

Изв.вузов «ПНД», т.4, № 4,5, 1996

УДК 621.317.765.8

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НЕАВТОНОМНОГО РЕЛАКСАЦИОННОГО ГЕНЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

А.А. Кипчатов, С.В. Подин

В статье представлены результаты экспериментального исследования кусочнолинейной модели релаксационного генератора под внешним гармоническим воздействием. Построена численная модель в виде отображения, которое в одном из частных случаев сводится к классическому отображению окружности на себя. Для натурной и численной моделей построены карты режимов в координатах «амплитуда частота внешнего воздействия». Показано, что численная модель с высокой степенью соответствия отражает особенности поведения неавтономного релаксационного генератора в пространстве параметров.

Введение

Путь к хаосу через разрушение квазипериодических колебаний достаточно хорошо описан и часто наблюдается в экспериментальных и модельных системах самой различной природы. Однако проявление этого сценария в чистом виде, как ни странно, свойственно лишь немногим из этих систем. Известные радиотехнические системы и численные модели, демонстрирующие разрушение квазипериодики, обладают рядом свойств, затрудняющих (или делающих невозможным) их использование в качестве объектов для изучения отдельно взятого явления нелинейной динамики - разрушения квазипериодических колебаний. Эти свойства можно объединить в несколько групп.

1. Трудности численного моделирования многих радиотехнических систем, таких как генератор Ван-дер-Поля [1], генератор на неоновой лампочке [2] или генераторы с pn-переходами [3], приводящие к отсутствию адекватных численных моделей, обеспечивающих достаточную степень соответствия результатов натурного и численного экспериментов. Эти трудности связаны чаще всего с тем, что в таких системах существенную роль играют сложные инерционные процессы в активных элементах, которые сложно с достаточной точностью описать математически. Точность описания процессов (и, соответственно, адекватность результатов численного и натурного моделирования) вступает в противоречие с простотой математической модели.

2. Отсутствие простых и в достаточной степени адекватных экспериментальных реализаций классических математических моделей, и, в частности, такой простой эталонной системы, как отображение окружности на себя.

3. Обилие нелинейных эффектов или существенная неоднозначность поведения в пространстве управляющих параметров (например, генератор типа «свернутый тор» [4]).

В настоящей работе исследуется простая система, демонстрирующая чистый сценарий хаотизации через разрушение квазипериодических колебаний в пироком диапазоне изменения управляющих параметров. Это оптимально спроектированный релаксационный генератор под внешним гармоническим воздействием, который легко реализуется в радиотехническом эксперименте и при соблюдении ряда требований допускает адекватное численное моделирование одномерным точечным отображением (что существенно расширяет возможности численного эксперимента по сравнению с потоковыми системами). Кроме того, в одном из частных случаев численной моделью неавтономного релаксационного генератора является отображение окружности на себя.

1. Радиотехническая модель неавтономного релаксационного генератора

Основным требованием к натурной модели генератора было обеспечение возможности адекватного численного моделирования, так как при исследовании подобных систем эффективным наиболее оказывается сочетание методов натурного И численного эксперимента. Наиболее очевидным решением представляется построение радиотехнической модели, по возможности точно повторяющей принцип пействия простейшего релаксационного генератора, который представляет собой последовательность циклов заряда и разряда конденсатора.

На рис. 1 приведена блок-схема натурной модели. Схема управления



Рис. 1. Структурная схема радиотехнической модели неавтономного релаксационного генератора

(CY) отслеживает напряжение на конденсаторе $U_{\rm C}$, сравнивает его с пороговыми напряжениями U_1 и U_2 и управляет переключениями ключа K. Ключ может замыкать либо цепь заряда конденсатора C от источника постоянного напряжения U_3 через резистор R_1 , либо цепь разряда конденсатора через резистор R_2 . В момент, когда напряжение на конденсаторе $U_{\rm C}$ достигает верхнего порога U_2 , схема переключается из режима заряда в режим разряда; при достижении нижнего порога U_1 происходит обратное переключение ключа K.

