$  в результате бифуркации удвоения точка  $O_{q/1}$  теряет свою устойчивость, становясь обратным «седлом», и в ее окрестности «мягко» рождается [20] пара  $O'_{q/2}, O''_{q/2}$  эллиптических неподвижных точек типа  $q/2$ , координаты которых есть решения системы:  $(y = 2x - 2\pi k, y = 0.5a \sin x, k = 0, 1, \dots)$ .

На рис. 1 представлено фазовое пространство отображения  $F$  при  $a = 1.0$ . На рисунке указаны неподвижные точки (координаты которых определены с помощью ЭВМ) типа  $q/p = 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 0/1, 1/1, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7$ ,

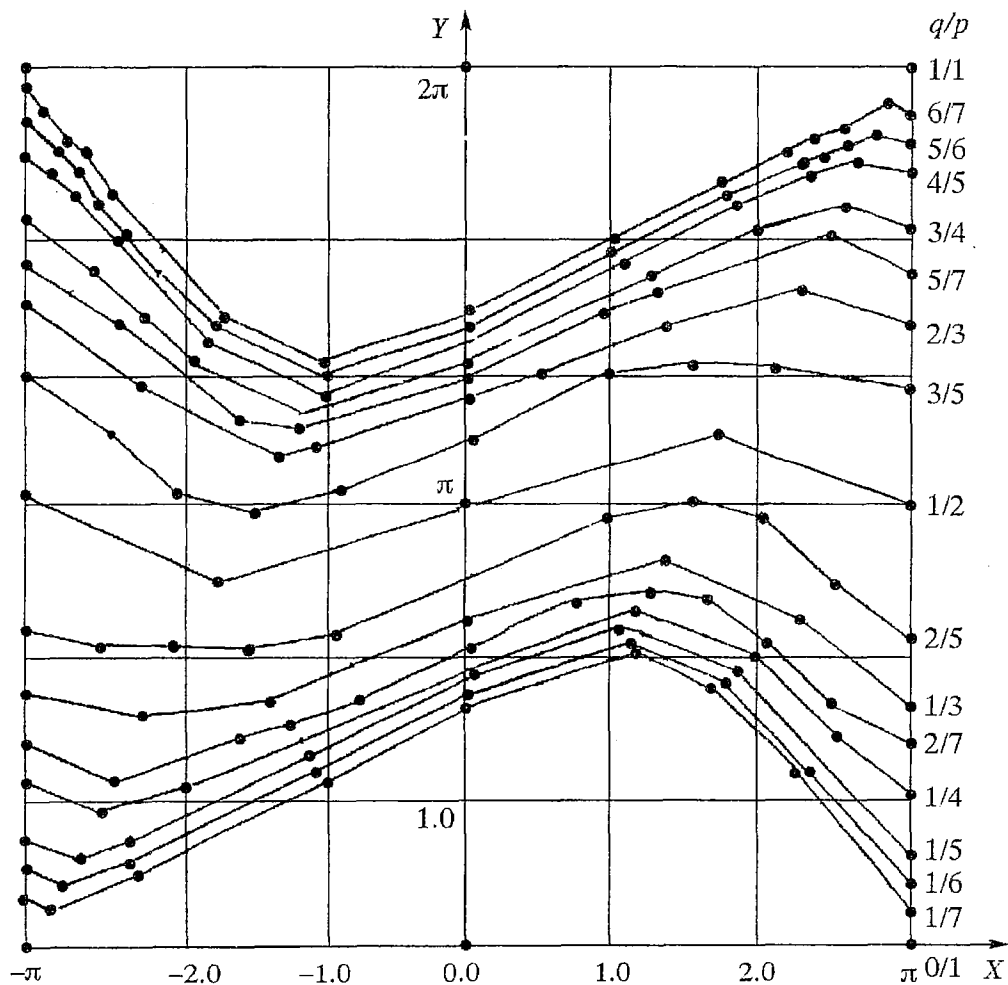


Рис. 1

5/6, 2/5, 3/5, 4/5, 3/4, 2/3 ( неподвижные точки одного типа соединены отрезками прямых). Найдено по два цикла каждого из указанных типов:  $S_{q/p}$  и  $U_{q/p}$ .

Рассмотрим подробнее изменения структуры предельного множества с изменением параметра.

### Параметрическая зависимость структуры множества фазовых траекторий

Чтобы выяснить, как выглядит множество фазовых траекторий при  $a < a^*$  в области финитных движений, построим фазовую картину при  $a = 0.1$  (рис. 2).

