



СИНХРОНИЗАЦИЯ АНСАМБЛЕЙ СВЯЗАННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.С. Дмитриев, С.О. Старков, М.Е. Широков

С единых позиций рассматриваются условия синхронизации в различных ансамблях взаимодействующих отображений с хаосом, а также при воздействии на эти ансамбли внешнего сигнала. Приводятся результаты численного моделирования процессов установления и разрушения синхронных режимов.

Введение

Последние годы понятие динамического хаоса - сложного нерегулярного поведения детерминированных динамических систем - из области теоретических исследований активно перемещается в область решения прикладных проблем. Большие надежды связываются с потенциальными возможностями применения идей хаотической динамики в развитии новых информационных технологий. Ожидается, что использование нетрадиционных алгоритмов кодирования, сжатия, распознавания и передачи информации с использованием динамического хаоса может привести к значительному повышению качества систем передачи и обработки информации. Проводимые в этом направлении исследования позволяют также по-новому взглянуть на принципы организации информационных процессов в биологических системах [1-4].

Большой интерес с точки зрения информационных приложений представляет задача исследования поведения различных ансамблей взаимодействующих хаотических автоколебательных систем (рис. 1).

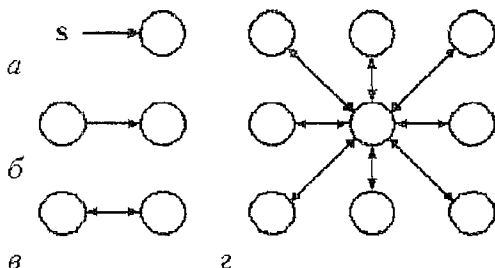


Рис. 1. Виды взаимодействия динамических систем: *а* - воздействие внешнего сигнала на динамическую систему; *б* - однонаправленное; *в* - взаимное взаимодействие двух динамических систем; *г* - взаимная связь одной системы с любым числом других систем

Работы в области изучения взаимного влияния динамических хаотических систем ведутся с начала 80-х годов [5,6]. В [5] рассмотрены ансамбли из симметрично связанных одинаковых динамических систем с непрерывным временем, введено понятие хаотической синхронизации и получено аналитическое условие ее реализации в таких ансамблях. В [6] экспериментально обнаружено явление взаимной хаотической синхронизации двух динамических систем с непрерывным временем как при одинаковых, так и при слегка отличающихся друг от друга

параметрах этих систем, дано определение хаотической синхронизации для этого случая. Вопросам экспериментального и аналитического изучения хаотической синхронизации посвящены также работы [7-12].

С середины 80-х годов появилось большое число публикаций, в которых исследовалась динамика различных цепочек и решеток одномерных отображений [13-19]. Такие ансамбли отображений рассматривались как сложные динамические системы, демонстрирующие пространственно-временной хаос. Было показано, что в подобного рода ансамблях могут существовать различные пространственно упорядоченные режимы. Например, в [16-18] изучена динамика однонаправленной бесконечной цепочки связанных одномерных отображений, как простой модели развития турбулентности, и исследованы условия устойчивости пространственно однородного решения (режима синхронизации).

Следует отметить, что во всех указанных работах рассматривались ансамбли отображений с пространственно однородной структурой связей. Это вполне оправдано целями проводимых исследований (моделирование физических процессов), однако в задачах обработки и передачи информации возникает необходимость исследования взаимодействия хаотических систем с произвольными, вообще говоря, несимметричными связями. Ясно, что в общей постановке такая задача слишком сложна для получения сколько-нибудь осмысленных результатов (кроме прямого компьютерного моделирования).

В статье показывается, что если ограничиться рассмотрением синхронных хаотических режимов в ансамблях определенным образом связанных отображений, то задача существенно упрощается и поведение системы определяется всего двумя «параметрами порядка», один из которых - максимальный ляпуновский показатель синхронизируемой траектории в отдельном отображении, а второй определяется через матрицу связи этих отображений. Таким образом, с единых позиций могут быть рассмотрены условия синхронизации в самых различных системах взаимодействующих отображений с хаосом (см. рис. 1), а также синхронизация таких систем под воздействием общего внешнего сигнала (например, в виде пейсмейкера в биологической интерпретации или внешнего хаотического поля - в физической трактовке).

Структура статьи следующая. В разделе 1 рассматривается задача синхронизации отображения при однонаправленном воздействии. В разделе 2 аналитически исследуются условия хаотической синхронизации в ансамблях, состоящих из произвольного числа связанных отображений. Раздел 3 посвящен численному моделированию динамики ансамблей связанных отображений, в которых в качестве парциальных использованы одномерное логистическое отображение и двумерное отображение Хенона. Наряду с другими, здесь исследуются два вопроса, имеющих принципиальное значение для систем обработки и передачи информации: *условия вхождения в режим синхронизации и синхронизация внешними сигналами неустойчивых циклов, входящих в структуру странного аттрактора автономного режима*. В Приложении описан программный комплекс, предназначенный для моделирования динамики ансамблей связанных отображений.

1. Синхронизация отображений при однонаправленном воздействии

Рассмотрим динамическую систему с дискретным временем, описываемую одномерным отображением $F: R^1 \rightarrow R^1$,

$$x(k+1) = F(x(k)). \quad (1)$$

Для удобства дальнейшего изложения представим ее в виде блок-схемы с цепью обратной связи, единичным запаздыванием и нелинейным преобразованием (рис. 2).

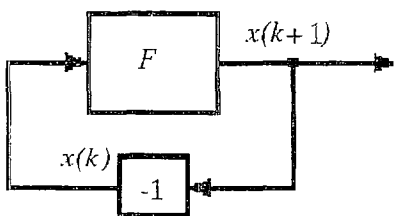


Рис. 2. Блок-схема автоколебательной системы, описываемой одномерным отображением

Простейшим случаем взаимодействия двух одинаковых систем (1) является однонаправленное воздействие одной системы на другую. Рассмотрим воздействие, при котором на вход второй системы подается взвешенная сумма $\alpha x(k) + \beta y(k)$ сигнала $x(k)$ первой системы и собственного выходного сигнала $y(k)$, где α и β - соответствующие весовые (необязательно положительные) коэффициенты (рис. 3).

Поведение взаимодействующих отображений в этом случае описывается системой уравнений

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k)), \\ y(k+1) = F(\alpha x(k) + \beta y(k)). \end{cases} \quad (2)$$

Если выполнено условие

$$\alpha + \beta = 1, \quad (3)$$

то систему (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k)), \\ y(k+1) = F(y(k) + \alpha(x(k) - y(k))), \end{cases} \quad (2')$$

из которого видно, что в (2) существует траектория

$$x(k) \equiv y(k), \quad (4)$$

соответствующая траектории $x(k)$ автономной системы (1). В случае устойчивости условия (4) по отношению к малым возмущениям $x(k)$ и $y(k)$ будем говорить, что вторая система синхронизована с первой.

Условие устойчивости траектории (4) по отношению к малым возмущениям зависит только от значения параметра α и величины ляпуновского показателя λ траектории $x(k)$ автономной системы (1) [20]

$$|1 - \alpha| < \exp|\lambda|. \quad (5)$$

Таким образом, если величина параметра связи α удовлетворяет неравенству (5), то в системе (2) существует устойчивый режим (4), то есть режим синхронизации.

Отметим следующую особенность неравенства (5). Если траектория $x(k)$ сама является устойчивой, то есть $\lambda < 0$, то значение $\alpha = 0$ удовлетворяет неравенству (5). Если же траектория $x(k)$ является неустойчивой ($\lambda > 0$), то значение $\alpha = 0$ уже

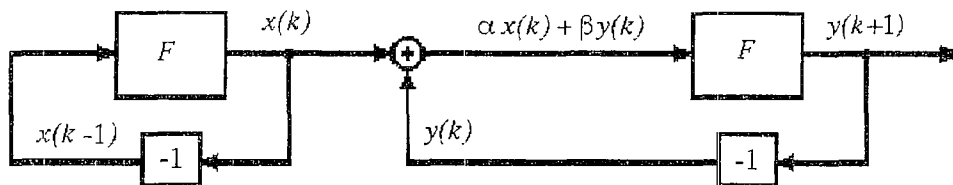


Рис. 3. Блок-схема, иллюстрирующая однонаправленное воздействие одного отображения на другое, α и β - параметры связи («весовые» коэффициенты)

не удовлетворяет неравенству (5). Этот результат имеет следующую физическую интерпретацию.