В соответствии с выбранным способом введения внешнего воздействия, в неавтономном режиме напряжение верхнего порога U_2 зависит от времени; оно представляет собой сумму постоянного напряжения, соответствующего верхнему порогу в автономном режиме и сигнала от внешнего источника. Кривые зависимости напряжения на конденсаторе от времени $U_{\rm C}(t)$ для различных сочетаний параметров схемы приведены на рис. 2. Гармонический сигнал внешнего





воздействия, таким образом, влияет на момент переключения схемы из режима заряда в режим разряда, не искажая экспоненциальной (в общем случае) формы кривой $U_{\rm C}(t)$ в промежутках между переключениями.

Возможность построения адекватной численной модели обеспечивается выполнением следующих условий.

1. Время переключения схемы из одного режима в другой должно быть на 2...3 порядка меньше периода колебаний в автономном режиме.

2. Сопротивление электронного ключа K в открытом (закрытом) состоянии должно быть на 2-3 порядка меньше (больше) сопротивлений резисторов R_1, R_2 .

Последнее условие исключает возможное влияние нелинейного характера сопротивления ключа на динамику системы. Выполнение этих условий обеспечивается соответствующим выбором параметров используемых микросхем и элементов цепей заряда и разряда.

2. Результаты натурного эксперимента

Радиотехническая модель неавтономного релаксационного генератора была исслепована неавтономном режиме стандартным набором срелств в экспериментального бифуркационного анализа [5-7]. Результаты натурного эксперимента представлены в виде набора карт режимов, или двупараметрических бифуркационных диаграмм в координатах амплитуда внешнего воздействия частота внешнего воздействия. Карта режимов, представленная на рис. 3, получена для одного из возможных сочетаний значений сопротивлений резисторов R_1, R_2 и напряжения заряда U₃. Перечисленные параметры, а также значения пороговых напряжений определяют форму релаксационных колебаний, то есть форму кривой зависимости напряжения на емкости от времени $U_{\rm C}(t)$ в автономном режиме. Серым цветом обозначены области существования хаотических режимов.





Ряс. 3. Экспериментальная карта динамических режимов неавтономного релаксационного генератора

синхронизации порядка *m*:1 (за время одного периода колебаний системы происходит *m* периодов колебаний сигнала внешнего воздействия), имеющих одинаковую структуру. Внутри каждого языка синхронизации имеется область хаоса, переход к которому происходит через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Ha плоскости управляющих параметров можно вышелить области перекрытия языков синхронизации разного порядка. Внутри областей перекрытия существуют зоны мультистабильности, в которых при одном сочетании управляющих параметров могут существовать несколько разных режимов колебаний в зависимости от начальных условий, или пути достижения режима в пространстве управляющих параметров. Разным режимам колебаний можно поставить в соответствие разные поверхности (листы) карты режимов, лежащие одна над другой. На карте режимов неавтономного релаксационного генератора можно явно выделить зоны бистабильности при «перекрытии» семейств периодических режимов удвоения периода и возникновения фейгенбаумовского хаоса, наблюдаемых на краях соседних листов т:1 и (т+1):1 близко к острию КЛЮВОВ. С постаточной достоверностью там же идентифицируются бистабильность семейства периодических режимов одного листа и развитого хаоса другого листа. Но наличие бистабильности между двумя режимами развитого хаоса, принадлежащего различным листам, определить не удается. Это происходит из-за «слипания» листов, то есть из-за сближения бассейнов притяжения двух аттракторов и возникновения нового хаотического режима. Экспериментальные методы оказываются недостаточными для выявления границы «слипания» и тем более недостаточными для определения динамической предопределенности этого «слипания» или возникновения его за счет неизбежной шумовой модуляции колебаний, приводящей к дрожанию границ бассейнов притяжения и их перекрытию.

На представленных картах режимов наблюдаются структуры типа crossroad area, известные, в частности, для некоторых численных моделей [8,9]. В натурном эксперименте детальное исследование этих структур представляет определенные трудности, но характерная форма линий второго удвоения периода однозначно указывает на их существование.