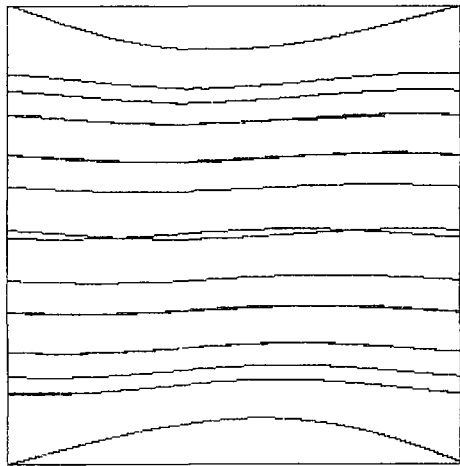


Рис. 2

При малых значениях параметра  $a$  устойчивые и неустойчивые инвариантные кривые гиперболических циклов  $U_{q/p}$  пересекаются почти с касанием, создавая некоторые инвариантные области с центрами в точках  $S_{q/p}$  -цикла, и фазовая картина похожа на фазовую картину непрерывной системы.

С помощью методов качественной теории оценим изменения взаимного расположения сепаратрисных кривых в зависимости от значений параметра  $a$ .

Об изменении векторного поля отображения  $F$  с увеличением параметра  $a$  говорит

**Лемма 2.** При  $y > 0$  ( $y < 0$ ) в области  $-\pi \leq x \leq 0$  с увеличением параметра  $a$  поле поворачивается по (против) часовой стрелке; в области

$0 < x < \pi$  при  $y > 0$  ( $y < 0$ ) с увеличением параметра  $a$  поле поворачивается против (по) часовой стрелки.

**Следствие 1.** Если при  $a = a^*$  есть гетероклиническая структура «седла»  $O_{0/2}$ , то она есть при любом  $a > a^*$ .

**Следствие 2.** Если при  $a = a^*$  нет гетероклинической структуры «седла»  $O_{0/2}$ , то ее нет ни при каком  $a > a^*$ .

Таким образом, увеличение параметра ведет к увеличению углов пересечения сепаратрисных кривых, и картина становится стандартной для дискретной системы с гомоклинической структурой. При этом ширина так называемого сепаратрисного слоя увеличивается, то есть образуется заметная область вблизи неподвижной точки цикла  $U_{q/p}$ , в которую «часто» попадают траектории отображения  $F$ . Этот процесс и параллельно протекающий процесс разрушения инвариантных кривых  $S_{q/p}$  с иррациональным числом вращения  $\mu$  [22], разделяющих области «влияния» циклов с разными числами  $q/p$ , приводит к тому, что возникает пересечение сепаратрисных кривых неподвижных точек циклов  $U_{q/p}$  с разными числами  $q/p$ , то есть инвариантные области начинают сообщаться (перекрываются резонансы) через рождающиеся гетероклинические траектории [19] (рис. 3,  $a=1.0$ ).

Последовательность накапливающихся бифуркаций рождения гетероклинических траекторий, в результате которых число перекрывающихся резонансов увеличивается, приводит к вращению по координате  $y$ : траектории из окрестности  $S_0$  быстро достигают  $S_{2\pi}$  -«верхней границы тора» (рис. 4,  $a=1.57$ ). Наступает «полное перемешивание».

Более подробное изучение последовательности рождения гетероклинических структур показывает, что при  $a=0.85$  нет непосредственного пересечения