Синхронизацию в результате воздействия первой системы на вторую при $\alpha \in [0,1]$ можно трактовать как «навязывание» этой системе одной из ее собственных траекторий. Ясно, что если эта траектория является устойчивой, то она реализуема во второй системе и при отсутствии «навязывания». Таким образом, режим синхронизации существует при любом, сколь угодно малом положительном значении α . Это соответствует хорошо известному свойству синхронизации динамических систем с регулярным поведением при сколь угодно малых связях между ними [21]. Однако, если рассматриваемая траектория является неустойчивой, то для ее реализуемости необходим некоторый уровень «навязывания» для компенсации эффекта «разбегания» сколь угодно близких решений в окрестности этой траектории, то есть возникает порог синхронизации, значение которого определяется ляпуновским показателем траектории системы. Этот порог существует и при синхронизации хаотических систем с непрерывным временем [5,6].

Рассмотренную выше возможность синхронизации динамики одномерного отображения внешним сигналом можно обобщить на случай n -мерного отображения $F(\mathbf{x})=(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ [20]. При этом под λ в (5) следует понимать максимальный ляпуновский показатель траектории $\mathbf{x}(k)$, определяемый формулой [22]:

$$\lambda = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} (\ln \|\prod_{k=0}^{N-1} F'(\mathbf{x}(k))\|_n^{1/N}), \quad (6)$$

где $F' = \|\partial f_i / \partial x_j\|$ - матрица Якоби отображения F , $\|\dots\|_n$ - любая норма n -мерной матрицы.

2. Синхронизация ансамблей связанных отображений

Пусть имеется ансамбль из m связанных отображений типа (1), описываемый уравнениями

$$x_i(k+1) = F(\alpha_{ii}x_i(k) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}x_j(k)) = F(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij}x_j), \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

где $\alpha_{ij} (i \neq j)$ - коэффициент воздействия i -го отображения на j -ое, α_{ii} - коэффициент обратной связи в i -ой системе. Матрицу $A = \|\alpha_{ij}\|$ будем называть матрицей связи ансамбля (7). Режимом синхронизации в системе связанных отображений (7) будем называть траекторию ансамбля, удовлетворяющую условию

$$x_i(k) \equiv x_1(k), \quad i = \overline{2, m}, \quad (8)$$

и устойчивую по отношению к малым возмущениям. Если матрица связи удовлетворяет условию

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} = C, \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

то систему (7) можно переписать в виде

$$x_i(k+1) = F(Cx_1(k) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij}(x_j(k) - x_1(k))), \quad i = \overline{1, m}, \quad (7')$$

из которого видно, что в ней независимо от вида отображения F существует траектория (8), причем последовательность $x_1(k)$ есть траектория отображения: $x(k+1) = F(Cx(k))$ при $x(0) = x_1(0)$. Заметим, что если, например, F - логистическое отображение, то изменение величины C эквивалентно изменению параметра этого

отображение, то изменение величины C эквивалентно изменению параметра этого отображения.

Рассмотрим случай $C=1$, при котором $x_1(k)$ в (8) есть траектория «парциальной» системы (1): $x_1(k)=F^k(x_1(0))$, $k=1,2,\dots$. Внесем в начальный момент времени $k=0$ произвольное возмущение в траекторию (8): $\bar{x}_i(0)=x_i(0)+\zeta_i$, $i=\overline{1,m}$. Если при некотором $\delta>0$ существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |x_i(N) - \bar{x}_i(N)| = 0 \quad \forall \zeta_i: |\zeta_i| < \delta, \quad i = \overline{2,m}, \quad (10)$$

то режим (8) в системе (7) устойчив по отношению к малым возмущениям.

Исследуем условия устойчивости режима (8), предполагая существование ляпуновского показателя λ траектории $x(k)$ в отображении (1). Рассмотрим ансамбль (7) как отображение пространства R^m в себя. В каждой точке траектории (8) матрица Якоби этого отображения равна

$$J(x(k)) = F'(x(k))A. \quad (11)$$

Для любой квадратной ($n \times n$) матрицы Q справедливо соотношение [23]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|Q^N\|_n^{1/N} = \rho(Q), \quad (12)$$

где $\rho(Q)$ - спектральный радиус матрицы Q (максимальный модуль ее собственных значений).

Равенство (11) позволяет определить максимальный ляпуновский показатель λ^* траектории (8) в системе (7), используя формулу (6),

$$\lambda^* = \lim_{N \rightarrow \infty} (\ln \|\prod_{k=0}^{N-1} J(x(k))\|_m^{1/N}) = \ln[\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \prod_{k=0}^{N-1} |F'(x(k))| \|A\|_m^{1/N} \rangle] = \ln(\rho(A)) + \lambda, \quad (13)$$

где $\rho(A)$ - спектральный радиус матрицы связи A . Поскольку матрица связи A удовлетворяет условию (9) при $C=1$, она всегда имеет собственное значение, равное единице. Поэтому $\rho(A) \geq 1$ и, следовательно,

$$\lambda^* \geq \lambda. \quad (14)$$

Неравенство (14) показывает, что «степень устойчивости» траектории (8) в системе (7) при любой матрице связи A не больше, чем у парциальной траектории в системе (1).

Рассмотрим структуру m -мерного оператора A^{\sim} , определяемого матрицей связи A . Как уже указывалось, оператор A^{\sim} имеет собственное значение $\mu_1=1$, которому соответствует собственный вектор $v_1^T = (1 \dots 1)$. Рассмотрим «новый» базис, в котором первый базисный вектор равен v_1 , а остальные остаются теми же, как и в «исходном» базисе. Матрица перехода S к этому базису и обратная ей имеют вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

В «новом» базисе оператор A^{\sim} определяется матрицей

$$A' = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ 0 & \beta_{11} & \dots & \beta_{1(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \beta_{(m-1)1} & \dots & \beta_{(m-1)(m-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a} \\ \Theta & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\mathbf{B} = \|\beta_{ij}\|, \beta_{ij} = \alpha_{(i+1)(j+1)} - \alpha_{1(j+1)}, i, j = \overline{1, m-1}, \mathbf{a} = \|\alpha_{1j}\|, j = \overline{2, m}.$$

Поскольку в силу (11) оператор $J(x(k))$, определяемый матрицей Якоби $J(x(k))$ отображения (7) в исходном базисе, отличается от оператора A^{-1} скалярным множителем $F'(x(k))$, то из (16) следует, что в новом базисе этому оператору соответствует матрица

$$G'(x(k)) = \begin{pmatrix} F'(x(k)) & F'(x(k))\mathbf{a} \\ \Theta & F'(x(k))\mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Одномерное подпространство V_1 , порожденное собственным вектором \mathbf{v}_1 , соответствует траектории (8) в том смысле, что любая такая траектория лежит в этом подпространстве, и, наоборот, любая последовательность точек из V_1 является траекторией типа (8). Следовательно, нарушение пространственной однородности характеризуется проекцией \mathbf{r}_2 произвольного возмущения \mathbf{r} на дополнительное к V_1 подпространство V_2 (рис. 4). Из представления (17) следует, что динамика проекций любого вектора подпространства V_2 под действием оператора $J(x(k))$ определяется оператором $H(x(k))$ с матрицей $\mathbf{H}(x(k)) = F'(x(k))\mathbf{B}$ размера $(m-1) \times (m-1)$. Таким образом, если последовательность соответствующих операторов $H(x(k))$ является асимптотически сжимающей, то есть при достаточно большом N

$$\|\prod_{k=0}^{N-1} \mathbf{H}(x(k))\|_{m-1}^{1/N} \leq \delta < 1, \quad (18)$$

то любой вектор из фазового пространства системы (7) под действием последовательности операторов $H(x(k))$ будет асимптотически «ложиться» на подпространство V_1 . Это равносильно равенству (10) для линеаризованной системы (7).

