



## ВЗРЫВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СИСТЕМАХ ТИПА «ДВА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКА - ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ВОЛНА»

*Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков*

Исследуется взрывная неустойчивость при взаимодействии двух электронных потоков с электромагнитной волной. Рассмотрены конфигурации как с попутными, так и со встречными потоками. Получены уравнения трехволнового взаимодействия, описывающие динамику медленно меняющихся амплитуд. Проведено численное решение трехволновых уравнений с соответствующими граничными условиями, позволяющее выявить особенности физических процессов при развитии неустойчивости и определить влияние различных факторов на пусковые условия генерации.

### Введение

Важный раздел теории волновых процессов составляет изучение явлений, обусловленных резонансным взаимодействием нелинейных волновых пакетов (см., например, [1-3]). В первую очередь к ним относятся взаимодействия трех волн, частоты и волновые векторы которых удовлетворяют условиям трехволнового резонанса

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \quad (1)$$

или, как говорят, образуют резонансную триаду [2,3].

Среди подобных процессов особый интерес представляет взрывная неустойчивость (ВН), реализующаяся в случае, когда либо высокочастотная ( $\omega_3$ ), либо обе низкочастотные ( $\omega_{1,2}$ ) волны обладают отрицательной энергией. Она выразится в одновременном росте амплитуд всех взаимодействующих волн и их обращении в бесконечность за конечный промежуток времени [1,2]. Разумеется, на практике всегда существуют механизмы, ограничивающие рост амплитуд, но для их учета, как правило, необходимо выйти за рамки чисто волновых представлений.

Взрывная неустойчивость в системах, содержащих электронные потоки (ЭП), давно привлекает интерес исследователей, так как может привести к созданию нового типа генераторов высокочастотных колебаний. Ранее теоретически и экспериментально исследовалась ВН в электронном потоке, взаимодействующем с полем резонатора, образованного закороченным на концах отрезком спиральной замедляющей системы [4,5], а также в различных пучково-плазменных системах (см. [6]). В недавней работе [7] было указано на

возможность реализации ВН в лампе обратной волны (ЛОВ) с плазменным заполнением.

Во всех этих системах приводящий к взрыву процесс заключался в распаде медленной волны пространственного заряда (ВПЗ), являющейся волной с отрицательной энергией, на две волны с положительной энергией, которыми являются электромагнитные и различные плазменные волны. В нашей работе [8] был предложен другой способ осуществления ВН, основанный на распаде электромагнитной волны (ЭМВ) на две медленных ВПЗ при взаимодействии двух попутных ЭП с обратной ЭМВ. Такое взаимодействие обладает рядом привлекательных свойств. В настоящей работе изложены результаты исследования взрывной неустойчивости в некоторых системах типа «два взаимодействующих электронных потока - электромагнитная волна».

## 1. Основные уравнения. Резонансные соотношения

Рассмотрим взаимодействие двух попутных ЭП с обратной ЭМВ. В качестве исходных примем следующую систему гидродинамических уравнений [8]:

$$\partial v_n / \partial t + v_n \partial v_n / \partial x = \partial \phi / \partial x - E, \quad (2)$$

$$\partial \rho_n / \partial t + \partial (\rho_n v_n) / \partial x = 0, \quad (3)$$

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 - k_{\perp}^2 \phi = \rho_1 + \rho_2 - 1 - \delta, \quad (4)$$

$n=1,2$  - номер ЭП. Здесь (2) - уравнения движения, (3) - уравнения непрерывности, (4) - уравнение Пуассона, при выводе которого считалось, что силы кулоновского отталкивания между различными сечениями ЭП спадают с расстоянием пропорционально  $\exp(-k_{\perp} x)$ , а статический пространственный заряд полностью скомпенсирован неподвижным ионным фоном. В уравнениях (2)-(4) все величины являются безразмерными: скорости  $v_n$  нормируются на невозмущенную скорость первого потока  $v_{01}$ , плотности заряда  $\rho_n$  - на  $\rho_{01}$ , потенциал  $\phi$  - на  $m v_{01}^2 / e$ , напряженность поля ЭМВ  $E$  - на  $m v_{01} \omega_{p1} / e$ , время  $t$  - на  $\omega_{p1}^{-1}$ , координата  $x$  - на  $v_{01} / \omega_{p1}$ , где  $\omega_{p1} = (\epsilon \rho_{01} / \epsilon_0 m)^{1/2}$  - плазменная частота первого ЭП,  $\delta = \rho_{02} / \rho_{01}$ .

Рассмотрим замедляющую систему (ЗС), имеющую дисперсионную характеристику, подобную изображенной на рис.1 (кривая 3). Дисперсией такого типа обладают различные ЗС, в частности, гофрированный волновод, диафрагмированный волновод, цепочка связанных резонаторов [9]. Для простоты будем считать, что частоты  $\omega_{1,2}$  лежат вне полосы пропускания ЗС. Уравнение возбуждения обратной пространственной гармоники на частоте  $\omega_3$  (см., например, [10]), обобщенное на случай двух потоков, запишем в виде

$$\partial E / \partial x + (i \omega_3 / v_p) E = -(\omega_3^2 / v_p^2) C^3 (j_1^{\wedge} + j_2^{\wedge}). \quad (5)$$

Здесь  $j_{1,2}^{\wedge}$  - спектральные составляющие плотностей токов на частоте  $\omega_3$ ,  $C^3$  - параметр усиления Пирса [10] для первого ЭП. Фазовая скорость ЭМВ  $v_p$  и сопротивление связи  $K$ , входящее в  $C^3$ , также вычисляются на частоте  $\omega_3$ . Для простоты мы полагаем  $K$  одинаковым для обоих потоков.

Будем считать, что потоки находятся в синхронизме с прямыми гармониками ЗС (см. рис.1), поэтому абсолютная неустойчивость невозможна. Исследуем возможность выполнения резонансных условий (1), для чего используем хорошо известный графический метод (см., например, [2]). Выберем на ветви дисперсионной кривой, соответствующей обратной пространственной гармонике, какую-либо точку и перерисуем дисперсионную диаграмму, перенеся в эту точку начало координат. Тогда точки пересечения «старых» и «новых» (они показаны на рис.1 штриховой линией) кривых дадут значения резонансных частот и волновых векторов.

Из рис.1 видно, что ЭМВ находится в резонансе сразу с четырьмя парами волн. Эти процессы схематически можно изобразить следующим образом:

- ЭМВ → БВПЗ + БВПЗ;
- ЭМВ → МВПЗ + БВПЗ;
- ЭМВ → БВПЗ + МВПЗ;
- ЭМВ → МВПЗ + МВПЗ.