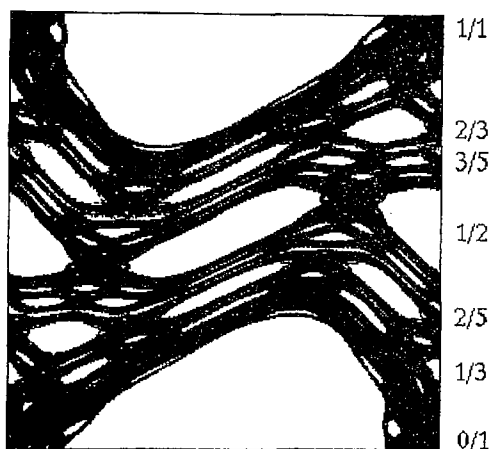


Рис. 3

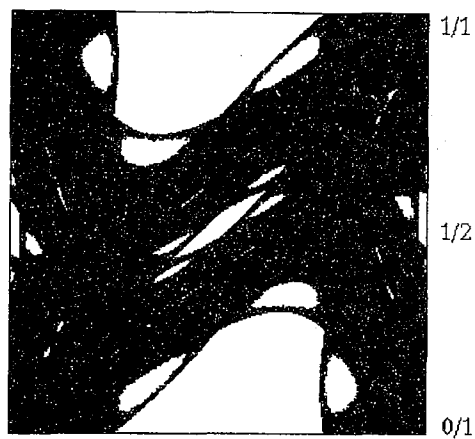


Рис. 4

сепаратрисных кривых неподвижных точек следующих типов:  $0/1$  и  $1/5$ ,  $1/5$  и  $1/4$ ,  $1/4$  и  $1/3$ ,  $1/3$  и  $2/5$ ,  $2/5$  и  $1/2$ ,  $1/2$  и  $3/5$ ,  $3/5$  и  $2/3$ ,  $2/3$  и  $3/4$ ,  $3/4$  и  $4/5$ ,  $4/5$  и  $1/1$ . При  $a = 0.95$  уже существует гетероклиническая структура, образовавшаяся при пересечении сепаратрисных кривых неподвижных точек циклов  $U_{1/5}$  и  $U_{0/1}$ ,  $U_{4/5}$  и  $U_{1/1}$ . Если исключить из рассмотрения  $q/5$ -циклы, то оказывается, что оставшиеся (из рассматриваемых) циклы «не порождают» гетероклинических структур. При  $a=1.1$  имеют место гетероклинические структуры, образованные сепаратрисными инвариантами кривыми неподвижных точек типов  $0/1$  и  $1/4$ ,  $1/4$  и  $1/3$ , при  $a=1.2$  -  $0/1$  и  $1/3$ ,  $1/3$  и  $1/2$  - типов, при  $a=1.75$  -  $0/1$  и  $1/2$  - типов, при  $a=2.45$  -  $0/1$  и  $1/1$  - типов.

Логично предположить, что уменьшение параметра от значения  $0.95$  до  $0.00$  приводит к исчезновению сначала гетероклинической структуры, возникшей при пересечении инвариантных кривых неподвижных точек циклов  $U_{1/5}$  и  $U_{0/1}$ , затем  $U_{1/6}$  и  $U_{0/1}$ , затем  $U_{1/7}$  и  $U_{0/1}, \dots$ . И, наконец, существует некое критическое значение параметра  $a$ , лежащее в интервале  $(0.0, 0.85)$ , при котором исчезает последняя гетероклиническая структура.

### Критическое значение параметра

Представленные выше результаты говорят о том, что при малых значениях параметра  $a$  фазовое пространство отображения  $F$  представляет из себя объединение невзаимодействующих слоев, а при  $a=3.14$  в системе имеет место «полное перемешивание». Отображение  $F$  не имеет границы глобального хаоса, но имеет критическое значение параметра  $a$ , которое разделяет финитное и инфинитное движения [22]. При каком же значении параметра траектория, начинающаяся в окрестности  $S_0$ , достигает верхней границы тора  $S_{2\pi}$  за конечное число итераций?

В результате многочисленных исследований было определено [22,11] критическое значение параметра ( $a=0.971635\dots$ ), при котором в системе возникает взаимодействие всех резонансов (численный результат Грина [11]). Аналитическими средствами было получено [11], что главные резонансы ( $q/p=0/1$  и  $q/p=1/1$ ) взаимодействуют при  $a=\pi^2/4$ ; при учете полуполого резонанса ( $q/p=1/2$ ) по методу перекрытия резонансов получено критическое значение  $a=1.46$ , а с учетом ширины стохастического слоя -  $a=1.2$ .

С помощью методов качественной теории динамических систем доказана [23-25].

**Теорема 2.** При  $a=2.46$  существует гетероклиническая структура, образованная неустойчивой сепаратрисной инвариантной кривой неподвижной

точки  $O'(-\pi, 0)$  типа  $0/1$  и устойчивой сепаратрисной инвариантной кривой неподвижной точки  $O''(2\pi, 0)$  типа  $1/1$ .

Таким образом, учитывая лемму 2, можем утверждать, что при  $a \geq 2.46$  существует гетероклиническая структура, образованная инвариантными кривыми неподвижных точек типа  $0/1$  и  $1/1$ , то есть при  $a \geq 2.46$  имеет место «взаимодействие главных резонансов».