Следует отметить, что для релаксационных колебаний различной формы структура карты режимов может быть существенно различной. Изменение соответствующих параметров схемы натурной модели приводит к смещению границ областей или даже полному исчезновению хаотических областей при качественного карты режимов клювов сохранении вида семейства синхронизации (такие изменения легко анализируются экспериментальными методами). Однако исследование тонкой структуры карты режимов в натурном эксперименте требует высокой помехозащищенности установки и высокой точности перестройки по параметрам. Поэтому изменения в тонкой структуре карты (например, наблюдавшееся в численном эксперименте изменение сценария перехода к хаосу) не могут быть с достаточной точностью исследованы средствами натурного эксперимента.

По этой же причине на представленных картах режимов отсутствует ряд более мелких деталей, таких как окна периодичности в областях хаоса или бесконечная последовательность языков синхронизации, образующих дерево Фэри. Соответствующие режимы в натурном эксперименте наблюдались, но для точного исследования границ областей возможности натурного эксперимента оказались недостаточными.

3. Численное моделирование неавтономного релаксационного генератора

Традиционный путь численного моделирования поведения радиотехнических генераторов основан на получении системы дифференциальных уравнений из

уравнений Кирхгофа. Однако релаксационные генераторы, имеющие участки быстрого и медленного движения, требуют особой осторожности при написании их моделей в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, так как при их интегрировании возникают труднопреодолимые проблемы точности И **VCTOЙЧИВОСТИ**. Менее распространенный, но весьма продуктивный путь моделирования динамики радиотехнических генераторов - получение моделей в виде отображений. Этот путь не имеет формальных рецептов по его преодолению, но очень привлекателен из-за простоты анализа отображений (см., например, [10]). Более того, непосредственно для моделирования релаксационных процессов точечные отображения уже использовались [11,12]. Физические процессы, протекающие в рассматриваемом релаксационном генераторе с выбранным способом введения внешнего воздействия, допускают простое математическое описание в виде построения зависимости моментов переключения заряд-разряд от фазы внешнего воздействия, так как между переключениями динамика генератора проста и описывается экспоненциальными функциями. Другими словами, численная модель может быть построена в виде одномерного точечного отображения вида $F(\phi_{n+1},\phi_n)=0$, где ϕ_n - фаза сигнала внешнего воздействия в момент переключения схемы из режима заряда в режим разряда, когда напряжение на конденсаторе достигает верхнего порога. В общем случае, как нетрудно убедиться, искомое отображение не может быть выражено в явном виде. Для нахождения очередного значения переменной ϕ_{n+1} требуется решить итерационным методом следующее трансцедентное уравнение:

$$\theta_{n+1} = (\theta_n + F\{\ln[(1 + A\sin 2\pi\theta_n)/U_1] + \tau_2 \ln[(U_3 - U_1)/(U_3 - (1 + A\sin 2\pi\theta_{n+1}))]\} (\text{mod}1), \quad (1)$$

где $\theta_n = \varphi_n/2\pi$ - нормированная фаза внешнего воздействия в момент переключения схемы из режима заряда в режим разряда. Из всех корней уравнения (1) выбирается тот, для которого выражение $\sin 2\pi \theta_{n+1}$ принимает минимальное значение. Параметры A и F пропорциональны соответственно амплитуде и частоте внешнего воздействия в радиотехнической модели; U_1 - напряжение нижнего порога, U_3 - напряжение заряда; $\tau_2 = R_2C$ - постоянная времени цепочки заряда. В целях минимизации числа параметров значения постоянной времени цепочки разряда τ_1 и постоянной составляющей напряжения верхнего порога приняты равными 1.