Мы ограничимся рассмотрением последнего из этих процессов, так как только он способен привести к взрывной неустойчивости, и следует ожидать, что по прошествии некоторого времени этот процесс будет доминировать [6].

Следует заметить, что все эти рассуждения справедливы практически для любой точки на ветви, соответствующей обратной гармонике. Это, во-первых, дает основания предполагать, что можно осуществить перестройку частоты генерации во всей полосе пропускания ЗС. Во-вторых, можно надеяться на то, что удастся осуществить генерацию не только одночастотных, но также многочастотных и хаотических сигналов, что является в настоящее время весьма актуальной задачей. Как известно, различие групповых скоростей взаимодействующих волн приводит к тому, что взрывная неустойчивость носит пороговый характер [11]: энергия начального возмущения должна превышать определенное значение. Другими словами, имеет место жесткое возбуждение колебаний. Таким образом, подавая на вход лампы возбуждающий ВЧ импульс, амплитуда которого превосходит пороговую, можно осуществить генерацию на несущей частоте. Подача многочастотного (спектр которого может быть самым различным) или шумового импульса может привести к возбуждению многочастотного или хаотического сигнала. Эти свойства делают рассматриваемый способ генерации весьма привлекательным.

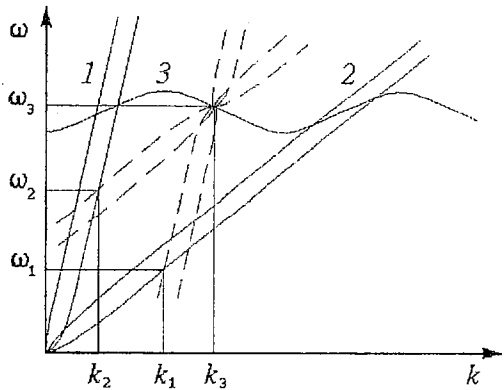


Рис. 1. К определению резонансных триад в системе «два полупрозрачных ЭП - обратная ЭМВ»: 1,2 - дисперсионные характеристики ВПЗ; 3 - дисперсионная характеристика ЭМВ в замедляющей системе

## 2. Уравнения трехволнового взаимодействия для системы «два попутных потока - обратная электромагнитная волна»

Получим уравнения трехволнового взаимодействия, описывающие динамику медленно меняющихся амплитуд взаимодействующих волн. Для решения этой задачи используем метод многомасштабных разложений [3]. Введем вектор неизвестных величин

$$\mathbf{U} = [v_1, v_2, \rho_1, \rho_2, \varphi, E]^T,$$

где  $T$  - знак транспонирования, и представим его в виде ряда по степеням малого параметра  $\epsilon$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \epsilon \mathbf{U}_1 + \epsilon^2 \mathbf{U}_2 + \dots,$$

причем  $\mathbf{U}_0 = (1, \mu, 1, \delta, 0, 0)^T$ , где  $\mu = v_{02}/v_{01}$ . Без ограничения общности можно считать  $\mu > 1$ . Вектор  $\mathbf{U}_1$  будем искать в виде

$$\mathbf{U}_1 = \sum_{j=1}^3 \mathbf{u}_j A_j(X, T) \exp i \theta_j + \text{к.с.},$$

где  $\theta_j = \omega_j t - k_j x$ , причем  $\omega_j$  и  $k_j$  удовлетворяют резонансным условиям (1), а  $X$  и  $T$  -

«растянутые» координата и время. При этом производные  $\partial/\partial x$  и  $\partial/\partial t$  преобразуются следующим образом (см. [3]):

$$\partial/\partial x \rightarrow \partial/\partial x + \varepsilon \partial/\partial X, \quad \partial/\partial t \rightarrow \partial/\partial t + \varepsilon \partial/\partial T.$$

Тогда, выделяя из уравнений (2) - (5) члены порядка  $\varepsilon$ , находим:

$$\mathbf{u}_j = [-k_j/(\omega_j - k_j), -k_j/(\omega_j - \mu k_j), -k_j^2/(\omega_j - k_j)^2, -\delta k_j^2/(\omega_j - \mu k_j)^2, 1, 0]^T,$$

для  $j=1,2$ , причем  $\omega_j$  и  $k_j$  связаны дисперсионным соотношением (ДС) системы «два попутных электронных потока», которое запишем в виде  $F_j=0$ , где введены обозначения:  $F_j=(\omega_j - k_j)^2(\omega_j - \mu k_j)^2 - \Gamma_j G_j$ ,  $G_j=(\omega_j - \mu k_j)^2 + \delta(\omega_j - k_j)^2$ ,  $\Gamma_j=k_j^2/(k_j^2+k_{\perp}^2)$ . Для  $\mathbf{u}_3$  получим

$$\mathbf{u}_3 = [ik_3 H_3/(\omega_3 - k_3), ik_3 H_3/(\omega_3 - \mu k_3), ik_3^2 H_3/(\omega_3 - k_3)^2, \\ i\delta k_3^2 H_3/(\omega_3 - \mu k_3)^2, i\Gamma_3 G_3/(k_3 H_3), 1]^T,$$

где  $H_j = (\omega_j - k_j)^2(\omega_j - \mu k_j)^2/k_j F_j$ , а  $\omega_3$  и  $k_3$  связаны ДС системы «два попутных ЭП - обратная ЭМВ»

$$[\omega_3 - v_p k_3] F_3 = -\omega_3^3 C^3 G_3/v_p^2. \quad (6)$$

Выделяя из уравнений (2)-(5) члены порядка  $\varepsilon^2$  и требуя уничтожения секулярностей (то есть, членов, пропорциональных  $\exp(i\theta_j)$ ), после не представляющих принципиальной сложности, но достаточно трудоемких вычислений, получаем

$$\partial A_{1,2}/\partial T + v_g^{(1,2)} \partial A_{1,2}/\partial X = \sigma_{1,2} A_3 A_{2,1}^*, \quad (7)$$

$$\partial A_3/\partial T - v_g^{(3)} \partial A_3/\partial X = \sigma_3 A_1 A_2, \quad (8)$$

где  $v_g^{(3)}$  - «холодная» групповая скорость ЭМВ на частоте  $\omega_3$  (знак «-» перед ней отражает тот факт, что возбуждаемая волна является обратной пространственной гармоникой),

$$v_g^{(j)} = \omega_j/k_j - (\omega_j - \mu k_j)^3(\omega_j - k_j)^3/\{k_j[(\omega_j - \mu k_j)^3 + \delta(\omega_j - k_j)^3]\}, \quad (9)$$

$$\sigma_j = -(\omega_j - \mu k_j)^3(\omega_j - k_j)^3 H_j/\{2k_j^2[(\omega_j - \mu k_j)^3 + \delta(\omega_j - k_j)^3]\}[\Pi_1 \Sigma_1 + \delta \Pi_2 \Sigma_2], \quad (10)$$

$$\sigma_3 = \omega_3^3 C^3/(k_3 v_p F_3) (\omega_3 - \mu k_3)^2 (\omega_3 - k_3)^2 [\Pi_1 \Sigma_1 + \delta \Pi_2 \Sigma_2], \quad (11)$$

$$\Pi_1 = \prod_{i=1}^3 k_i/(\omega_i - k_i), \quad \Pi_2 = \prod_{i=1}^3 k_i/(\omega_i - \mu k_i),$$