Рассмотрим еще два вопроса, связанных с поведением особых траекторий.

### Скорость заполнения фазового тора одной траекторией отображения

С какой скоростью вдоль отдельных траекторий возрастает средняя величина переменной  $y$  при различных значениях параметра  $a$ ? Для оценки этой скорости определим, как быстро неустойчивая сепаратрисная инвариантная кривая  $L$  гиперболической неподвижной точки  $O'(-\pi, 0)$  заполняет весь тор?

При малых  $a$ , очевидно, скорость равна нулю. При  $a=3.14$  достаточно пяти итераций начального отрезка кривой  $L$  для достижения верхней границы  $S_{2\pi}$  тора.

Пусть  $a=1.0$ . На рис.5 изображены гомоклинические структуры циклов  $U_{0/1}$ ,  $U_{1/4}$ ,  $U_{1/3}$ ,  $U_{2/5}$ ,  $U_{3/7}$ ,  $U_{1/2}$ ,  $U_{4/7}$ ,  $U_{3/5}$ ,  $U_{2/3}$ ,  $U_{3/4}$ ,  $U_{1/1}$  (построены инвариантные кривые гиперболических неподвижных точек  $O_{0/1}$   $q/p$ -цикла  $U_{q/p}$  до прихода этих кривых в окрестность ближайшей неподвижной точки того же цикла  $U_{q/p}$ ). На рисунке (справа) помечен тип  $q/p$  неподвижных точек соответствующего цикла. Область фазового пространства, ограниченную сепаратрисными кривыми неподвижных точек  $O_{q/p}$  цикла  $U_{q/p}$  и содержащую внутри себя неподвижные точки цикла  $S_{q/p}$ , будем называть областью  $V_{q/p}$ . Область, расположенную между  $V_{q_1/p_1}$  и  $V_{q_2/p_2}$ , будем обозначать через  $V_{q_1/p_1 - q_2/p_2}$ .

На последующих рисунках изображено, как сепаратрисная кривая  $L$  заполняет фазовый тор по мере роста количества  $k$  итераций начального отрезка сепаратрисы. Области фазового тора, лежащие между  $V_{1/3}$  и  $V_{1/4}$ , включая последнюю, достаточно быстро заполняются точками кривой  $L$ . За 100 итераций (рис.6) заполняется область, лежащая ниже  $V_{1/4}$  (это область, содержащая области  $V_{1/10}$ ,  $V_{1/9}$ ,  $V_{1/8}$ ,  $V_{1/7}$ ,  $V_{1/6}$  и др., не помеченные на рисунке). В течение следующих 150 итераций кривая  $L$  заполняет часть области  $V_{0/1}$  (четко вырисовывая «ожерелье из 10 звеньев») и, «покрывая» гомоклиническую структуру цикла  $V_{1/4}$  и превращая ее в стохастический слой, «выходит» в область  $V_{1/4-1/3}$ , расположенную выше  $V_{1/4}$ , но

