Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД», т.4, № 4, 5, 1996 УДК 330.364:517.962.22

ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ УСИЛЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ИНФЛЯЦИИ

Л. А. Кручинин, П. С. Разенштейн, А. В. Сморгонский

Рассмотрена модель взаимодействия двух предприятий, связанных взаимными поставками, в условиях неизменности производственного процесса. Определены значимые параметры для данной модели и найдены их бифуркационные значения, определяющие момент возникновения тенденции к неограниченному росту цен на продукцию. Исследовано влияние бифуркационного перехода на некоторые экономические показатели работы предприятий.

Вопросы развития инфляции играют важную роль в понимании широкого круга процессов, которые происходят в настоящее время в экономике России. С целью изучить динамику цен, которые могут устанавливать на свою продукцию предприятия, стремящиеся достичь определенной рентабельности своих производств, не будучи при этом стесненными конкуренцией на рынке, ниже рассматривается схема взаимодействия двух предприятий, связанных условиями взаимных поставок.

1. Описание модели и решение системы балансовых уравнений

Два предприятия, называемые далее **А** и **В** (рис. 1), закупают для своего производства исходные материалы по ценам M_a, M_b за физическую единицу и в объемах u_a, u_b необходимых для обеспечения нормальной работы в течение определенного интервала времени (допустим, месяца или квартала). Все затраты на производство продукции (за исключением покупки исходных материалов) составляют у них за этот интервал в денежном выражении T_a и T_b. На свободный рынок они выставляют свою продукцию по ценам и в объемах P_a, P_b; w_a, w_b, соответственно. Кроме того, эти предприятия по условиям технологического функционирования связаны взаимными поставками продуктов друг для друга в объемах v_a, v_b и продают друг другу свою продукцию по ценам Q_a, Q_b. Будем предполагать, что технологическая схема неизменна, то есть все физические объемы $u_{a,b}$, $v_{a,b}$, $w_{a,b}$ как закупаемых материалов, так и поставляемых продуктов фиксированы. Меняться в модели могут только цены, затраты и связанные с ними величины денежных потоков.

Вводя понятие прибыли $Y_{a,b}$, как разности между полученными за определенный интервал времени доходами и произведенными затратами, можно записать уравнения баланса

$$\begin{cases} (P_a w_a + Q_a v_a) - (M_a u_a + T_a + Q_b v_b) = Y_a, \\ (P_b w_b + Q_b v_b) - (M_b u_b + T_b + Q_a v_a) = Y_b. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь содержимое первых скобок определяет доходы, содержимое вторых скобок - расходы, а $Y_{a,b}$ - прибыль соответствующего предприятия.

В уравнения баланса входят шесть величин (не являющихся свободными параметрами), которые могут меняться во времени: $P_{a,b}$, $Q_{a,b}$, $Y_{a,b}$. Для установления недостающих связей сделаем следующие предположения:

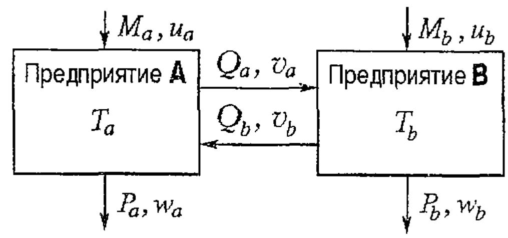


Рис. 1. Схема взаимодействия двух предприятий, связанных взаимными поставками

1. Каждое из предприятий стремится поддерживать рентабельность своего производства, записываемую как

$$R_{a,b} = Y_{a,b}/(M_{a,b}u_{a,b} + T_{a,b} + Q_{b,a}v_{b,a}) \qquad (2)$$

на определенном уровне. Для последующих расчетов удобно ввести величину

$$r_{a,b} = 1 + R_{a,b}, \qquad (3)$$

называемую в дальнейшем показателем рентабельности, который будет предполагаться равным определенной величине и постоянным.

2. Предприятия, несмотря на стабильные связи, рассматривают своего партнера всего лишь как одного из агентов свободного рынка, то есть продают ему свою продукцию по рыночным ценам $Q_{a,b} = P_{a,b}$.