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^3 k_i/(\omega_i - k_i), \quad \Sigma_2 = \sum_{i=1}^3 k_i/(\omega_i - \mu k_i).$$

В соотношениях (9), (10)  $j=1,2$ . При выделении членов порядка  $\varepsilon^2$  из уравнения возбуждения (5) была сделана формальная замена

$$i\omega_3/v_p \rightarrow i\omega_3/v_p - \varepsilon/v_g^{(3)} \partial/\partial T.$$

Нетрудно заметить, что если считать при этом  $\omega_3=v_p k_3$ , то из (5) получилось бы обычное нестационарное уравнение возбуждения для узкополосных сигналов (см., например, [12]). Кроме того, при выводе уравнения (8) полагалось, что точка  $(\omega_3, k_3)$  на дисперсионной диаграмме лежит далеко от точек синхронизма между ЭМВ и волнами пространственного заряда (см. рис.1), и в левой части можно пренебречь членами, содержащими  $C^3$ , в силу их малости (то есть, групповая скорость волны с частотой  $\omega_3$  близка к «холодной» групповой скорости ЭМВ).

Выражения (9) - (11) для коэффициентов в уравнениях трехволнового взаимодействия слишком сложны для анализа. Поэтому предположим, что точки  $(\omega_1, k_1)$  и  $(\omega_2, k_2)$  на дисперсионной диаграмме расположены вдалеке от точки синхронизма между медленной ВПЗ в быстром потоке и быстрой - в медленном, так что вместо ДС (5) можно приближенно воспользоваться соотношениями для ВПЗ в невзаимодействующих потоках

$$(\omega_1 - k_1)^2 \approx \Gamma_1, \quad (\omega_2 - k_2)^2 \approx \delta \Gamma_2, \quad (12)$$

а в (11) положим  $\omega_3 \approx v_p k_3$ . Будем считать, что  $(\mu-1) > 1$  (скорости потоков отличаются значительно),  $\delta \sim 1$  (плотности зарядов близки),  $\omega_j, k_j \gg 1$  (частоты велики по сравнению с плазменными). Тогда можно записать следующие приближенные соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_1 - \mu k_1 &\approx -(\mu-1)k_1, & \omega_2 - k_2 &\approx (\mu-1)k_2, \\ \omega_3 - k_3 &\approx (\mu-1)k_2, & \omega_3 - \mu k_3 &\approx -(\mu-1)k_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь соотношения (9) принимают вид

$$v_g^{(1)} \approx 1 \pm k_1^2 / (k_1^2 + k_2^2)^{3/2}, \quad (14a)$$

$$v_g^{(2)} \approx \mu \pm \delta^{1/2} k_1^2 / (k_2^2 + k_1^2)^{3/2}, \quad (14b)$$

здесь и далее верхние знаки соответствуют быстрым ВПЗ, нижние - медленным. Нетрудно убедиться, что  $v_g^{(j)} = d\omega_j / dk_j$ , если считать, что  $\omega_j$  и  $k_j$  связаны ДС (12).

С учетом соотношений (13) находим, что

$$G_3 \approx (\mu-1)^2 (k_1^2 + \delta k_2^2), \quad F_3 \approx (\mu-1)^4 k_1^2 k_2^2, \quad H_3 \approx 1/k_3,$$

$$\Pi_1 \approx \pm k_1 k_3 / [(\mu-1)^4 k_2 \Gamma_1^{1/2}], \quad \Pi_2 \approx \pm k_2 k_3 / [(\mu-1)^4 k_1 (\delta \Gamma_2)^{1/2}],$$

$$\Sigma_1 \approx \pm k_1 \Gamma_1^{-1/2}, \quad \Sigma_2 \approx \pm k_2 (\delta \Gamma_2)^{-1/2}.$$

Перейдем от  $A_3$  к новой переменной  $A'_3 = A_3 / k_3$ . Тогда выражения для коэффициентов  $\sigma$  (10), (11) принимают вид

$$\sigma_1 \approx \mp \{ \Gamma_1^{1/2} k_3 / [2(\mu-1)^2 k_1] \} [k_1 / k_2 + k_2^2 \Gamma_1 / (k_1^2 \Gamma_2)], \quad (15a)$$

$$\sigma_2 \approx \mp \{ (\delta \Gamma_1)^{1/2} k_1 k_3 \Gamma_2 / [2(\mu-1)^2 k_2^2 \Gamma_1] \} [k_1 / k_2 + k_2^2 \Gamma_1 / (k_1^2 \Gamma_2)], \quad (15b)$$

$$\sigma_3 \approx \omega_3^2 k_1 C^3 / [(\mu-1)^2 \Gamma_1] [k_1 / k_2 + k_2 \Gamma_1^2 / (k_1^2 \Gamma_2)]. \quad (15v)$$

Отсюда видно, что взрывная неустойчивость реализуется при взаимодействии ЭМВ с двумя медленными ВПЗ (все коэффициенты  $\sigma_j$  имеют одинаковые знаки [2]). Заметим также, что если считать все  $k_j$  величинами одного порядка, а  $\omega_3^2 k_1 C^3 \sim 1$ , то все  $\sigma_j \sim 1$ .