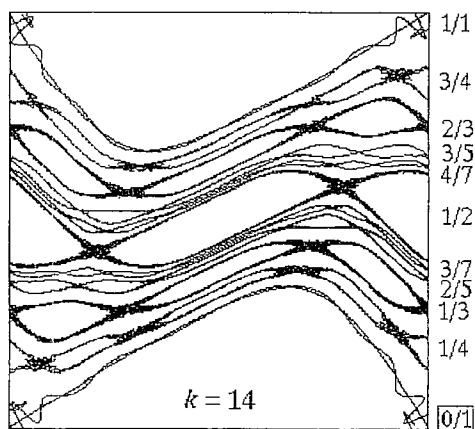


Рис. 5

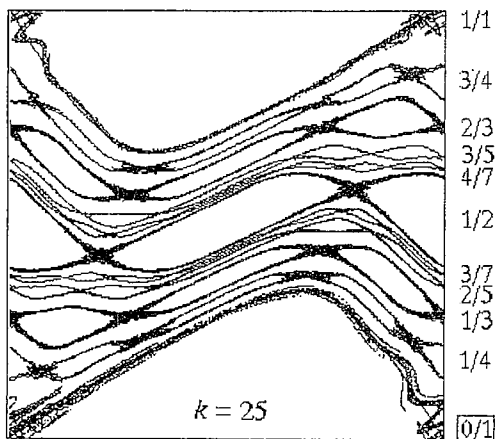


Рис. 6

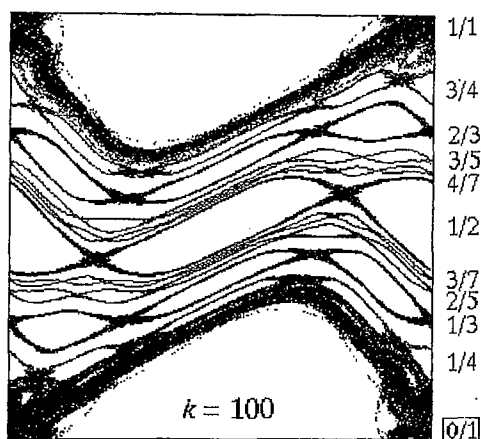


Рис. 7

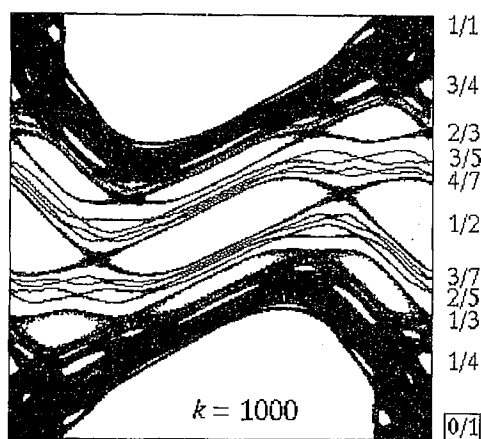


Рис. 8

ниже  $V_{2/7}$ , и содержащую внутри себя область  $V_{2/7}$  и др., не помеченные на рис.7.

Для того, чтобы выйти в область  $V_{1/3-1/5}$ , расположенную между  $V_{1/3}$  и  $V_{1/5}$ , потребовалось 1000 итераций, из них 550 «ушло» на заполнение области  $V_{1/4-1/3}$  и 250 итераций на «переход» через гомоклиническую структуру цикла  $V_{1/3}$  (рис. 7, 8). Полосу, разделяющую области  $V_{2/5}$  и  $V_{3/7}$ , кривая  $L$  пересекла только после 42000 итераций (рис. 9). Даже после 58000 итераций остается полоса  $V_{3/5-4/7}$ , через которую кривая  $L$  «не смогла пройти» (рис.10).

Для заполнения всего тора требуется порядка 100000 итераций.

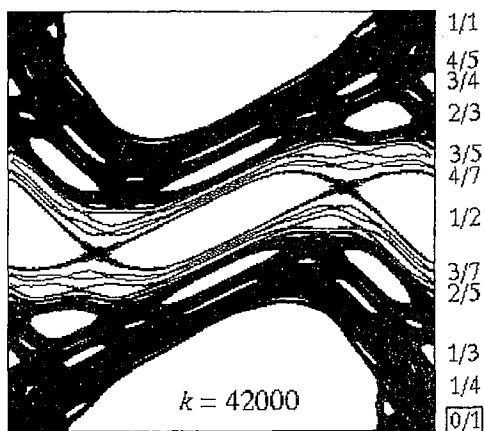


Рис. 9

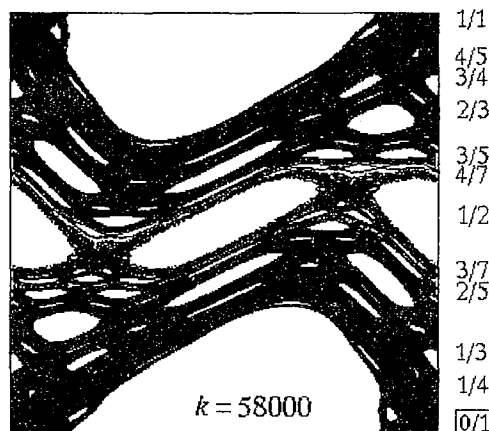


Рис. 10

### Выводы

Поведение системы, регулярное при малых  $a$ , в результате последовательностей бифуркаций разрушения инвариантных кривых, рождения гетероклинических структур, удвоения периода циклов эллиптических неподвижных точек становится хаотическим. Приведенные серии фазовых картин демонстрируют эти процессы. Интересно отметить, что основным элементом фазовых картин, представленных в настоящей работе, являются неподвижные точки и сепаратрисные инвариантные кривые. В этом принципиальное отличие их от фазовых картин, представленных в работах Б.В.Чирикова. Тем не менее, качественно фазовые картины выглядят одинаково. Это подтверждает устойчивость динамических процессов, описываемых отображением  $F$ .