Этих предположений достаточно, чтобы найти равновесные цены обмена, при которых выполняются уравнения баланса и достигается требуемая рентабельность производства $R_{a,b}$. Введем следующие обозначения:

$$x = P_a v_a/v_b,\ \ \mu_a = r_a v_a^2/[v_b(w_a + v_a)],\ \ c_a = (M_a u_a + T_a)/v_a,$$

$$k = (\mu_a\mu_b)^{1/2}, \qquad (4)$$

$$y = P_b v_b/v_a,\ \ \mu_b = r_b v_b^2/[v_a(w_b + v_b)],\ \ c_b = (M_b u_b + T_b)/v_b.$$

С учетом сделанных выше предположений и обозначений, уравнения (1) запишутся в виде

$$\begin{cases} x - y\mu_a = c_a\mu_a, \\ -x\mu_b + y = c_b\mu_b. \end{cases} \qquad (5)$$

Решения этой системы имеют вид

$$x = (c_a\mu_a + c_b k^2)/(1 - k^2), \qquad y = (c_b\mu_b + c_a k^2)/(1 - k^2). \qquad (6)$$

Следует обратить внимание на то, что введенные выше переменные x и y пропорциональны ценам, но отличаются от них коэффициентами, которые, в принципе, могут оказаться равными нулю ($v_a, v_b = 0$). Истинные цены при этом принимают вполне конкретные значения: $P_{a,b} = (M_{a,b}u_{a,b} + T_{a,b})r_{a,b}/w_{a,b}$.

Легко видеть, что при $k<1$ решения (6) действительно дают некоторые равновесные значения цен, при которых в указанной схеме достигается требуемая рентабельность предприятий.

Ситуация оказывается иной при $k \geq 1$. Равновесные цены при этом либо формально уходят в бесконечность, либо оказываются в области отрицательных значений. Хотя появление отрицательных цен в динамике в принципе возможно[1], однако назвать их равновесными (то есть обеспечивающими сколь угодно долгую работу всей системы) с экономической точки зрения нельзя.

Для более глубокого понимания полученных результатов рассмотрим систему в динамике.

---

[1] Формально понятие отрицательных цен может возникнуть в условиях взаимных поставок, когда одно предприятие не только поставляет свою продукцию другому, но еще и платит за ожидаемые встречные поставки, в то время как партнер такие поставки не осуществляет и полученные товары не оплачивает или делает это в незначительных объемах. Из общих соображений ясно, что такая ситуация может сохраняться только некоторое непродолжительное время.

2. Динамическое поведение системы

Для перехода к динамическим уравнениям предположим, что цены на свою продукцию в течение определенного срока (например, месяца) предприятия поддерживают постоянными. В то же время цены на закупаемые со стороны материалы M_a, M_b или внутренние затраты предприятий T_a, T_b могут измениться в течение данного интервала времени и, формируя свои цены на товары на следующий интервал, предприятия будут эти изменения учитывать с тем, чтобы восстановить требуемую рентабельность производства. Поскольку по предположению предприятия рассматривают друг друга как агентов свободного рынка (то есть договоров о взаимном согласовании цен не заключают), то об изменении цен поставок со стороны партнера, изменяющих рентабельность их производства, они узнают лишь при подведении баланса в конце интервала. Следовательно, меры по восстановлению своей рентабельности (то есть изменение цен на отпускаемую продукцию) они производят в течение следующего интервала (месяца). Спустя еще один интервал времени, это вызывает ответную реакцию партнера и т. д. В результате таких рассуждений приходим к следующей системе динамических уравнений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (c_a + y_n)\mu_a, \\ y_{n+1} = (c_b + x_n)\mu_b. \end{cases} \tag{7}$$

Подчеркнем еще раз, что величины $\mu_{a,b}$, определяющие технологию производства на предприятиях, считаются постоянными, а величины $c_{a,b}$, отражающие общие затраты на производство (исключая покупку исходных материалов у партнера) могут на каком-то временном интервале измениться.

Если считать начальные значения цен x_0, y_0 и параметров $c_{a,b}$ заданными, то решение системы (7) может быть найдено стандартными математическими методами (см. Приложение 1) и будет иметь вид

$$x_n = (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1 - k^2) + k^n[x_0k(k\text{-}1) + c_a\mu_ak + y_0\mu_a(k\text{-}1) + c_bk^2]/[2k(k\text{-}1)] +$$
$$+ (-k)^n[x_0k(k+1) - c_a\mu_ak - y_0\mu_a(k+1) + c_bk^2]/[2k(k+1)]. \tag{8}$$

Аналогичное решение для y_n может быть записано, исходя из соображений симметрии относительно индексов a и b.