Учитывая определение (6) максимального ляпуновского показателя λ и равенство (12), получаем, что существует

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \|\prod_{k=0}^{N-1} \mathbf{H}(x(k))\|_{m-1}^{1/N} \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \|\prod_{k=0}^{N-1} F'(x(k))\mathbf{B}\|_{m-1}^{1/N} \rangle = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \|\prod_{k=0}^{N-1} F'(x(k))\|_{m-1}^{1/N} \|\mathbf{B}\|_{m-1}^{1/N} \rangle = \exp(\lambda)\rho(\mathbf{B}), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\rho(\mathbf{B})$ - спектральный радиус матрицы \mathbf{B} .

Таким образом, из (18) и (19) заключаем, что необходимое и достаточное условие устойчивости по линейному приближению режима синхронизации (8) в системе (7) имеет вид

$$\rho(\mathbf{B}) < \exp(-\lambda). \quad (20)$$

Матрицу \mathbf{B} будем называть матрицей возмущений режима синхронизации. Из представления (16) непосредственно следует, что набор собственных значений (спектр) матрицы \mathbf{B} совпадает со спектром матрицы связи \mathbf{A} , из которого удалено одно собственное значение, равное 1 (кратные собственные значения считаются различными). Поэтому неравенство (20) можно переписать в виде

$$\rho_{-1}(\mathbf{A}) < \exp(-\lambda). \quad (21)$$

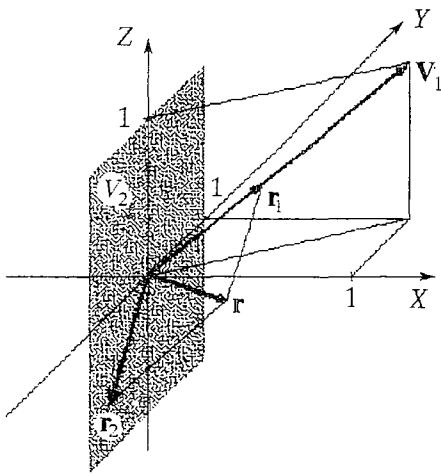


Рис. 4. К определению устойчивости пространственно-однородной траектории при $m=3$

новскому показателю λ траектории $x(k)$ в отображении F . Этот ляпуновский показатель соответствует возмущениям, которые не выводят траекторию системы (7) из режима синхронизации.

Рассмотренный способ связи одномерных отображений можно обобщить на отображения F действительного или комплексного n -мерного пространства в себя, причем в случае комплексных отображений матрица связи также может быть комплексной. Используя описанный выше подход* можно показать, что условия (20), (21) устойчивости режима синхронизации (по линейному приближению) имеют место и в этом случае, если под λ понимать максимальный ляпуновский показатель траектории $x(k)$, определяемый формулой (6).

3. Условия устойчивости и реализуемость режима синхронизации в некоторых структурах связанных отображений

Рассмотрим на основании общих результатов предыдущего раздела условия возникновения режима синхронизации в нескольких типичных структурах. Для исследования реализуемости режима синхронизации в этих структурах были проведены численные эксперименты. В качестве отображения F использовались одно- и двумерные отображения с хаотической динамикой.

3.1. Синхронизация двух отображений при несимметричной взаимной связи между ними. Простейшей структурой является система из двух связанных отображений

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x(k) + \alpha(y(k) - x(k))), \\ y(k+1) = F(y(k) + \beta(x(k) - y(k))). \end{cases} \quad (22)$$

В отличие от однонаправленного воздействия одного отображения на другое, здесь имеет место взаимное влияние отображений, которое носит асимметричный характер: значения коэффициентов α и β в общем случае не одинаковы.

Матрица связи такой системы имеет вида $A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$, а матрица возмущений

где $\rho_{-1}(A)$ - радиус спектра матрицы связи A , из которого удалено одно (с учетом кратности) собственное значение, равное 1. Неравенство (21) показывает, что условия устойчивости режима синхронизации однозначно определяются максимальным ляпуновским показателем λ «парциальной» динамики связанных отображений и спектральными характеристиками матрицы связи. В интересующем нас случае хаотической парциальной динамики $\lambda > 0$. Из (21) следует, что синхронизация в этом случае возможна только при $\rho_{-1}(A) < 1$ и, следовательно, $\rho(A) = 1$. Учитывая равенство (13) заключаем, что максимальный ляпуновский показатель λ^* траектории (8) в системе (7) при этом всегда равен максимальному ляпуновскому показателю λ траектории $x(k)$ в отображении F .

* Данный подход можно использовать для анализа устойчивости режима синхронизации ансамблей из любого числа динамически связанных неавтономных отображений любой размерности, что важно для приложений в задачах передачи информации.

есть просто число: $V = \{1 - (\alpha + \beta)\}$. Следовательно, $\rho(V) = |1 - (\alpha + \beta)|$, и, используя (20), получаем необходимые и достаточные условия устойчивости по линейному приближению синфазного режима в системе (22) в виде неравенства

$$|1 - (\alpha + \beta)| < \exp(-\lambda). \quad (23)$$

Разрешая это неравенство относительно величины $(\alpha + \beta)$, получаем необходимое и достаточное условие синхронизации двух связанных отображений (22):

$$1 - \exp(-\lambda) = \gamma^- < (\alpha + \beta) < \gamma^+ = 1 + \exp(-\lambda). \quad (24)$$

Условие (22) определяет в пространстве параметров связи (α, β) существующую при любом конечном λ область устойчивости режима синхронизации двух взаимосвязанных отображений. Она изображена на рис. 5 в виде заштрихованной полосы. Если $\lambda < 0$, то точка $(0, 0)$ принадлежит области устойчивости, а при $\lambda > 0$ точка $(0, 0)$ остается вне этой области. С физической точки зрения это соответствует уже упомянутому в разделе 1 свойству о нулевом пороге связи для синхронизации динамических систем с регулярным поведением и ненулевым пороге связи при синхронизации динамических систем с хаосом.

Для исследования реализуемости режима синхронизации двух связанных отображений были проведены численные эксперименты, в которых в качестве отображения F использовалось отображение Хенона

$$x(k+1) = 1 - ax(k)^2 + y(k), \quad y(k+1) = bx(k), \quad (25)$$

при значениях параметров $a=1.4$, $b=0.3$. При данных значениях параметров в отображении Хенона реализуется хаотический режим с максимальным ляпуновским показателем $\lambda \approx 0.42$ (см., например, [24]). В соответствии с (24) нижний γ^- и верхний γ^+ пороги синхронизации приблизительно равны 0.34 и 1.66, соответственно. В численных экспериментах, проведенных при значениях параметров связи (α, β) внутри заштрихованной полосы на рис. 5 в системе (22), при старте со «случайных» начальных условий достаточно быстро устанавливается режим синхронизации (8). При выходе точки (α, β) из заштрихованной области происходит срыв режима синхронизации, причем теоретическая граница области устойчивости совпадает с данными численных экспериментов по синхронизации с точностью до второго знака после запятой.

На рис. 6 показано поведение модуля разности переменных связанных отображений Хенона (SE-«synchronization error», k - номер итерации) при старте со случайных начальных условий и значениях параметров связи $\alpha=0.1$, $\beta=0.25$ таких, что $\gamma^- < \alpha + \beta < \gamma^+$. После установления режима синхронизации параметр β уменьшается до величины $\beta=0.2$, что выводит точку (α, β) из заштрихованной области на рис. 5 ($\beta = \gamma^- - \alpha \approx 0.24$) и, следовательно, приводит к потере устойчивости режима синхронизации.