Уравнение (8), очевидно, теряет справедливость при приближении к границе полосы пропускания, где  $v_g^{(3)} \rightarrow 0$ ,  $K \rightarrow \infty$ . В этом случае его необходимо модифицировать следующим образом:

$$\partial A_3 / \partial T - (i\omega''_3 / 2) \partial^2 A_3 / \partial X^2 = \sigma'_3 A_1 A_2,$$

где  $\omega''_3 = d^2 \omega / dk^2$ , вычисляемое из «холодного» ДС замедляющей системы в точке  $k=k_0$ , соответствующей границе полосы, а  $\sigma'_3$  определяется из соотношения (15v) заменой в параметре усиления  $C^3$  сопротивления связи  $K$  на величину [13]

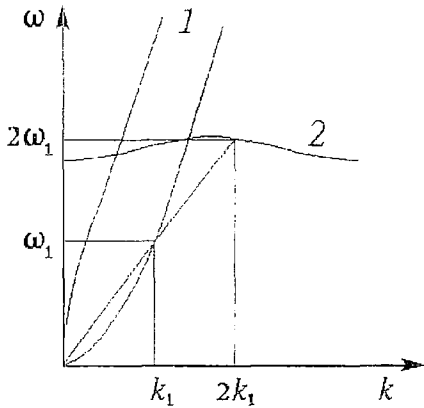


Рис. 2. Дисперсионные характеристики ВПЗ (1) и ЭМВ (2), при которых возможно вырожденное взаимодействие со второй гармоникой

где  $v_g^{(1)}$  определяется формулой (14а), а  $\sigma_{1,3}$  - формулами

$$\sigma_1 = \mp (4k_1^2 + k_{\perp}^2)(k_1^2 + k_{\perp}^2)^{1/2}/(4k_1^2),$$

$$\sigma_3 = 4\omega_3^2 C^3 (4k_1^2 + k_{\perp}^2)(k_1^2 + k_{\perp}^2)^2/k_1^2.$$

Однако в этом случае реализация многочастотных и стохастических режимов, о которой говорилось выше, невозможна. Другим недостатком является то, что электронный поток может попасть в синхронизм с ЭМВ вблизи границы полосы пропускания, где возможна абсолютная неустойчивость [13].

### 3. Взрывная неустойчивость в системе со встречными потоками

Рассмотрим систему со встречными электронными потоками. В этом случае нет необходимости в использовании ЗС, так что можно ограничиться взаимодействием с ЭМВ в гладком волноводе (рис. 3). Для простоты будем полагать, что возбуждается только одна  $TM_{0m}$ -мода, а электронные потоки являются достаточно тонкими и локализованы вблизи поверхностей, имеющих поперечные координаты  $r_{\perp n}$ , где  $n=1,2$  - номер ЭП, так что  $\rho_n(x, r_{\perp}) = \rho_n(x) \delta(r_{\perp} - r_{\perp n})$ . Тогда вместо уравнений (2) следует записать

$$\partial v_n / \partial t + v_n \partial v_n / \partial x = [\partial \phi / \partial x - E] \Psi_n,$$

где  $\Psi_n = \Psi(r_{\perp n})$ ,  $\Psi(r_{\perp})$  - соответствующая мембранная функция, являющаяся решением уравнения  $\nabla_{\perp}^2 \Psi + k_{\perp}^2 \Psi = 0$ . Уравнения непрерывности (3), очевидно, останутся неизменными, а вместо уравнения Пуассона (4) будем иметь (для более наглядного сравнения с результатами раздела 2 мы используем калибровку Кулона, разделяющую потенциальную и вихревую части электромагнитного поля)

$$\partial^2 \phi / \partial x^2 - k_{\perp}^2 \phi = \alpha_1 [\rho_1 - 1] + \alpha_2 [\rho_2 - \delta],$$

где

$$\alpha_n = S_n \Psi_n / \int \Psi(r_{\perp}) \Psi^*(r_{\perp}) dr_{\perp},$$

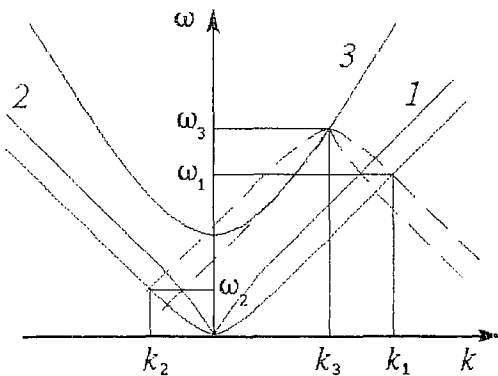


Рис. 3. Определение резонансных триад в системе со встречными потоками: 1, 2 - дисперсионные характеристики ВПЗ; 3 - дисперсионная характеристика волноводной моды

$$R = \lim_{k \rightarrow k_0} \{K[\omega(k)](k - k_0)/k_0\}.$$

Взрывную неустойчивость можно реализовать и при взаимодействии ЭМВ с одним потоком (рис. 2), если использовать вырожденный трехволновой резонанс (взаимодействие со второй гармоникой):

$$\omega_3 = 2\omega_1, \quad k_3 = 2k_1.$$

Полагая в выражениях (7)-(11),  $\mu=1$ ,  $\delta=0$ , находим

$$\partial A_1 / \partial T + v_g^{(1)} \partial A_1 / \partial X = \sigma_1 A_3 A^*_{-1},$$

$$\partial A_3 / \partial T - v_g^{(3)} \partial A_3 / \partial X = \sigma_3 A_1^2,$$

а  $S_n$  - площадь поперечного сечения  $n$ -ного потока. Кроме этого следует записать уравнение для продольной компоненты вихревой части поля  $E$ , которое в данных обозначениях имеет вид

$$\partial^2 E / \partial t^2 - c^2 \partial^2 E / \partial x^2 + k_{\perp}^2 c^2 E = \partial^3 \varphi / \partial t^2 \partial x + \alpha_1 \partial j_1 / \partial t + \alpha_2 \partial j_2 / \partial t,$$

где  $c$  - скорость света.

Поскольку процедура получения трехволновых уравнений полностью аналогична описанной в разделе 2, приведем лишь наиболее важные промежуточные результаты. Решая линеаризованную задачу, находим, что

$$\mathbf{u}_j = [ik_j H_j \Psi_1 / (\omega_j - k_j), ik_j H_j \Psi_2 / (\omega_j + \mu k_j), ik_j^2 H_j \Psi_1 / (\omega_j - k_j)^2, \\ i \delta k_j^2 H_j \Psi_2 / (\omega_j + \mu k_j)^2, 1, ik_j F_j / (\Gamma_j G_j)] T,$$

где сохранены обозначения предыдущего раздела, с той лишь разницей, что

$$G_j = \beta_1 (\omega_j + \mu k_j)^2 + \delta \beta_2 (\omega_j - k_j)^2,$$

где  $\beta_n = \alpha_n \Psi_n$ , и изменяется знак при коэффициенте  $\mu$ , так как потоки - встречные. При этом  $\omega_j$  и  $k_j$  связаны ДС

$$\Omega_j^2 F_j = \omega_j^2 k_{\perp}^2 G_j / (k_j^2 + k_{\perp}^2), \quad (16)$$

где  $\Omega_j^2 = \omega_j^2 - (k_j^2 + k_{\perp}^2) c^2$ . Предполагаем, что выполняются неравенства  $2\beta_n / k_{\perp}^2 < 1$ , так что абсолютная неустойчивость, вызванная взаимодействием встречных электронных потоков, невозможна (см. [14]). Диапазон перестройки частоты в данном случае будет определяться, очевидно, возможностью подавления других волноводных мод. Мы не будем здесь исследовать этот достаточно сложный самостоятельный вопрос, поскольку для этого необходимо задаться конкретными конфигурациями волновода и потоков.