Если дополнительно предположить, что в начальный момент времени (до скачка цен) предприятия находились в равновесном состоянии, то решение запишется в более простом виде

$$x_n = (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1 - k^2) - k^n \begin{cases} (\Delta c_a\mu_a + \Delta c_bk^2)/(1 - k^2), & n = 2m, \\ k(\Delta c_a\mu_a + \Delta c_b)/(1 - k^2), & n = 2m + 1, \end{cases} \tag{9}$$

где $c_{a,b}{}^0 = (M_{a,b}{}^0u_{a,b} + T_a{}^0)/v_{a,b}$ - значения величин $c_{a,b}$ в начальный момент времени, до скачка цен на сырье или изменения собственных затрат, а $\Delta c_{a,b}=c_{a,b}\text{-}\ c_{a,b}{}^0$ - приращение, полученное величинами $c_{a,b}$ в результате этого скачка. И в том, и в другом случае первое слагаемое полученного решения (8) или (9) является координатой найденного нами ранее состояния равновесия, к которому при $n\rightarrow\infty$ решение стремится при k<1, и от которого решение «убегает» при k>1. Кроме того, можно утверждать, что вне зависимости от выбора начальной точки (будь она даже в области отрицательных цен) при k<1 через некоторое время цены станут положительными, что не всегда выполняется при k>1. Поведение решения системы для различных значений k наглядно изображено на рис. 2.

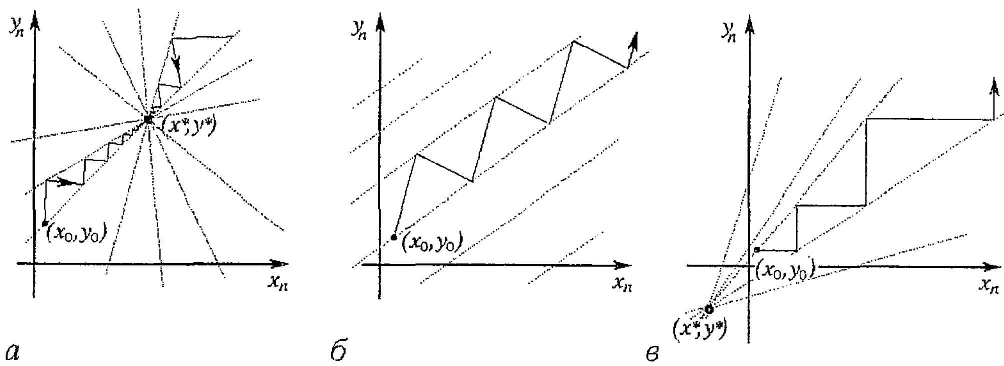


Рис. 2. Фазовая плоскость динамической системы, описываемой уравнениями (7) при: *а* - $0<k<1$; *б* - $k=1$; *в* - $k>1$

3. Интерпретация полученных результатов

Смысл полученного решения (9) может быть пояснен следующим образом. Предприятия в некоторый определенный момент имели затраты на уровне $c_{a,b}{}^0$ и отпускали продукцию по ценам

$$x_0 = (c_a{}^0\mu_a + c_b{}^0k^2)/(1 - k^2), \quad y_0 = (c_b{}^0\mu_b + c_a{}^0k^2)/(1 - k^2). \qquad (10)$$

В случае $k<1$ и при неизменных величинах $c_{a,b}{}^0$ предприятия могли работать в этом режиме сколь угодно долго, так как такое их взаимодействие удовлетворяет уравнениям баланса (5) при желательном для каждого из них показателе рентабельности $r_{a,b}$. Далее, в результате произошедшего увеличения цен исходных материалов или увеличения внутренних затрат на производство на величину $\Delta c_{a,b}$, предприятия, стремясь поддержать свою рентабельность на прежнем уровне, начинают менять цены на выходные продукты, беря в расчет цены на продукцию, покупаемую у партнера по данным предыдущего интервала времени. Поскольку каждое из них идет к своей цели независимо, то изменение цены продукции одним из них может быть учтено партнером лишь в следующий период, то есть к новому состоянию равновесия они приближаются шаг за шагом, как бы нащупывая его итерационным путем.

Рассматривая выражение для новых равновесных цен, легко убедиться, что их масштаб определяется не только величиной общих затрат $c_{a,b}$ и их изменениями $\Delta c_{a,b}$, но и сильно зависит от близости параметра k (который можно назвать «параметром связанности») к единице.