Чтобы найти из уравнения (1) очередное значение θ_{n+1} , необходимо использовать итерационные методы. Объем вычислений существенно увеличивается по сравнению со случаем, когда отображение можно записать в явном виде $\phi_{n+1} = f(\phi_n)$. Однако если параметры схемы натурной модели выбрать так, чтобы время заряда конденсатора было пренебрежимо мало по сравнению с временем разряда ($\tau_2 \rightarrow 0, U_3 \rightarrow \infty$), то есть кривая заряда представляла собой отрезок вертикальной прямой, то отображение допускает запись в явном виде. Наибольший интерес представляет случай, когда кривая разряда линейна (см. рис. 2, в). Промежуток времени между переключениями совпадает с временем разряда, которое, в свою очередь, пропорционально значению напряжения верхнего порога в момент переключения схемы из режима заряда в режим разряда. Отображение будет иметь следующий вид:

$$\theta_{n+1} = [\theta_n + F(1 + A\sin 2\pi\theta_n)] \pmod{1}. \tag{2}$$

Найденное отображение является модифицированным отображением окружности на себя, параметры A и F которого выбраны так, что они пропорциональны соответственно амплитуде и частоте внешнего воздействия.

Наличие модели в виде отображения позволяет легко реализовать компьютерную процедуру автоматической идентификации периодических колебаний, устанавливающихся в системе, из условия $|\theta_{n+i} - \theta_n| < \varepsilon$, где ε - заданная

точность. При этом время анализа минимально и определяется длительностью переходного процесса и величиной периода. Поэтому можно эффективно исследовать поведение системы в пространстве двух управляющих параметров, последовательно сканируя интересующую область изменения параметров и находя точки смены одного периодического режима другим. Результатом является картина бифуркационных линий периопических колебаний на плоскости параметров. Хаотические и квазипериодические колебания при таком анализе неразличимы, однако закономерности известных сценариев перехода к хаосу, как правило, позволяют легко классифицировать и эти области. Точность разрешения этого метода связана с величиной є и длительностью переходного процесса. который игнорируется при анализе после очередного шага по параметру. Время построения карты размером 400 на 400 ячеек с разрешением по периоду до 16 и длительности переходного процесса 500 итераций составляет около 35 минут при использовании IBM PC 486DX2-66. Особенностью реализованной программной среды является возможность ручного изменения управляющих параметров манипулятором «мышь» при автоматическом анализе периода реализующихся колебаний и отображении результатов этого анализа в реальном времени в виде цветной точки в соответствующем управляющим параметрам месте экрана цисплея. Наследование начальных условий при вариации параметров и высокая скорость анализа состояния системы позволяет так же эффективно, как и в радиотехническом эксперименте, исследовать неоднозначные мультистабильные режимы, мгновенно и легко находя границы областей, двигаясь по карте в любом направлении. Более того, для анализа всей доступной для анализа информации в описываемой программной среде реализованы режимы построения временных реализаций, диаграмм Ламерея и проекций фазового портрета в любой выбранной точке карты, а также построения однопараметрических бифуркационных диаграмм вдоль любых заданных «мышью» направлений.

Для полученного отображения по результатам численного эксперимента была построена карта режимов в координатах (A,F); она представлена на рис.4 и



Рис. 4. Карта динамических режимов, полученная в результате компьютерного исследования отображения (2)

представляет собой несколько деформированный вариант карты режимов, известной для отображения окружности на себя, записанного в классической форме. Нетрудно видеть, что карты режимов, полученные методами натурного и численного эксперимента, в общих чертах совпадают. Численная карта режимов содержит ряд дополнительных деталей (субгармонические языки синхронизации, дерево Фэри, окна периодичности в областях хаоса), которые отсутствуют на экспериментальных картах режимов в силу причин, сформулированных выше, хотя соответствующие режимы в натурном эксперименте наблюдались. Принципиальных различий в структуре экспериментальной и численной карт режимов не обнаружено.

Исследование неавтономных релаксационных колебаний в самом общем случае, когда форма напряжения на конденсаторе в промежутках между переключениями имеет экспоненциальный характер (см.рис. 2, *a*), существенно осложняется еще и тем, что в этом случае система обладает большим числом параметров. Кроме амплитуды и частоты внешнего воздействия, есть еще несколько параметров схемы, от которых зависит форма релаксационных колебаний. Общее количество независимых параметров, включая параметры сигнала внешнего воздействия, равно пяти.