Требование уничтожения секулярных членов в порядке  $\varepsilon^2$  приводит к уравнениям трехволнового взаимодействия (7), (8). Полагая, аналогично предыдущему случаю, что вместо ДС (16) можно приближенно использовать соотношения

$$(\omega_1 - k_1)^2 \approx \beta_1 \Gamma_1, \quad (\omega_2 + \mu k_2)^2 \approx \delta \beta_2 \Gamma_2, \quad (17)$$

$$\omega_3^2 \approx (k_3^2 + k_{\perp}^2) c^2, \quad (18)$$

и переходя по аналогии с разделом 2 к новой переменной  $A'_3 = iF_3 A_3 / \Gamma_3 G_3$ , получаем следующие упрощенные выражения для коэффициентов:

$$v_g^{(1)} \approx 1 \pm \beta_1^{1/2} k_{\perp}^2 / (k_1^2 + k_{\perp}^2)^{3/2}, \quad (19a)$$

$$v_g^{(2)} \approx -\mu \pm (\delta \beta_2)^{1/2} k_{\perp}^2 / (k_2^2 + k_{\perp}^2)^{3/2}, \quad (19б)$$

$$v_g^{(3)} \approx k_3 c^2 / \omega_3. \quad (19в)$$

$$\sigma_1 \approx \mp \{ (\beta_1 \Gamma_1)^{1/2} k_3 / [2(\mu+1)^2 k_1] \} [k_1 / k_2 + k_2^2 \Gamma_1 / (k_1^2 \Gamma_2)], \quad (20a)$$

$$\sigma_2 \approx \mp \{ (\delta \beta_1 \Gamma_1)^{1/2} k_1 k_3 \Gamma_2 / [2(\mu+1)^2 k_2^2 \Gamma_1] \} [k_1 / k_2 + k_2^2 \Gamma_1 / (k_1^2 \Gamma_2)], \quad (20б)$$

$$\sigma_3 \approx \omega_3^2 k_1 k_{\perp}^2 \Gamma_3 / [2(\mu+1)^2 k_3^2 \Gamma_1] [k_1 / k_2 + k_2^2 \Gamma_1 / (k_1^2 \Gamma_2)]. \quad (20в)$$

Как и в предыдущем случае  $v_g^{(j)} = d\omega_j / dk_j$ , если считать, что  $\omega_j$  и  $k_j$  связаны ДС (17), (18). Мы полагаем, что ЭМВ распространяется в одном направлении с первым потоком (очевидно, что это предположение не является принципиальным и не ограничивает общность полученных результатов).

Соотношение (18) можно переписать в виде  $\omega_3 \approx k_3 v_p$ , где  $v_p = c(k_3^2 + k_{\perp}^2)^{1/2}/k_3$ . Теперь дисперсионное соотношение (16) для  $j=3$  примет вид

$$(\omega_3 - v_p k_3) F_3 = \omega_3^2 k_{\perp}^2 G_3 / 2k_3 v_p (k_3^2 + k_{\perp}^2). \quad (21)$$

Если ввести параметр усиления по формуле  $C^3 = k_{\perp}^2 G_3 / 2\omega_3 k_3^3$ , то нетрудно заметить, что выражения (15) и (20) будут полностью тождественны, а (6) и (21) тождественны за исключением знака правой части. Это отражает тот факт, что в одном случае резонанс осуществляется с обратной пространственной гармоникой, а в другом - с прямой. Напомним, что дисперсионные уравнения ЛБВ и ЛОВ отличаются именно знаком правой части [10].

#### 4. Численное исследование трехволновых уравнений

Уравнения трехволнового взаимодействия (7), (8) представляют собой одну из эталонных систем теории нелинейных волн, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния, и в принципе могут быть решены аналитически [2,15]. Однако полная интегрируемость этой системы показана лишь для задачи с нулевыми граничными условиями на бесконечности. В нашем случае принципиальную роль играет ограниченность системы, причем, в силу основных особенностей взаимодействия, граничные условия для различных волн должны ставиться на разных границах. Поэтому необходимо прибегнуть к численному решению трехволновых уравнений.

Введем новые безразмерные переменные

$$\xi = X/L, \quad \tau = T/L, \quad A'_j = A_j L / (\sigma_k \sigma_n)^{1/2},$$

где  $L$  - длина пространства взаимодействия,  $j \neq n \neq k$ , и разделим в уравнениях (7), (8) вещественную и мнимую части, полагая  $A'_j = a_j \exp(i\psi_j)$ ,  $a_j$  и  $\psi_j$  вещественны. Тогда получаем

$$\partial a_{1,2} / \partial \tau + v_g^{(1,2)} \partial a_{1,2} / \partial \xi = a_3 a_{2,1}^* \cos \psi_0, \quad (22a)$$

$$\partial a_3 / \partial \tau + v_g^{(3)} \partial a_3 / \partial \xi = a_1 a_2 \cos \psi_0, \quad (22b)$$

$$\partial \psi_{1,2} / \partial \tau + v_g^{(1,2)} \partial \psi_{1,2} / \partial \xi = a_3 a_{2,1}^* \sin \psi_0 / a_{1,2}, \quad (22в)$$

$$\partial \psi_3 / \partial \tau + v_g^{(3)} \partial \psi_3 / \partial \xi = a_1 a_2 \sin \psi_0 / a_3, \quad (22г)$$

где  $\psi_0 = \psi_3 - \psi_1 - \psi_2$ . Все уравнения в этой системе записаны со знаком «+» перед членами, содержащими  $v_g^{(j)}$ , чтобы она была одновременно пригодна как для попутных, так и для встречных потоков. Направление распространения волн будет учитываться знаком соответствующей групповой скорости.

Рассмотрим вначале систему «два попутных ЭП - обратная ЭМВ». Очевидно, что групповые скорости ВПЗ должны быть близки к скоростям соответствующих потоков:  $v_g^{(1)} \approx 1$ ,  $v_g^{(2)} \approx \mu$ . Исходя из предположений, сделанных в разделе 1, выберем  $\mu=2$ , а также положим  $v_g^{(3)} = -1$ .