При $k<<1$ предприятия устанавливают цены пропорционально произведенным затратам и желаемой рентабельности производства. Скачок цен на исходные материалы или на внутренние затраты предприятия «отслеживают» в ценах на выходную продукцию с соответствующими коэффициентами: $\Delta x, \Delta y = (\Delta c_{a,b}\mu_{a,b} + \Delta c_{b,a}k^2)/(1 - k^2) \approx \Delta c_{a,b}\mu_{a,b}$. Если величины $c_{a,b}$ остаются далее постоянными, то предприятия, придя рано или поздно в состояние близкое к состоянию равновесия, перестают повышать цены на свою продукцию (см. рис. 2, *а*).

Иное положение складывается при k, достаточно близких к 1. Из тех же выражений для равновесных цен видно, что при k, стремящемся к 1, масштаб их неограниченно возрастает. Это значит, что при достаточно больших долях взаимообмена и выдвижении требования о достижении достаточно высокой рентабельности так, что параметр связанности приближается к 1, предприятия для достижения поставленной цели начинают неограниченно повышать цены на свою продукцию. При $k=1$ решение (9) не является корректным и должно быть заменено (см. Приложение 1) на следующее:

$$x_n = n(c_a\mu_a + c_b)/2 + \begin{cases} x_0, & n = 2m, \\ y_0\mu_a - (c_b - c_a\mu_a)/2, & n = 2m + 1. \end{cases} \qquad (11)$$

Из этого выражения видно, что никакое значение цен x_0, y_0 не является равновесным, и предприятия в погоне за «недостижимой» рентабельностью повышают цены на выходные продукты, даже если цены на исходные материалы и затраты на само производство не менялись. (Формально состояние равновесия при этом уходит в бесконечность, см. рис. 2, *б*). В результате, такие предприятия сами становятся источниками инфляции без всяких внешних толчков. Если при этом меняются еще и величины $c_{a,b}$, то меняется наклон прямых, на которые попадают точки решения уравнений (11) на рис. 2, *б*, но качественный вид процесса безграничного роста цен остается неизменным.

Те же эффекты имеют место и при k>1, то есть предприятия в погоне за желаемым уровнем рентабельности увеличивают цены неограниченно даже при неизменных значениях $c_{a,b}$. Однако здесь эти эффекты сильнее, так как масштабы скачков цен увеличиваются с каждым периодом (см. рис. 2, *в*). Математически это связано с тем, что прямые, на которых лежат точки решения, расходятся лучами из неустойчивого состояния равновесия, расположенного в этом случае в области отрицательных цен[2].

Из приведенного анализа следует, что причиной неудержимого роста цен на выходную продукцию является стремление предприятий обеспечить себе высокую рентабельность при том, что значительная часть продукции участвует во взаимном обмене. Поскольку ни одно из предприятий само по себе не является источником денежных средств, а черпают они их со свободного рынка, то приток этих средств для покрытия увеличивающихся издержек может обеспечить только та доля товаров, которая и уходит на свободный рынок. Если эта доля чрезмерно мала (а доля взаимного обмена, соответственно, велика), то предприятия оказываются не в состоянии достичь желаемой рентабельности, реально получая средства лишь в виде слабых потоков со свободного рынка, неся, однако, затраты на производство всех товаров, в том числе, и участвующих во взаимном обмене.

Наиболее опасным (с точки зрения развития инфляции) является тот факт, что в рассмотренной модели предприятия формально продают товары друг другу по ценам свободного рынка, то есть никак не выделяют своего партнера из общего числа других покупателей. Следовательно, если такие связи нерегулярны или происходят не непосредственно между двумя партнерами, а через посредников или по замкнутой цепочке, включающей в себя несколько предприятий, то предприятия, в принципе, могут и не подозревать о наличии в их отношениях взаимных поставок. Тем самым, стремясь к достижению определенного уровня рентабельности для своего производства, они будут неосознанно загонять друг друга в область все более и более высоких цен. В развитых экономиках такому развитию событий препятствует наличие конкурентов, стремящихся привлечь покупателей более низкими ценами. Здесь же этот фактор в расчет не принимался, отражая тем самым сильную монополизацию российских рынков. Именно по этой причине рассмотренный механизм развития инфляции может оказаться существенным для нашей экономики.

При переходе к динамике мы отметили, что в уравнения баланса входят цены, которые определены в различные моменты времени. В силу этого интересно рассмотреть реальное уравнение баланса для предприятий и определить то значение показателя рентабельности $r_{a,b}$, которое предприятия достигают на каждом шаге.