Численно исследована скорость установления режима хаотической синхронизации в зависимости от начальных условий. На рис. 7 показано пространство начальных условий первого из связанных отображений в двух разных масштабах. Начальные

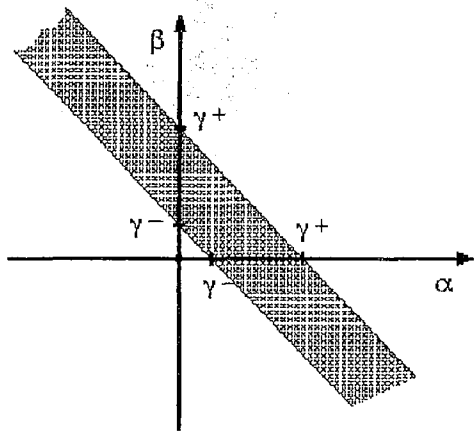


Рис. 5. Вид зоны устойчивости режима синхронизации в пространстве (α, β) параметров связи

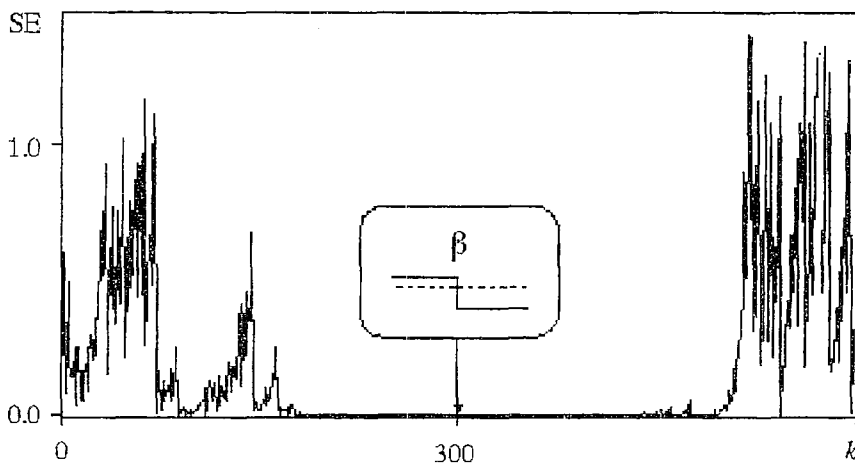


Рис. 6. Поведение величины $SE=|x_2 - x_1|$ для двух связанных отображений Хенона при старте со «случайных» начальных условий. В момент $k=300$ параметр β меняется от 0.25 до 0.20

условия во втором отображении были фиксированы ($x=0, y=0$). Если вхождение в режим синхронизации (с заданной точностью) происходило быстрее, чем за 50 итераций, то соответствующая точка отмечалась белым цветом, а если медленнее - то черным. Из рис. 7 видно, что зоны с разной скоростью сходимости имеют сложную (возможно, фрактальную) структуру.

Проведенные численные исследования свидетельствуют о том, что явление хаотической синхронизации может быть использовано для оценки максимальных ляпуновских показателей динамических систем с дискретным временем путем численного измерения границ зоны устойчивости режима синхронизации в пространстве параметров связи.

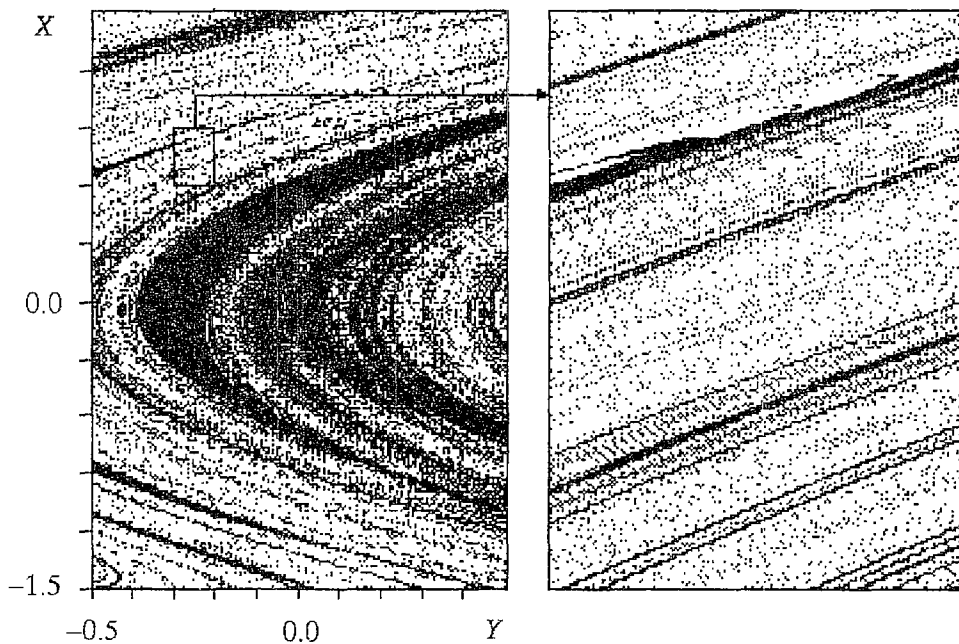


Рис. 7. Пространство начальных условий одного из связанных отображений Хенона в двух различных масштабах

3.2. Синхронизация трех отображений при «круговой» связи. Рассмотрим условия синхронизации трех отображений (рис. 8). Матрица связи системы отображений имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1-\gamma & 0 & \gamma \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \beta & 1-\beta \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Непосредственным вычислением можно показать, что кроме собственного значения, равного 1, матрица (26) имеет два собственных значения вида

$$\mu_{1,2} = 1 - \varepsilon/2 \pm 1/2 (\varepsilon^2 - 4\eta)^{1/2},$$

где $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma$, $\eta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$. Если $\varepsilon^2 - 4\eta < 0$, то матрица связи имеет два комплексно-сопряженных собственных значения, модули которых равны

$$|\mu_{1,2}| = [(1 - \varepsilon/2)^2 + 1/4 (4\eta - \varepsilon^2)]^{1/2} = (1 - \varepsilon + \eta)^{1/2}. \quad (27)$$

Если $\varepsilon^2 - 4\eta \geq 0$, то собственные значения матрицы связи вещественны.

Рассмотрим в качестве примеров два случая связи.

а. В случае симметричной круговой связи ($\alpha = \beta = \gamma$), учитывая (27), получаем

$$\beta = \gamma = \alpha, \quad \varepsilon = 3\alpha, \quad \eta = 3\alpha^2,$$

$$\mu_{1,2} = 1 - 3/2\alpha \pm i(3^{1/2}/2)\alpha,$$

$$|\mu_{1,2}| = (1 - 3\alpha + 3\alpha^2)^{1/2}.$$

Условие устойчивости режима синхронизации в данном случае имеет вид

$$(1 - 3\alpha + 3\alpha^2)^{1/2} < \exp(-\lambda), \quad (28)$$

где λ - максимальный ляпуновский показатель.

На рис. 9 показан график функции $f(\alpha) = (1 - 3\alpha + 3\alpha^2)^{1/2}$ и условно изображена зона устойчивости режима синхронизации, определяемая неравенством (28). Заметим, что если $\lambda > \ln 2$, то синхронизация в рассматриваемой структуре связанных отображений невозможна при любом коэффициенте связи α .