Работа выполнена под руководством В.Н.Белых, и автор очень благодарен ему за внимательное отношение к этому труду.

### Библиографический список

1. *Чириков Б.В.* Нелинейные резонансы: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1977. 305 с.
2. *Чириков Б.В.* Взаимодействие нелинейных резонансов: Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1978, 305с.
3. *Анищенко В.С.* Сложные колебания динамических систем. М.: Наука, 1984.
4. *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафонов А.В., Солодов В.В.* Динамические системы с гиперболическим поведением // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 66 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1993.
5. *Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.1 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1985. С. 5-218.
6. *Бунимович Л.А., Песин Я.Б., Sinai Я.Г., Якобсон М.В.* Эргодическая теория гладких динамических систем // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.2 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1985. С. 113.
7. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
8. *Дмитриев А.С.* Динамический хаос в кольцевых автоколебательных системах с нелинейным фильтром // Изв.вузов. Радиотехника. 1985. Т. 28, № 4. С.429.
9. *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
10. *Каток А.Б., Sinai Я.Г., Степин А.А.* Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой // Математический анализ. Т.13 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1975. С.129.
11. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир. 528 с.
12. *Andreyev Yu.V., Dmitriev A.S., Chua L.O., Wu C.W.* Associative and Random Access Memory Using One-Dimensional Maps // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1992. Vol.2, № 3.
13. *Aubry S., Le Daeron P.Y.* The discrete Frenkel - Kontorova model and its extensions // Physica 8D. 1983. P. 381.
14. *Charles F.F.* Karney Long-time correlations in the stochastic regime // Physica 8D. 1983. P. 360.
15. *Chirikov B.V.* // Phys. Reports. 1979. Vol. 52. P.265.
16. *Ketoja J.A., Mackay R.S.* Fractal boundary for the existence of invariant circles // Physica D 35. 1989. P. 318.
17. *Mather J.N.* Non-existence of invariant circles // Ergod. Th. and Dynam. Sys. 1984. Vol. 4. P. 301.
18. *Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З.* Гладкие динамические системы//Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.1 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1985.
19. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
20. *Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П.* Теория бифуркаций // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.5 // Сер. Итоги науки и техники / ВИНТИ АН СССР. М., 1985. С. 5.
21. *Афраймович В.С., Гаврилов Н.К., Лукьянов В.И., Шильников Л.П.* Основные бифуркации динамических систем: Учебное пособие. Горький: ГГУ, 1985.



22. Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.: Гостехиздат, 1941.
23. Лебедева Л.В. Качественное поведение траекторий и бифуркации дискретных фазовых картин: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород: ННГУ, 1993.
24. Лебедева Л.В. Качественное поведение траекторий и бифуркации дискретных фазовых картин: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород: ННГУ, 1993.
25. Лебедева Л.В. Стандартное отображение тора в фазовых картинах: Сб. тез. Всесоюз. конф. «Нелинейные колебания механических систем». Нижний Новгород, 1993.
26. Нитецки Э. Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975, 304 с.

НИИ прикладной математики  
и кибернетики Н.Новгород

Поступила в редакцию 5.06.95  
после переработки 17.09.96

## PHASE PICTURES OF STANDARD MAP OF TORUS

*L.V. Lebedeva*

The standard torus map which defines the dynamics of a number of physical systems is a very complex mathematical object. The ways of transition from regular behaviour to chaos, existence of period doubling bifurcations and bifurcations of heteroclinic structures are the characteristic features of the dynamics of this map rousing the great interest of scientists at present.

This paper contains series of phase pictures of standard map of torus with the following: the structure of countability set of different cycles of fixed points, the parametric dependence of structure of phase trajectory set, the velocity of completing of phase torus with separatrix of hyperbolic fixed point.



*Лебедева Лариса Владимировна* родилась в 1951 году в г. Усолье-Сибирское Иркутской области, окончила Горьковский государственный университет (1974). Работает в Нижегородском научно-исследовательском институте прикладной математики и кибернетики. Защитила кандидатскую диссертацию по специальности «дифференциальные уравнения» (1993). Область научных интересов - качественная теория динамических систем, компьютерное моделирование, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор ряда работ по указанным выше направлениям.