---

[2] Возможные причины появления отрицательных цен обсуждались выше. Здесь же подчеркнем, что в рассматриваемой модели возможность появления отрицательных цен формально исключена, поскольку предполагается, что и поставка товаров, и их оплата производятся в течение одного временного интервала. В силу этого область нахождения решения ограничена первым квадрантом. С математической точки зрения, однако, переход состояния равновесия в область отрицательных цен получению корректного решения в области положительных цен не противоречит.

Для предприятия **А** рассогласование, показывающее насколько увеличилась (или уменьшилась) прибыль предприятия в расчете на единицу выпускаемой продукции по сравнению с запланированной, запишется следующим образом:

$$\text{при } k<1 \quad \Delta x_n = x_n - (c_a+y_n)\mu_a = x_n - x_{n+1} = -k^n \begin{cases} \Delta c_a\mu_a, & n=2m, \\ k\Delta c_b, & n=2m+1, \end{cases} \tag{12а}$$

$$\text{при } k>1 \qquad \Delta x_n = k^{n-1} \begin{cases} k(x_0 - c_a\mu_a - y_0\mu_a), \\ -x_0k^2 - c_bk^2 + y_0\mu_a, \end{cases} \tag{12б}$$

$$\text{при } k=1 \qquad \Delta x_n = -(c_a\mu_a + c_b)/2. \tag{12.в}$$

По аналогии в силу симметрии по индексам a,b записывается рассогласование и для предприятия **В** (далее будем вычислять все соотношения только для одного предприятия, например, **А**). Легко видеть, что при $k<1$ рассогласование с течением времени уменьшается, при $k=1$ остается постоянным, а при $k>1$ увеличивается. Определим теперь отношение реального показателя рентабельности на каждом шаге $(r^*_{a,b})$ к тому, который стремятся достичь предприятия. Как видно из (3), показатель рентабельности представляет собой отношение доходов, полученных от продажи продукции, к её себестоимости. Исходя из этого, а также используя (4) и (5), получим

$$r^*_a = x_n/[(c_a+y_n)\mu_a/r_a] \;\Rightarrow\; \gamma = r^*_a/r_a = x_n/x_{n+1} = 1 + \Delta x_n/x_{n+1}. \tag{13}$$

Такая запись позволяет сделать вывод, что при $k\leq 1$ реальный показатель рентабельности с течением времени стремится к запланированному. Если же $k>1$, то как Δx_n, так и x_n стремятся к бесконечности. Однако, существуют пределы их отношения на подпоследовательностях четных и нечетных временных интервалов, которые определяются следующим образом (см. Приложение 2):

$$\lim_{n\to\infty}(r^*_a/r_a) = 1 + (k^2-1)/k \begin{cases} (x_0 - c_a\mu_a - y_0\mu_a)/[c_a\mu_a + x_0(k^2-1) + c_bk^2], & n=2m, \\ (-x_0k^2 - c_bk^2 + y_0\mu_a)/[c_a\mu_ak^2 + y_0\mu_a(k^2-1) + c_bk^2], & n=2m+1. \end{cases} \tag{14}$$

Поскольку все величины, входящие в формулу (14), за исключением числителей, неотрицательны при $k>1$, то условие достижения предприятием желаемой рентабельности совпадает с условием неотрицательности числителя. Более того, условия эти для обоих предприятий совпадают с точностью до замены четных и нечетных моментов времени. Для предприятия **А** система неравенств, которой должны удовлетворять начальные условия для достижения им желаемой рентабельности,выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_0 - y_0\mu_a > c_a\mu_a, \\ -x_0\mu_b + y_0 > c_b\mu_b. \end{cases} \tag{15}$$

Прямые, представляющие собой границы выполнения каждого из неравенств в отдельности (рис. 3), пересекаются в найденной нами ранее точке состояния равновесия и делят плоскость начальных условий на 4 области. Интересным является тот факт, что область достижения желаемой рентабельности во все моменты времени (на рисунке она обозначена цифрой *4*) полностью лежит в области отрицательных начальных условий. Поскольку начальные условия положительны, а также из того, что выражение (13) достигает своего нижнего предела именно снизу, следует невозможность постоянного достижения желаемой рентабельности любым из предприятий. Более того, можно сказать, что предприятия будут по очереди достигать желаемой рентабельности, начиная с некоторого момента времени, если точка начальных условий находится выше или ниже прямых 2 или 5, соответственно, и не будут достигать ее никогда, если точка находится между ними.