Исследуем возбуждение колебаний при подаче на вход ЗС (в точке  $\xi=1$ ) импульса электромагнитного поля. Тогда систему (29) следует дополнить начальными и граничными условиями

$$a_3(\tau=0, \xi) = a_0, \quad a_{1,2}(\tau=0, \xi) \ll a_0, \quad (23)$$

$$a_3(\tau, \xi=1) = a_0, \quad a_{1,2}(\tau, \xi=0) = 0, \quad (24a)$$

$$\psi_j(\tau=0, \xi) = 0. \quad (24б)$$



Типичные результаты численного моделирования, иллюстрирующие динамику амплитуд при развитии взрыва, представлены на рис. 4.

Следует, однако, заметить, что начальные фазы волн выбраны такими, что  $\psi_0(\tau=0)=0$ . Используя пространственно-однородный вариант уравнений (22), нетрудно показать, что это значение является оптимальным для развития неустойчивости. Как изменится поведение системы при произвольном выборе  $\psi_j$ ? Результаты моделирования показывают, что время взрыва  $\tau^*$  определяется начальным значением  $\psi_0$ . Довольно быстро наступает синхронизация фаз (рис. 5), то есть  $\psi_0 \rightarrow 2\pi n$ ,  $n=0,1,2,\dots$ , в зависимости от того, каковы были начальные фазы каждой из волн. По сути дела,  $\tau^*$  определяется тем временем, которое требуется системе для синхронизации фаз. На рис. 6 приведена зависимость  $\tau^*$  от  $\psi_0$ . Видно, что  $\tau^*$  резко увеличивается при наихудшем для синхронизации условии  $\psi_0=\pi$ .

Зависимость времени взрыва от амплитуды начального возмущения при начальных условиях (23) и граничных условиях (24) приведена на рис. 7 (кривая 1). Значение  $\tau^*$  при данном  $a_0$ , очевидно, дает оценку минимальной длительности импульса, которая необходима для возбуждения. Видно, что существует пороговое значение  $a_0$ , при котором  $\tau^* \rightarrow \infty$ . Если расстройка скоростей потоков увеличивается, то увеличивается и пороговая амплитуда (кривая 3).

При обсуждении резонансных условий в разделе 1 отмечено, что ЭМВ участвует сразу в четырех процессах взаимодействия, то есть имеет место так называемый мультитриадный резонанс [16]. Можно с уверенностью сказать, что вдалеке от порога неустойчивости процессы, не приводящие к взрыву, не будут оказывать существенного влияния. Однако, вблизи порога их необходимо учитывать. Анализируя пространственно-однородный вариант трехволновых уравнений, можно показать, что при начальных условиях (23) процессы, в которых ЭМВ распадается на быструю и медленную волны, не будут иметь место (этот вывод подтверждается и результатами численного моделирования). Поэтому необходимо учитывать только процесс вида

$$\text{ЭМВ} \rightarrow \text{БВПЗ} + \text{БВПЗ}.$$

В этом случае к уравнениям (22) добавятся еще два для амплитуд и фаз быстрых ВПЗ

$$\begin{aligned} \partial a_{4,5}/\partial \tau + v_g^{(4,5)} \partial a_{4,5}/\partial \xi &= -a_3 a_{5,4}^* \cos \phi_0, \\ \partial \psi_{4,5}/\partial \tau + v_g^{(4,5)} \partial \psi_{4,5}/\partial \xi &= -a_3 a_{5,4}^* \sin \phi_0 / a_{4,5}, \end{aligned}$$

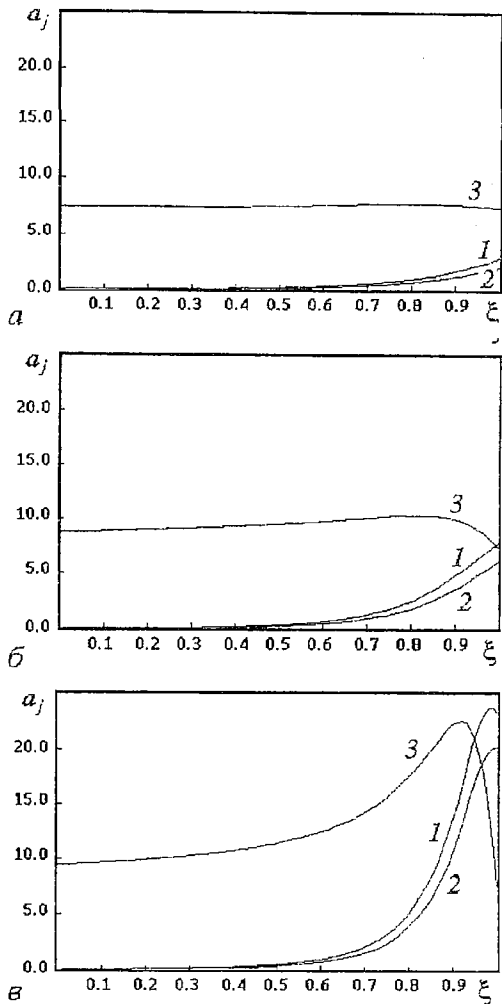


Рис. 4. Динамика амплитуд волн при развитии взрыва в системе с попутными ЭП при  $a_0=7.5$ ,  $v_g^{(1)}=1.0$ ,  $v_g^{(2)}=2.0$ ,  $v_g^{(3)}=-1.0$ ,  $\tau=1.0$  (а), 3.5 (б), 3.88 (в): 1 -  $a_1$ ; 2 -  $a_2$ ; 3 -  $a_3$