б. Интересный результат получается в случае, когда

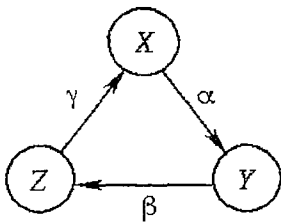


Рис. 8. Структура ансамбля из трех отображений с «круговой» связью

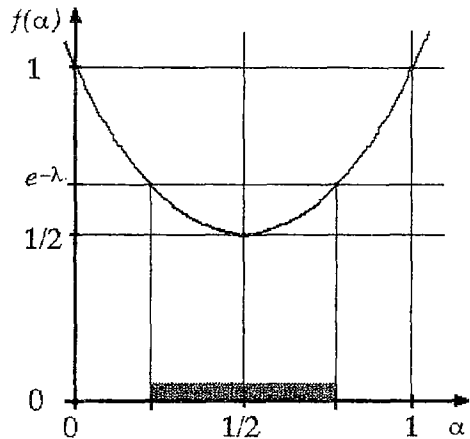


Рис. 9. К определению условий синхронизации ансамбля из трех отображений с «круговой» симметричной связью

$$\begin{aligned}\beta &= \alpha, \quad \gamma = 4\alpha, \quad \varepsilon = 6\alpha, \quad \eta = 9\alpha^2, \\ \varepsilon^2 - 4\eta &= 0, \\ \mu_1 = \mu_2 &= 1 - 3\alpha.\end{aligned}$$

Действительно, условие устойчивости режима синхронизации имеет вид

$$[1 - \exp(-\lambda)]/3 = \gamma^- < \alpha < \gamma^+ = [1 + \exp(-\lambda)]/3. \quad (29)$$

Из (24) следует, что два одинаковых отображения при однонаправленной связи синхронизируются при

$$\alpha > 1 - \exp(-\lambda).$$

С другой стороны, из условия (29) следует, что если дополнительно связать системы Y и Z однонаправленной связью с коэффициентом 4α , то порог синхронизации систем X и Y падает в три раза до величины $[1 - \exp(-\lambda)]/3$.

Таким образом, если $[1 - \exp(-\lambda)]/3 < \alpha < [1 + \exp(-\lambda)]$, то разрыв связи между системами Y и Z приводит к рассинхронизации всех трех отображений.

3.3. Синхронизация ансамбля m отображений при симметричной связи.

Рассмотрим условия синхронизации m отображений в случае, когда все отображения связаны друг с другом с одним и тем же коэффициентом α (симметричная связь). Матрица связи при этом имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 - (m-1)\alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 1 - (m-1)\alpha & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \dots & 1 - (m-1)\alpha \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Можно показать, что помимо простого собственного значения, равного 1, матрица (30) имеет собственное значение $(1 - m\alpha)$ кратности $(m-1)$. Из неравенства (21) следует, что в данном случае условие существования режима синхронизации (8) имеет вид

$$[1 - \exp(-\lambda)]/m = \gamma^-_m < \alpha < \gamma^+_m = [1 + \exp(-\lambda)]/m, \quad (31)$$

где λ - максимальный ляпуновский показатель «парциальной» динамики отдельного отображения. С увеличением числа m связанных отображений нижний γ^- и верхний γ^+ пороги устойчивости режима синхронизации убывают, как $1/m$.

Численные эксперименты проводились для системы из 100 связанных логистических отображений

$$x(k) = \mu x(k)[1 - x(k)], \quad \mu = 4. \quad (32)$$

При $\mu=4$ траектория логистического отображения (32) имеет ляпуновский показатель $\lambda = \ln 2$ [24], и из (31) следует, что $\gamma^-_{100} = 0.005$ и $\gamma^+_{100} = 0.015$. В компьютерных экспериментах при значении $\alpha \in (\gamma^-_{100}, \gamma^+_{100})$ в объединенной системе при «случайных» начальных условиях в каждой из «парциальных» систем всегда устанавливался режим синхронизации. При выходе параметра связи α за пределы интервала $(\gamma^-_{100}, \gamma^+_{100})$ наблюдался срыв режима синхронизации, причем значения порогов «отслеживались» с точностью до 10^{-4} .

На рис. 10 приведена графическая иллюстрация динамики объединенной системы и показано поведение величины $SE = \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i}^m |x_i - x_j| / [m(m-1)]$ - «ошибки синхронизации» - при старте со «случайных» начальных условий и коэффициенте

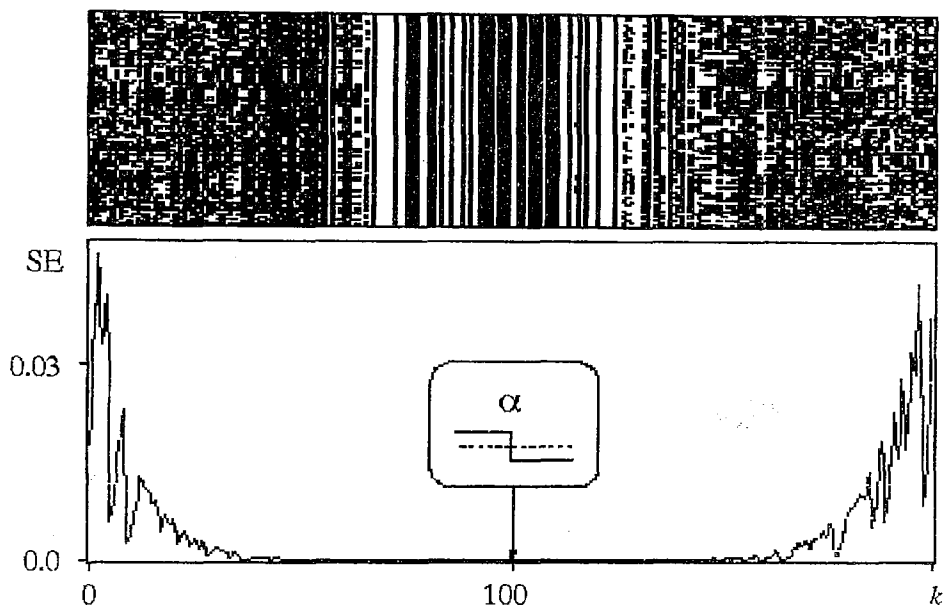


Рис. 10. Процесс синхронизации при $\alpha=0.0055$ и рассинхронизации при $\alpha=0.0045$ в системе из 100 симметрично связанных логистических отображений. На верхней части рисунка цвет каждого квадратика определяется переменной состояния каждого из связанных отображений

связи $\alpha=0.0055 > \gamma^{-100}$. После установления режима синхронизации коэффициент связи был уменьшен до значения $\alpha=0.0045 < \gamma^{-100}$, что привело к полной рассинхронизации системы.

3.4. Синхронизация ансамбля отображений при блочно-симметричной связи. Наряду с ансамблями симметрично связанных отображений интересно рассмотреть динамику систем, состоящих из двух и более подсистем, внутренние связи между элементами которых являются симметричными, но не равными связям (внешним) между элементами разных подсистем (блочно-симметричная связь). В таких системах помимо режима (полной) синхронизации возможен режим частичной синхронизации, при котором синхронизирована только динамика элементов каждой подсистемы. При частичной синхронизации из-за наличия ненулевых внешних связей динамика отдельного отображения в ансамбле уже, вообще говоря, не совпадает с парциальной динамикой этого отображения в автономном режиме и явно зависит от величины этих связей. Это обстоятельство не позволяет в общем случае аналитически определить условие возникновения режима частичной синхронизации.

В качестве примера рассмотрим динамику системы из двух подсистем, состоящих соответственно из 150 и 50 логистических отображений (32). Внутренние связи между отображениями в каждой из подсистем будем считать равными α , а связи между отображениями разных подсистем - равными β . Структура такого ансамбля условно изображена на рис.11. Если внешние связи отсутствуют ($\beta=0$), то каждая из подсистем является автономной, и условия синхронизации в этих подсистемах определяются неравенством (31) при $m=150$ и $n=50$, соответственно. Если внешние связи равны внутренним связям ($\alpha=\beta$), то объединенная система является системой с симметричными связями, и, следовательно, условия синхронизации (полной) в этой системе

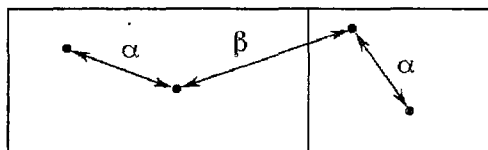


Рис. 11. Структура системы, состоящей из двух подсистем

определяются неравенством (31) при $m=200$. Таким образом, если зафиксировать внутренние связи так, чтобы (31) было выполнено при $m=200$, а внешние связи β изменять от 0 до α , то в зависимости от того, выполнено или не выполнено при этом α неравенство (31) при $m=150$ или $m=50$, динамика объединенной системы будет меняться от полной или частичной рассинхронизации до полной синхронизации. При численном моделировании было выбрано два значения внутренней связи, удовлетворяющие (31) при $m=200$.