Следующим встает вопрос об областях безубыточной работы предприятий. Для этого в силу формулы (13) необходимо, чтобы $\gamma r_a = r^*_a > 1$. Условия выполнения этого требования для произвольного случая приведены в Приложении 2. Здесь же мы ограничимся частным случаем, когда предприятия симметричны по всем параметрам, а различаться могут только начальные условия. В этом случае уравнения границ безубыточности выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} y_0 \le x_0[k(r_a-1) + r_a]/(kr_a) + c_a(r_a-k)/[r_a(k-1)], \\ x_0 \le y_0[k(r_a-1) + r_a]/(kr_a) + c_a(r_a-k)/[r_a(k-1)]. \end{cases} \tag{16}$$

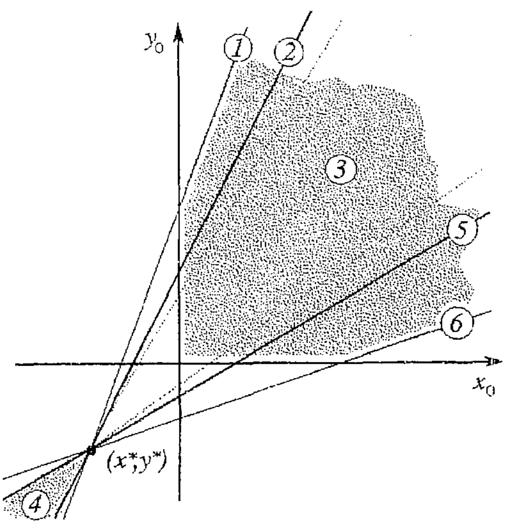


Рис. 3. Разбиение плоскости начальных условий на области для случая $k>1$: *1* - граница области безубыточной работы предприятия **А**; *2* - граница области достижения предприятием **В** желаемой рентабельности; *3* - область безубыточной работы обоих предприятий одновременно; *4* - область достижения обоими предприятиями желаемой рентабельности; *5* - граница области достижения предприятием **А** желаемой рентабельности; *6* - граница области безубыточной работы предприятия **В**

На рис. 3 показано возможное расположение этих прямых, а также один из возможных вариантов их расположения относительно границ области достижения желаемой рентабельности. Факт того, что прямые эти могут располагаться только так, как это показано на рис. 3, доказан в Приложении 2. Полученные таким образом результаты показывают, что существует область безубыточной работы обоих предприятий сразу (на рисунке она заштрихована), и что при различных параметрах модели в области достижения одним предприятием желаемой рентабельности другое может быть как убыточным (для этого случая границы области безубыточной работы предприятий показаны пунктиром), так и прибыльным. Этот факт достаточно важен, поскольку зная это, предприятие может несколько изменить свои параметры так, чтобы если и не достигать желаемой рентабельности, то не быть хотя бы убыточным. В заключение заметим, что рассмотрение частного случая не уменьшает важности полученных результатов, поскольку в силу непрерывности все сделанные выводы можно распространить хотя бы на некоторую окрестность в пространстве параметров, где симметрия предприятий не соблюдается.

4. Сравнительный анализ для цепочки предприятий

Для выявления роли взаимных поставок целесообразно рассматривать схему рис. 1, модифицированную так, чтобы обратная связь между предприятиями оказалась разорванной, объемы производимой продукции сохранены, а неизменная стоимость части материалов для предприятия **А** в размере $Q_b v_b$ включена в величину $M_a u_a$ (рис. 4). При этом мы полагаем, что предприятие **А** теперь закупает всё сырье на свободном рынке факторов, а не у партнера, и увеличение предприятием **В** цены на свою продукцию не сказывается на рыночной цене сырья для предприятия **А**. В этом случае можно говорить о «последовательной цепочке» предприятий.

Динамические уравнения в этом случае, с учетом сделанных ранее обозначений, запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} x_{n+1} = c_a \mu_a, \\ y_{n+1} = (c_b + x_n)\mu_b. \end{cases} \qquad (17)$$

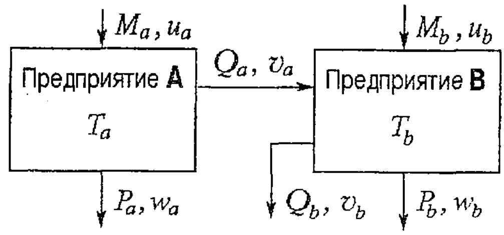


Рис. 4. Схема взаимодействия предприятий с разомкнутой петлей обратной связи

Из уравнений (9) легко определить скачок цен на выходную продукцию в системе предприятий, связанных взаимными поставками, при изменении входных цен на $\Delta c_{a,b}$: $\Delta x,y= =(\Delta c_{a,b}\mu_{a,b} + \Delta c_{b,a}k^2)/(1 - k^2)$.