Однако существует и более простой частный случай с меньшим числом параметров, который тем не менее позволяет выйти за рамки динамики отображения окружности на себя. Если напряжение на конденсаторе возрастает и убывает линейно (см. рис. 2, δ), то, как нетрудно убедиться, кроме амплитуды и частоты внешнего воздействия, есть всего один дополнительный параметр отношение времени заряда конденсатора к времени разряда в автономном режиме $p=\tau_c/\tau_c$. Наличие одного, а не трех дополнительных параметров существенно упрощает задачу исследования динамики системы, несмотря на то, что в этом случае система также описывается неявным отображением

$$\theta_{n+1} = (\theta_n + 2\pi F [(1 + A \sin 2\pi \theta_n) + p(1 + A \sin 2\pi \theta_{n+1})] \pmod{1}. \tag{3}$$

Для отображения (3) были построены и исследованы карты режимов, соответствующие разным значениям параметра *p*. Кроме изменений глобальной структуры карты режимов, которые наблюдались и при исследовании натурной модели, отмечены также некоторые принципиальные изменения в тонкой структуре карты. Речь идет об изменениях сценария перехода к хаосу, наблюдавшихся в некоторых областях плоскости параметров.

На рис. 5, а изображена однопараметрическая бифуркационная диаграмма, илюстрирующая сценарий хаотизации в классическом отображении окружности на себя. Диаграмма построена при движении вдоль отрезка прямой на плоскости параметров. После бесконечной цепочки бифуркаций удвоения периода наблюдается переход к хаосу (точка A); затем в точке В начинается переход к другому хаотическому аттрактору через перемежаемость. На диаграмме Ламерея



Ряс. 5. Бифуркационные днаграммы, иллюстрирующие различие механизмов хаотизации в различных областях пространства параметров



Рис. 6. Различные варианты выхода точки с параболического участка диаграммы Ламерея для отображения (1)

(рис. 6, a) становится возможным выход траектории за пределы параболического участка И переход от «фейгенбаумовского» хаоса к хаотическому аттрактору другого рода. Для случая *p*=0, когда динамика неавтономного релаксационного генератора описывается классическим отображением окружности себя, взаимное на положение точек А и В остается неизменным; бифуркация перехода к преднествует бифуркации xaocy другому перехода к хаотическому аттрактору через перемежаемость. Если



Рис. 7. Фрагмент плоскости параметров для отображения (1)

же напряжение на конденсаторе возрастает в течение конечного промежутка времени, малого по сравнению с периодом колебаний в автономном режиме (что соответствует малым положительным значениям параметра p), точка B сдвигается влево, приближаясь к точке A (рис. 5, δ). Если проследить за эволюцией диаграммы Ламерея, то можно заметить, что при переходе через точку B также становится возможным выход траектории за пределы параболического участка, но несколько другим способом (рис. 6, δ). При дальнейшем увеличении p взаимное положение точек A и B может измениться (рис. 5, b) и после конечного числа бифуркаций удвоения периода происходит переход к хаотическому аттрактору через перемежаемость.

Следует отметить, что в разных областях карты режимов, построенной для определенного значения параметра p, могут реализовываться разные сценарии хаотизации. На одной и той же карте режимов могут сосуществовать классический сценарий Фейгенбаума и переход к хаосу через перемежаемость после первого удвоения периода. Механизм плавного перехода от одного сценария к другому иллюстрируется рис.7, который представляет собой увеличенный фрагмент численной карты режимов, полученной для p=0.2. Серым цветом на рис.7 обозначена область хаотического режима. Линия A, также как и на рис. 5, соответствует бифуркации перехода к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Линии B_1 и B_2 также соответствуют точке B на рис. 5, но различаются механизмами перехода к другому хаотическому аттрактору (способом выхода точки с параболического участка диаграммы Ламерея, как показано на рис. 6, a и 6,b, соответственно).

Выводы

Неавтономный релаксационный генератор в том виде, в котором он реализован, является простой системой, допускающей простое и адекватное

численное моделирование; вместе с тем динамика неавтономного релаксационного генератора в пространстве управляющих параметров достаточно сложна. С другой стороны, важный результат заключается также и в том, что найдена простая радиотехническая реализация классической математической модели отображения окружности на себя.