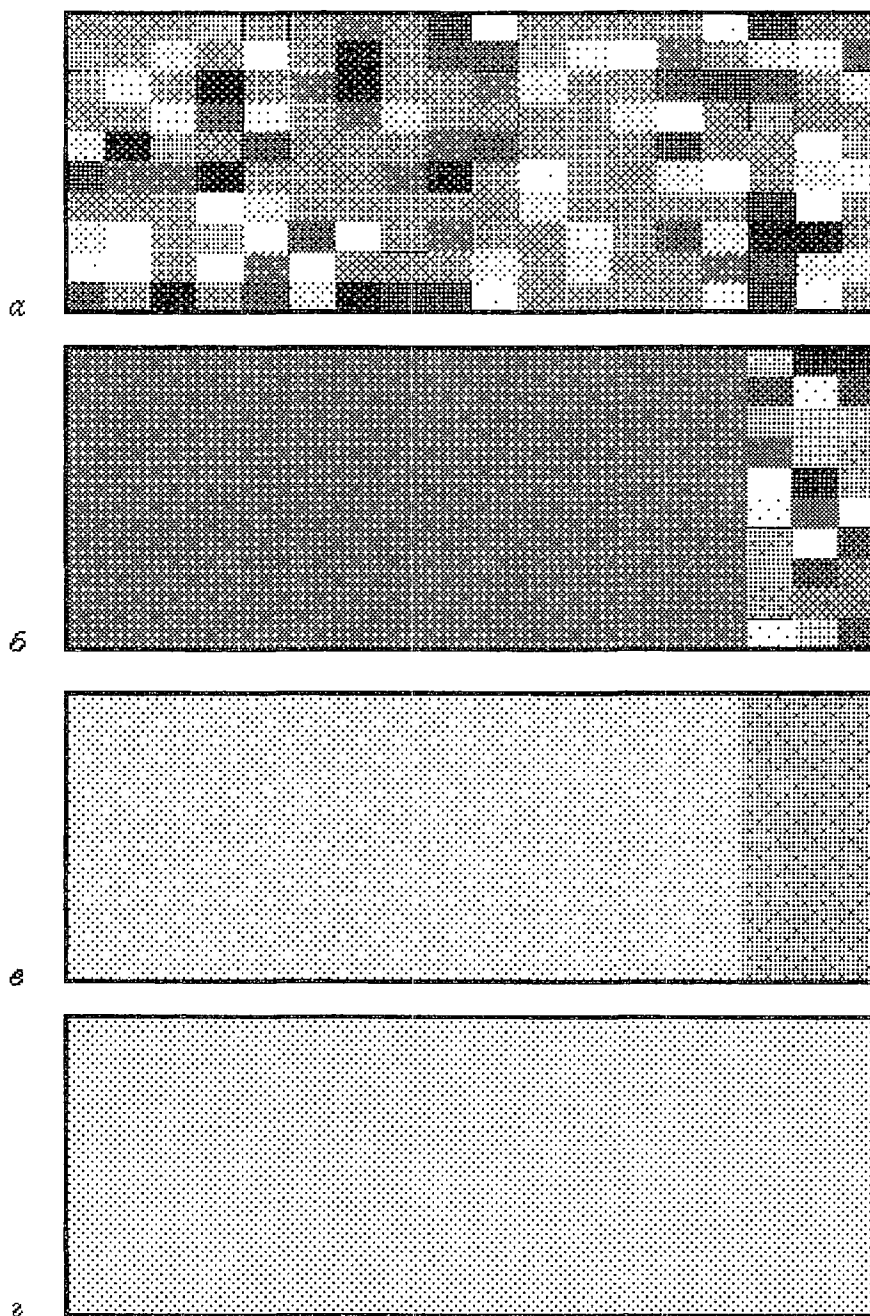


Рис. 12. Динамические режимы ансамбля с блочно-симметричной связью при $\alpha=0.003$: *а* - $\beta=0$, режим полной рассинхронизации; *б* - $\beta=0.001$, режим частичной рассинхронизации; *в* - $\beta=0.002$, режим внутривблочной синхронизации; *г* - $\beta=0.003$, режим полной синхронизации

Первое значение $\alpha_1=0.003$ меньше критического значения γ - как при $m=50$, так и при $m=150$. Поэтому при отсутствии связи между подсистемами ($\beta=0$) в объединенной системе наблюдается режим полной рассинхронизации. При увеличении параметра β от 0 до $\alpha_1=0.003$ наблюдались режимы: полной рассинхронизации (рис. 12, а), частичной рассинхронизации (рис. 12, б), внутриблочной синхронизации (рис. 12, в) и полной синхронизации (рис. 12, г).

Второе значение внутренней связи $\alpha_1=0.005$ удовлетворяет (31) при $m=150$, но не удовлетворяет этому неравенству при $m=50$. Поэтому при отсутствии внешних связей в первой подсистеме может наблюдаться режим синхронизации, а во второй - нет. При увеличении параметра β от 0 до $\alpha_1=0.005$ наблюдалась смена режима частичной рассинхронизации (рис. 13, а) на внутриблочную (рис. 13, б) и полную (рис. 13, в) синхронизацию.

Таким образом, выбор параметров внешних и внутренних связей α и β позволяет реализовать различные типы сложных коллективных колебаний в различных частях ансамбля, а также, при соответствующем изменении этих параметров, организовать локальные возмущения синфазных хаотических режимов.

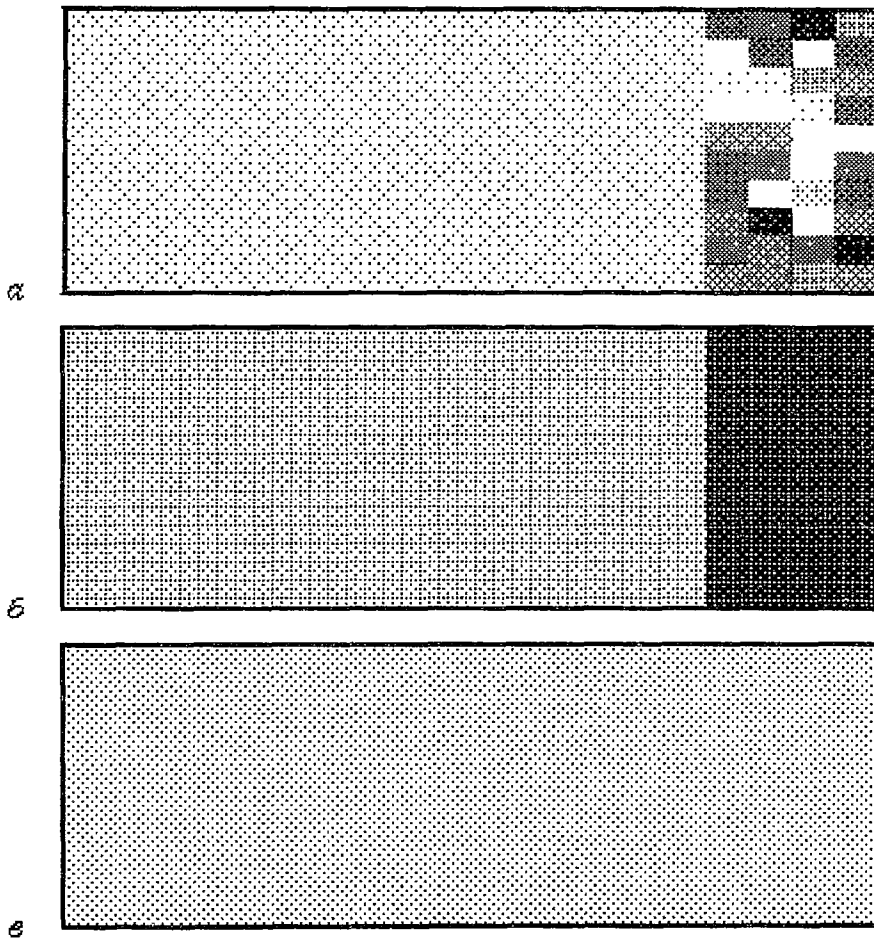


Рис. 13. Динамические режимы ансамбля с блочно-симметричной связью при $\alpha=0.005$: а - $\beta=0$, режим частичной рассинхронизации в одном из блоков, б - $\beta=0.001$, режим внутриблочной синхронизации, в - $\beta=0.005$, режим полной синхронизации