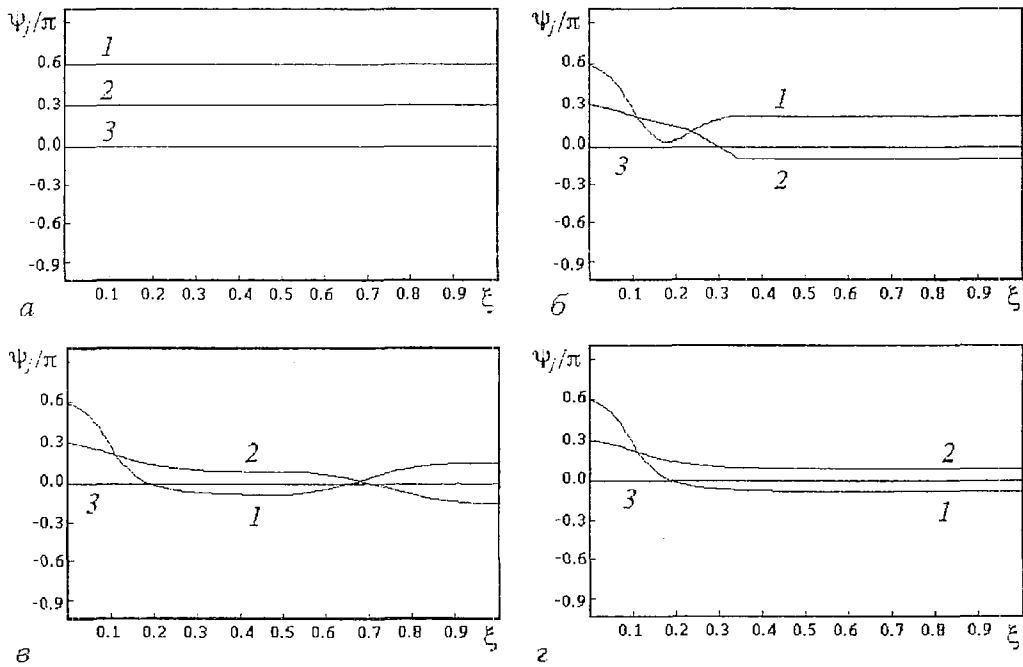


Рис. 5. Синхронизация фаз при взрывной неустойчивости ( $a_0$  и  $v_g^{(j)}$ ) - те же, что и на рис.4,  $\tau=0.00$  (а); 0.17 (б); 0.47 (в); 0.90 (г): 1 -  $\psi_1$ ; 2 -  $\psi_2$ ; 3 -  $\psi_3$

где  $\phi_0 = \psi_3 - \psi_4 - \psi_5$ , а уравнения (22б) и (22г) примут вид

$$\partial a_3 / \partial \tau + v_g^{(3)} \partial a_3 / \partial \xi = a_1 a_2 \cos \psi_0 + a_4 a_5 \cos \phi_0,$$

$$\partial \psi_3 / \partial \tau + v_g^{(3)} \partial \psi_3 / \partial \xi = (a_1 a_2 \sin \psi_0 + a_4 a_5 \sin \phi_0) / a_3.$$

Групповые скорости  $v_g^{(4,5)}$  примем равными  $v_g^{(1,2)}$ , так как они близки к соответствующим скоростям потоков.

Вопрос о выборе начальных фаз остается открытым. Поэтому ограничимся исследованием случая  $\psi_0(\tau=0)=0$ ,  $\phi_0(\tau=0)=\pi$ , что является оптимальным условием как для взрывной, так и для распадной неустойчивости. Зависимость  $\tau^*$  от  $a_0$  для

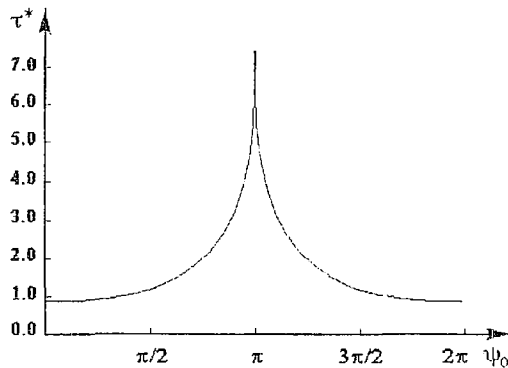


Рис. 6. Зависимость времени взрыва от  $\psi_0(T=0)$  ( $a_0$  и  $v_g^{(j)}$ ) - те же, что и на рис.4)

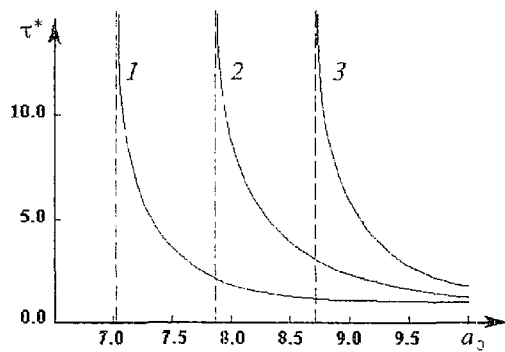


Рис. 7. Зависимость времени взрыва от амплитуды начального возмущения в системе с попутными ЭП: 1 -  $v_g^{(1)}=1.0$ ,  $v_g^{(2)}=2.0$ ,  $v_g^{(3)}=-1.0$ ; 2 -  $v_g^{(j)}$  - те же и учитывается влияние распадной неустойчивости; 3 -  $v_g^{(1,3)}$  - те же,  $v_g^{(2)}=3.0$

этого случая приведена на рис. 7 (кривая 2). Видно, что пороговое значение амплитуды несколько увеличивается, но подавления неустойчивости не происходит.

Исследование взрывной неустойчивости в системе со встречными потоками приводит к аналогичным результатам. Для простоты ограничимся случаем идентичных потоков, выбирая  $v_g^{(1)}=1$ ,  $v_g^{(2)}=-1$ . Поскольку ЭМВ является незамедленной ТМ-волной в гладком волноводе, то  $v_g^{(3)}$  должна быть порядка  $c$  (в общем случае, когда  $\omega_3$  не близка к частоте отсечки). В соответствии с результатами раздела 3, выберем  $v_g^{(3)}=3$ , чтобы в первом приближении можно было пренебречь релятивистскими эффектами. Вместо граничных условий (24а) необходимо выбрать следующие:

$$a_3(\tau, \xi=0) = a_0, \quad a_1(\tau, \xi=0) = 0,$$

$$a_2(\tau, \xi=1) = 0.$$

На рис. 8 показана динамика амплитуд взаимодействующих волн при развитии взрыва. Отметим, что порог неустойчивости в данном случае оказывается несколько ниже, что объясняется, очевидно, более благоприятным пространственным распределением амплитуд.

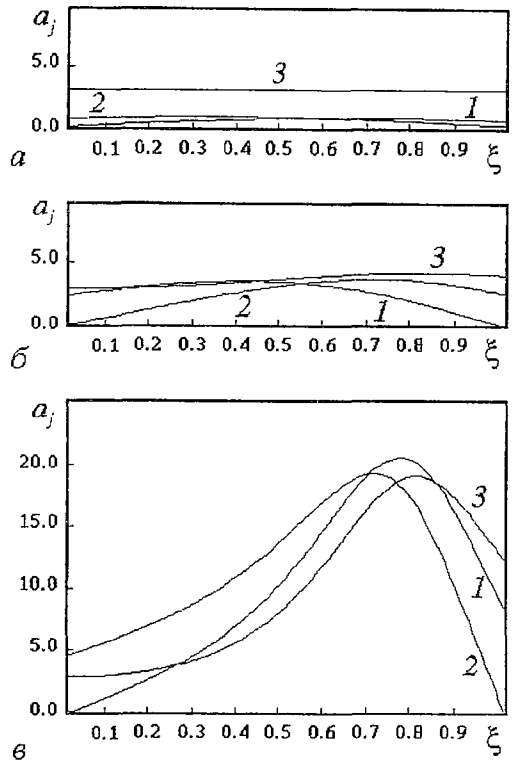


Рис. 8. Динамика амплитуд волн при развитии взрыва в системе со встречными ЭП при  $a_0=3.0$ ,  $v_g^{(1)}=1.0$ ,  $v_g^{(2)}=-1.0$ ,  $v_g^{(3)}=3.0$ ,  $\tau=3.00$  (а); 3.75 (б); 4.05 (в): 1 -  $a_1$ ; 2 -  $a_2$ ; 3 -  $a_3$