Предложенная радиотехническая реализация простейшего неавтономного релаксационного генератора позволяет легко исследовать закономерности перехода к хаотическим колебаниям через разрушение квазипериодических режимов. Возможность адекватного численного и натурного исследования сложных колебательных процессов и совпадение результатов этих исследований, не только качественное, но и в некотором смысле количественное, говорит о том, что радиотехническая модель не содержит неконтролируемых процессов или неучтенных нелинейных и инерционных явлений. Наличие дополняющих друг друга математической и экспериментальной моделей позволяет весьма эффективно выявлять закономерности поведения системы в пространстве ее управляющих параметров и исследовать тонкие закономерности в сложных многолистных картах режимов, характерных для сценария разрушения квазипериодических торов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 95-02-06262).

Библиографический список

1. Parlitz V., Lauterborn W. Period-doubling cascades and devil's staircases of the driven Van der Pol oscillator // Phys.rev. A. 1987. Vol. 36, № 3. P. 1428.

2. Kennedy M., Chua L.O. Van der Pol and chaos // IEEE Trans. on Circ. and Syst. 1986. Vol. CAS-33, № 10. P. 974.

3. Tanaca S., Matsumoto T., Chua L.O. Bifurcation scenario in a driven R-L diode circuit // Physica D. 1983. Vol. 8, № 3. P. 302.

4. Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R. Chaos via torus breakdown // IEEE Trans. on Circ. and Syst. 1987. Vol. CAS-34, № 3. P. 240.

5. Кипчатов А.А. Особенности сложной динамики неавтономного нелинейного контура // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33, № 2. С. 182.

6. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А. Хаос и периодичность в генераторе на туннельном диоде // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33, № 4. С. 431.

7. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Путь к хаосу в кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 1-2. С. 93.

8. Carcasses J.P., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C. «Crossroad area - spring area» transition: (1) Parameter plane representation // Int. J. Bifurcation and Chaos. Vol. 1, No 1. P. 183.

9. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. Критическая динамика двумерных отображений. Часть 2: Двухпараметрический переход к хаосу // Изв. вузов. При-кладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 3-4. С.17.

10. Bezruchko B.P., Prokhorov M.D., Seleznev E.P. Multiparameter model of a dissipative nonlinear oscillator in the form of one-dimensional map // Chaos, Solitons and Fractals. 1995. Vol. 5, № 11. P. 2095.

11. Гласс Л., Мэки М. От часов к хаосу: Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248с.

12. Ланда П.С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 359 с.

Саратовский государственный университет Поступила в редакцию 29.01.96 после переработки 21.10.96

INVESTIGATION OF NON-AUTONOMOUS RELAXATION OSCILLATOR BEHAVIOUR IN THE DRIVE PARAMETERS SPACE

A.A. Kipchatov, S.V. Podin

Results of the experimental investigations of piece-wise model of the relaxation oscillator, driven by harmonic signal, are presented in this article. A numerical model in the form of one-dimensional map was also constructed. In some special cases, this model can be reduced to the classical circle map. A parameter plane «drive amplitude - drive frequency» was plotted for both radiotechnical system and computative model. It is shown that the multiparameter behaviour of the non-autonomous relaxation oscillator is well represented by developed numerical model.



Кипчатов Алексей Александрович - роднлся в 1958 году, окончил Саратовский государственный университет (1980). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области радиофизики и нелинейной динамики (1996). Заведующий научным сектором Колледжа прикладных наук Саратовского госуниверситета, доцент кафедры электроники и волновых процессов. Научные интересы - анализ сложного поведения нелинейных систем в пространстве параметров, оценка количественных характеристик сложности по временным реализациям различных процессов, трансформация характеристик хаотических колебаний в инерционных цеиях и средах. Автор ряда статей по этим направлениям.



Подин Станислав Васильевич - родался в 1972 году, окончил Саратовский государственный университет (1994). Ассистент кафедры электроники и волновых процессов, преподаватель информатики на первой ступени Колледжа прикладных наук. Научные интересы - численное моделирование нелинейных систем, анализ многопараметрической динамики систем. Автор нескольких публикаций.