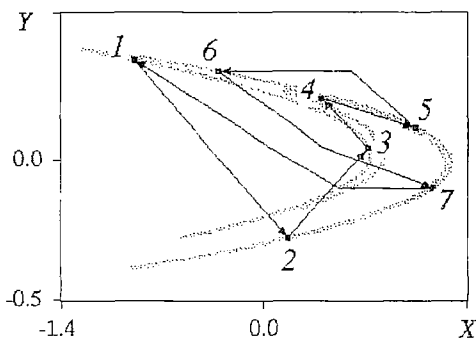


Рис. 14. Один из четырех циклов периода 7, «принадлежащих» аттрактору отображения Хенона при $\alpha=1.4$ и $\beta=0.3$

3.5. Синхронизация неустойчивых циклов хаотических отображений. Известно [25-28], что странный аттрактор диссипативной динамической системы «состоит» из счетного числа неустойчивых циклов и «переходов» между ними. Как показано в [27,28], набор этих циклов и их мультипликаторы вполне характеризуют странный аттрактор, то есть позволяют вычислять его размерности, энтропию и т.д. Существует методика определения форм циклов и их мультипликаторов по экспериментальным данным [25].

Если известна форма некоторого неустойчивого цикла отображения F , то, используя результаты раздела 1, можно

стабилизировать данный цикл односторонним воздействием на это отображение периодической последовательностью, состоящей из точек этого цикла. Из неравенства (5) непосредственно следует, что условия синхронизации данного цикла однозначно определяются максимальным по модулю мультипликатором этого цикла при помощи неравенства

$$|1 - \alpha| < |\mu|^{-1/n}, \quad n - \text{период цикла.} \quad (33)$$

Например, в наборе неустойчивых циклов аттрактора отображения Хенона (25) при $\alpha=1.4$ и $\beta=0.3$ есть четыре цикла периода 7 [29], один из которых изображен на рис. 14. Мультипликаторы этого цикла равны $\mu_1=-1.8 \cdot 10^{-1}$, $\mu_2=1.2 \cdot 10^{-5}$. Следовательно, если воздействовать на отображение Хенона периодической последовательностью, состоящей из точек данного цикла, то его синхронизация возможна, в соответствии с (33), при $\alpha \in (0.338\dots, 1.662\dots)$.

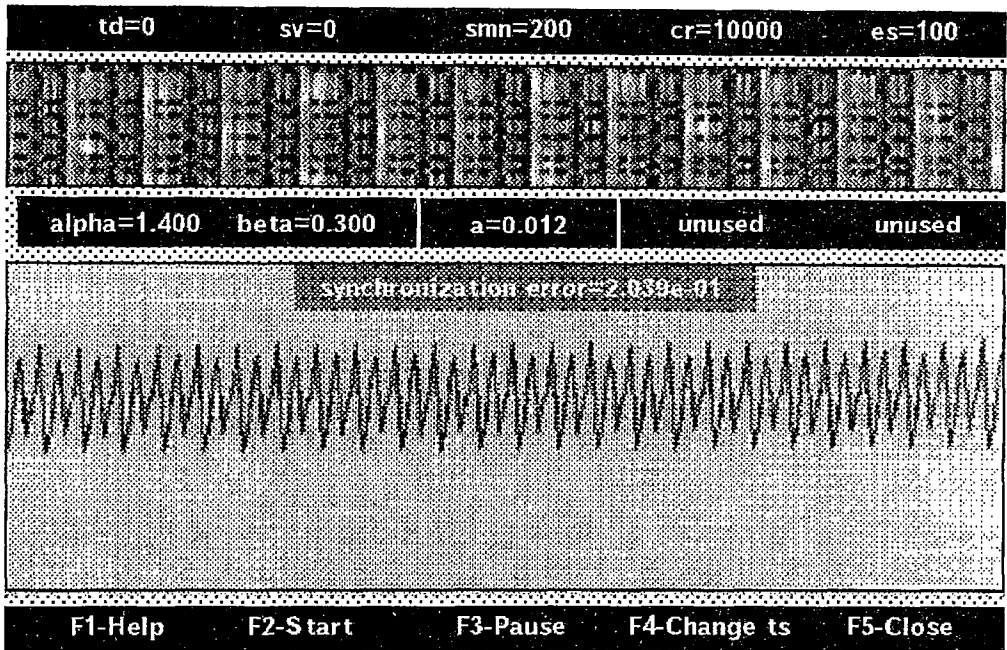
Отметим, что численно измеряя порог синхронизации любого цикла, можно, используя (33), оценить степень неустойчивости или устойчивости этого цикла.

Заключение

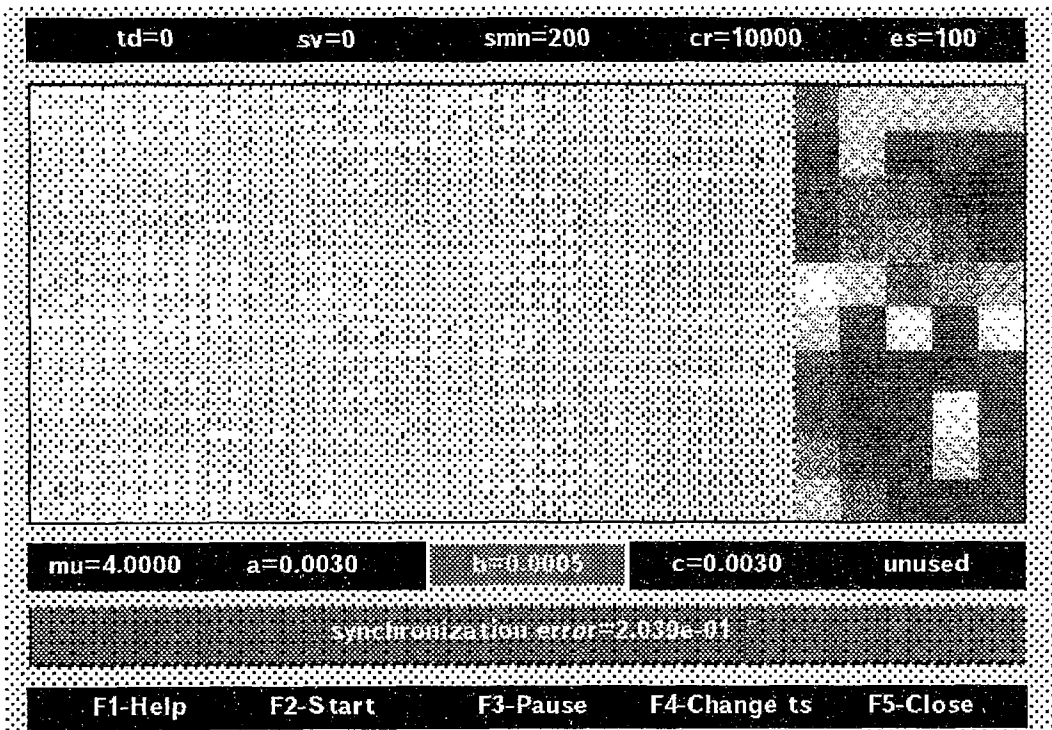
В статье рассмотрено явление хаотической синхронизации в ансамблях связанных многомерных отображений. Получены общие условия устойчивости режима синхронизации. В соответствии с этими условиями устойчивость режима синхронизации определяется максимальным ляпуновским показателем парциальной динамики отдельного отображения и спектральными характеристиками матрицы связи отображений в ансамбле. За рамками настоящей работы осталось рассмотрение более тонких эффектов, связанных с влиянием «нетипичных» траекторий аттрактора на процессы синхронизации. Эти вопросы предполагается подробно исследовать в последующих публикациях.