Для рассматриваемого случая последовательной цепочки аналогичные приращения $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{y}$ записываются следующим образом: $\Delta\bar{x}=\Delta c_a\mu_a$, $\Delta\bar{y}=\Delta c_a k^2+\Delta c_b\mu_b$. Легко найти отношение приращений в этих двух случаях для каждого из предприятий: $\Delta x/\Delta\bar{x}=[1+\mu_b\Delta c_b/\Delta c_a]/(1-k^2)$; $\Delta y/\Delta\bar{y}=1/(1-k^2)$. Нетрудно видеть, что при малых k ($k<<1$) отношение цен близко к 1, при увеличении k оно возрастает и при k=1 уходит в бесконечность. При k>1 полученное выражение не имеет смысла, так как цены в системе предприятий, связанных взаимными поставками, неограниченно возрастают. Заметим, что разрыв хотя бы одной из связей между предприятиями разрывает замкнутую петлю обратной связи между ними. С математической точки зрения это эквивалентно приравниванию нулю одной из величин $\mu_{a,b}$, что в конечном счете приводит к занулению параметра связности k в рамках обозначений, принятых на рис. 1. В результате при размыкании петли обратной связи предприятия сами по себе перестают быть «генераторами» инфляции. Здесь же величина k, в соответствии со схемой, изображенной на рис. 4, имеет несколько иной экономический смысл и поэтому, несмотря на формальное сохранение обозначений, не обращается в нуль при разрыве петли обратной связи.

Заключение

Подводя итоги, отметим, что модель связанных между собой взаимными поставками предприятий может быть полезна и для исследования вопросов развития инфляции в экономике страны в целом.

Макроэкономические схемы основного кругооборота продуктов и доходов в относительно замкнутых системах приводятся в ряде классических западных учебников по экономике [1,2] (рис. 5). Существенным отличием российской экономики является значительное отклонение в пропорциях мощностей потоков «расходы на потребление» со стороны домашних хозяйств и «государственные закупки» в пользу последних. При этом следует учесть, что государство отнюдь не всегда выходит на рынок товаров и услуг как равноправный партнер, а зачастую, исходя из определенных приоритетов, финансирует предприятия напрямую. Если еще вспомнить о бартере, взаимных поставках по согласованным ценам и иных не совсем традиционных схемах взаимообменов, столь распространенных в настоящее время в нашей промышленности, то можно с определенной уверенностью утверждать, что продуктовые и (или) эквивалентные им финансовые потоки, замкнутые внутри промышленности (включая и замыкание их через государство), значительно мощнее потока «расходы на потребление», воздействующего на промышленность через свободный рынок. Таким образом, схема российской экономики в макромасштабе весьма напоминает (по крайней мере в качественном плане) рассмотренную выше систему сильно связанных между собой предприятий, выходящих на свободный рынок лишь с небольшой долей своего товара. В силу этого к российской экономике в меру указанной аналогии могут быть, по-видимому, отнесены те основные выводы о развитии инфляции, которые получены