## Заключение

В настоящей работе показана принципиальная возможность осуществления взрывной неустойчивости при взаимодействии двух электронных потоков с электромагнитной волной. Рассмотрены конфигурации с попутными и встречными потоками, и получены уравнения трехволнового взаимодействия, описывающие динамику медленно меняющихся амплитуд. Численное решение трехволновых уравнений с соответствующими граничными условиями показало, что из-за различия групповых скоростей взаимодействующих волн взрывная неустойчивость носит пороговый характер, то есть имеет место жесткое возбуждение колебаний. Проведенные исследования позволили выявить особенности физических процессов при развитии неустойчивости и определить влияние различных факторов на пусковые условия генерации.

Численное моделирование на основе трехволновых уравнений позволяет ответить на ряд важных вопросов: оценить порог неустойчивости, время взрыва, исследовать влияние распадной неустойчивости. Вместе с тем, необходимо заметить, что оно носит скорее качественный характер. По сути дела это моделирование позволяет исследовать лишь пусковой режим генератора, что аналогично построению линейной теории традиционных приборов (несмотря на то, что уравнения являются нелинейными, поскольку взрывная неустойчивость - принципиально нелинейный процесс). При помощи высших приближений метода

многомасштабных разложений можно ввести в трехволновые уравнения члены, отвечающие за насыщение, например, высшие нелинейности. Однако, в данном случае очевидно, что механизмом, приводящим к насыщению, как и в приборах О-типа, будет обгон, приводящий к разгрузировке сгустков. Подобный режим принципиально невозможно описать при помощи волновых уравнений. Исследовать его можно лишь при помощи традиционных для вакуумной электроники СВЧ методов крупных частиц.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-02-16753) и Программы Госкомвуза РФ по фундаментальным исследованиям в области электроники и радиотехники.*

### **Библиографический список**

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
3. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
4. Буц В.А., Измайлов А.Н. Взрывная неустойчивость в системах с электронным пучком // ЖТФ. 1976. Т.46, вып. 11. С. 2451.
5. Буц В.А., Измайлов А.Н. Генерирование ВЧ-колебаний на основе взрывной неустойчивости // ЖТФ. 1978. Т.48, вып. 7. С. 1366.
6. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.:Наука, 1990.
7. Liu C.S., Tripath V.K. Explosive instability in a backward wave oscillator // IEEE Trans. Plasma Sci. 1993. Vol. PS-21, № 1. P. 191.
8. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Взрывная неустойчивость при взаимодействии двухскоростного электронного потока с обратной электромагнитной волной // Письма в ЖТФ. 1995. Т.21, вып. 12. С. 26.
9. Григорьев А.Д. Электродинамика и техника СВЧ. М.: Высш. шк., 1990.
10. Шевчик В.Н., Трубецков Д.И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. М.: Сов. радио, 1970.
11. Рабинович М.И., Реутов В.П., Цветков А.А. О слиянии волновых импульсов и пучков при взрывной неустойчивости // ЖЭТФ. 1974. Т.67, № 2. С. 525.
12. Кузнецов С.П., Трубецков Д.И. Две лекции по нестационарной теории взаимодействия электронных пучков с электромагнитными волнами // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (4-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн.5. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. С. 88.
13. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П. О характере неустойчивости в ЛБВ вблизи границы полосы пропускания // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т.23, № 9. С. 1104.
14. Руткевич Б.Н., Руткевич П.Б. Развитие неустойчивости диспергирующих волн в двухпоточковой плазме // Физика плазмы. 1980. Т.6, № 3. С. 538.
15. Захаров В.Е., Манаков С.В. Теория резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1975. Т.69, № 5. С. 1654.
16. Ablowitz M.J., Haberman R. Resonantly coupled nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. 1975. Vol.16, № 11. P. 2301.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 10.04.96*

## EXPLOSIVE INSTABILITY IN SYSTEMS «TWO INTERACTING ELECTRON BEAMS - ELECTROMAGNETIC WAVE»

*N.M. Ryskin, D.I. Trubetskov*

Explosive instability in two electron beams - electromagnetic wave interaction is studied. Both cases of copropagating and contrapropagating beams are considered. The equations of three wave interaction are derived which describe the dynamics of slowly varying amplitudes. Numerical simulation of these equations with proper boundary conditions reveals the main features of the instability and shows the influence of different quantities on the starting conditions of oscillations.



*Трубцов Дмитрий Иванович* родился в Саратове в июне 1938 года. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1960). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в СГУ (1965) и доктора физико-математических наук в СГУ (1978) в области радиофизики. Заведующий кафедрой электроники и волновых процессов СГУ, профессор, член-корреспондент Российской Академии наук. Область научных интересов - радиофизика в той ее части, которая связана с взаимодействием свободных электронов с электромагнитными полями и с теорией сверхвысокочастотных электронных приборов; теория колебаний и волн; применение методов нелинейной динамики в различных областях науки; история науки.

Автор и соавтор одиннадцати монографий и учебных пособий по сверхвысокочастотной электронике, теории колебаний и волн и истории электронных ламп сверхвысоких частот, в том числе монографии «Аналитические методы расчета в электронике СВЧ» (М.: Сов. радио, 1970; совместно с В.И. Шевчиком), коллективной монографии «Электроника ламп с обратной волной» (Изд. Сарат. ун-та, 1975), учебного пособия «Введение в теорию колебаний и волн» (первое издание, М.: Наука, 1984; второе - М.: Наука, 1992; совместно с М.И. Рабиновичем), книги «Формирование радиоэлектроник» (М.: Наука, 1988, раздел «История электронных ламп сверхвысоких частот»). В 1989 году книга «Введение в теорию колебаний и волн» в Нидерландах переведена на английский язык и вышла под названием «Oscillations and waves in linear and nonlinear systems» (The Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1989). Опубликовал четыре книги лекций по электронике СВЧ и истории электронных ламп и много научных статей по указанным выше направлениям. Зам. главного редактора журнала «Прикладная нелинейная динамика». Член редколлегии журнала «Известия вузов. Радиофизика».



*Рыскин Никита Михайлович* - родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского университета (1991). Работает в НИИ механики и физики СГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «Радиофизика» в СГУ (1996). Область научных интересов - нелинейные волновые явления в распределенных системах, содержащих электронные потоки и электромагнитные поля.