Для исследования физической реализуемости режима синхронизации в рассматриваемых структурах было проведено численное моделирование динамики систем связанных логистических отображений и отображений Хенона. Показано, что вхождение в режим синхронизации происходит в таких системах при произвольных начальных условиях в парциальных системах.

Полученные результаты могут быть использованы в задачах обработки сигналов, в частности, при построении синхронизаторов [20, 30], при создании систем передачи информации с хаотической несущей, при построении систем обработки информации, записанной на циклы отображений [4], для экспериментального или численного измерения максимальных ляпуновских показателей динамических систем, а также для качественного моделирования динамики сложных систем разной природы, состоящих из большого числа взаимодействующих подсистем.



a



b

Рис. 15. Общий вид экрана при работе в первом (а) и втором (б) рабочих режимах; а - показана временная динамика ансамбля из 20 симметрично связанных отображений Хенона при помощи цветовой индикации мгновенных состояний этих отображений в верхнем окне и вывода величины SE - в нижнем; б - общий вид экрана при работе во втором рабочем режиме. Показано мгновенное состояние ансамбля из 200 блочно-симметрично связанных логистических отображений при помощи цветовой индикации

Для численного моделирования динамики ансамблей из связанных отображений был разработан программный комплекс «SynchronChaos». Комплекс состоит из статического модуля и динамически присоединяемых подпрограмм, задающих вид парциального отображения и структуру матрицы связи, и функционирует в двух рабочих режимах.

Первый режим предназначен для анализа поведения системы связанных отображений во времени. В этом режиме создается два окна, в каждом из которых по оси абсцисс «отложено» дискретное время (номер итерации). В первом окне состояние каждого из связанных отображений в текущий момент времени изображается одним из 16 цветов, причем параметр цветового разрешения (cr) задается пользователем. Во втором окне показано поведение во времени величины $SE = [\sum_{i,j \in SM} (x_i - x_j)^2]^{1/2} / [smn(1-smn)]$ - «ошибки синхронизации», где SM - множество индексов выделенных отображений, smn - число таких отображений (рис. 15, а).

Второй режим предназначен для графической иллюстрации мгновенных состояний ансамбля связанных отображений. В этом режиме создается одно окно, в котором каждый квадратик соответствует одному отображению, и цвет этого квадратика определяется значением переменной состояния данного отображения аналогично тому, как это делается в первом режиме (рис. 15, б).

В обоих рабочих режимах имеется возможность динамически изменять значения различных параметров системы, парциального отображения и матрицы связи при помощи ячеек параметров.

Библиографический список

1. Skarda C.A., Freeman W.J. How brain make chaos in order to make sense of the world // Behavioral and Brain Science. 1987. Vol. 10. P. 161.
2. Хакен Г. Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1990.
3. Николис Дж. Динамика иерархических систем. М.: Мир, 1989.
4. Дмитриев А.С. Хаос и обработка информации в нелинейных динамических системах // РЭ. 1993. Т. 38, № 1. С.1.
5. Fujisaka H., Yamada T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems // Prog.Theor.Phys. 1983. Vol. 69, № 1. P. 32.
6. Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И. Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 9. С. 1050.
7. Pikovsky A.S. // Z. Phys. 1984. 55B. P. 149.
8. Пиковский А.С. Взаимодействие странных аттракторов. Препринт № 79. Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С.21
9. Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П. Квазиоднородные стохастические движения и их разрушения в системе связанных нелинейных осцилляторов // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. Т 31, № 5. С. 627.
10. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
11. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А. Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // РЭ. 1991. Т. 36, № 2. С. 338.
12. Алексеев А.А., Шалфеев В.Д. Стохастическая синхронизация в ансамбле автоколебательных систем с обратной связью // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19, вып. 21.
13. Kaneko K. Lyapunov analysis and information flow in coupled map lattices // Physica 23D. 1986. P. 436.
14. Kaneko K. Pattern dynamics in spatio-temporal chaos // Physica 34D.1989. P. 60.

15. Kaneko K. Spatio-temporal chaos in one- and two-dimensional coupled map lattices // *Physica* 37D. 1986. P. 1.
16. Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // *Письма в ЖЭТФ*. 1984. Т. 39, № 12. С. 561.
17. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркация развития хаоса в цепочке связанных генераторов // *ДАН СССР*. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120.
18. Арансон И.С., Афраймович В.С., Рабинович М.И. Устойчивость пространственно-однородного состояния в цепочке отображений. Препринт № 203. Горький: ИПФ АН СССР, 1988. С. 18.
19. *Afraimovich V.S., Chow S.N.* Criteria of spatial chaos in lattice dynamical systems // *Georgia Institute of Technology CDSNS93-142*.
20. Дмитриев А.С., Широков М.Е. Синхронизаторы хаотических сигналов // *РЭ*. 1995. Т. 40, № 11. С. 1667.
21. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971.
22. *Eckmann J.P., Ruelle D.* Ergodic theory and strange attractors // *Rev. Mod. Phys.* 1985. Vol. 57. P. 617.
23. Русс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
24. Шустер Г. Детерминированный хаос М.: Мир, 1988.
25. *Auerbach D., Cvitanovic P., Eckmann J.-P., Gunarathe G.H., Procaccia I.* Exploring chaotic motions through periodic orbit // *Phys.Rev.Lett.* 1987. Vol. 58, № 23. P. 2387.
26. *Cvitanovic P.* Invariant measurements of strange sets in terms of cycles // *Phys.Rev.Lett.* 1988. Vol. 61, № 24. P. 2729.
27. *Artuso R., Aurell E., Cvitanovich P.* Recycling of strange sets: I Cycle expansions // *Nonlinearity*. 1990. № 3. P. 325.
28. *Artuso R., Aurell E., Cvitanovich P.* Recycling of strange sets: II Applications // *Nonlinearity*. 1990. № 3. P. 361.
29. Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е. Структура периодических орбит хаотической автоколебательной системы, описываемой разностными уравнениями 2-го порядка // *РЭ*. 1994. Т. 39, № 9, С. 1392.
30. Дмитриев А.С., Широков М.Е. Динамика синхронизатора для хаотических сигналов с непрерывным временем // *РЭ*. 1995. Т. 40, № 11. С. 1660.

*Институт радиотехники и
электроники РАН*

*Поступила в редакцию 8.01.96
после переработки 20.06.96*

SYNCHRONIZATION IN ENSEMBLES OF COUPLED MAPS

A.S. Dmitriev, S.O. Starkov, M.E. Shirokov

Ensembles of coupled maps are considered. The conditions of synchronization in such ensembles are investigated. It is shown that for this type of coupling these conditions are defined by the value of the first Lyapunov exponent of the partial dynamics in each (isolated) map and by the spectral characteristics of the coupling matrix. The obtained results are applied to concrete ensembles of coupled maps. Computer simulations of the dynamics of such ensembles with logistic maps and Henon maps as partial systems are described. Some applications of obtained results are outlined.



Дмитриев Александр Сергеевич - родился в 1948 году. Окончил Московский физико-технический институт (1971). Кандидат физико-математических наук (1974), доктор физико-математических наук (1988), профессор. Ведущий научный сотрудник Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - теория динамического хаоса, информационные технологии на основе хаотической динамики. Автор более 100 научных трудов, в том числе 2 монографий.



Старков Сергей Олегович - родился в 1956 году. Окончил факультет радиотехники и кибернетики МФТИ (1976). Кандидат физико-математических наук (1986). В настоящее время старший научный сотрудник Института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - динамический хаос в радиофизических системах, информационные технологии на основе хаотической динамики, прикладные аспекты теории динамического хаоса. Опубликовал более 60 научных работ.



Широв Максим Евгеньевич - родился в 1968 году. Окончил МФТИ (1992), кандидат физико-математических наук (1996). Область научных интересов - хаотическая динамика и ее использование в информационных технологиях. Автор 10 научных работ.