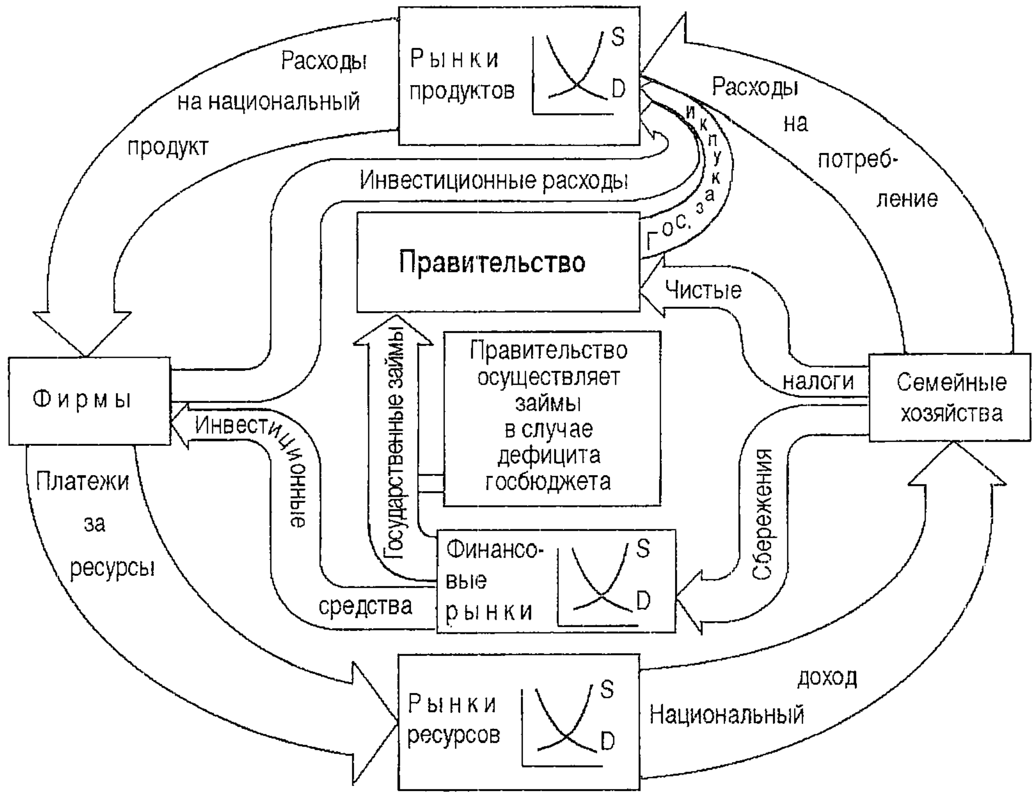


Рис. 5. Модель кругооборота доходов и продуктов с учетом роли государственного сектора [1, с.40]

выше для модели двух связанных предприятий. Для преодоления негативных тенденций по развитию инфляции в экономике России, исходя из такой аналогии, можно рекомендовать более сильную ориентацию предприятий на работу на свободном рынке для конечных потребителей, то есть согласно рис. 5 [1,2], для домашних хозяйств. Такая переориентация становится возможной только при росте потребления (национального дохода), то есть в нынешних условиях, как это ни парадоксально звучит, при росте доли зарплаты в себестоимости продукции. В долгосрочном плане гарантией от развития инфляции является развитие конкуренции (в том числе и со стороны мирового рынка), автоматически ограничивающей «аппетиты» предприятий по повышению цен.

Приложение 1

Для решения системы динамических уравнений (7)

$$\begin{cases} x_{n+1} = (c_a + y_n)\mu_a, \\ y_{n+1} = (c_b + x_n)\mu_b \end{cases} \qquad (\text{п}1.1)$$

посредством Z-преобразования перейдем в (п1.1) к изображениям:

$$\begin{cases} x^*(z)z = x_0 z + [c_a z/(z-1) + y^*(z)]\mu_a, \\ y^*(z)z = y_0 z + [c_b z/(z-1) + x^*(z)]\mu_b. \end{cases} \qquad (\text{п}1.2)$$

Разрешим (п1.2) относительно x^* и y^*:

$$x^*(z)z = x_0 z + \{c_a z/(z-1) + [y_0 z + (c_b z/(z-1) + x^*(z))\mu_b]z^{-1}\}\mu_a,$$

домножим на z и раскроем скобки

$$x^*(z)z^2 = x_0z^2 + c_a\mu_a z^2/(z-1) + y_0 z\mu_a + c_b z\mu_a\mu_b/(z-1) + x^*(z)\mu_b\mu_a.$$

Выразим x^* и приведем полученное выражение к общему знаменателю

$$x^*(z)(z^2 - k^2) = z[x_0z(z-1) + c_a\mu_a z + y_0\mu_a(z-1) + c_bk^2]/(z-1),$$
$$x^*(z) = z[x_0z(z-1) + c_a\mu_a z + y_0\mu_a(z-1) + c_bk^2]/[(z-1)(z^2 - k^2)]. \qquad (\text{п}1.3)$$

Разложим полученные выражения на множители по z:

$$x^*(z) = [z/(z-1)](c_a\mu_a z + c_bk^2)/(1-k^2) +$$
$$+ [z/(z-k)][x_0k(k-1) + c_a\mu_a k + y_0\mu_a(k-1) + c_bk^2]/[2k(k-1)] +$$
$$+ [z/(z+k)][x_0k(k+1) - c_a\mu_a k - y_0\mu_a(k+1) + c_bk^2]/[2k(k+1)] \qquad (\text{п}1.4)$$

и перейдем к оригиналу в (п1.4)

$$x_n = (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1-k^2) + k^n[x_0k(k-1) + c_a\mu_a k + y_0\mu_a(k-1) + c_bk^2]/[2k(k-1)] +$$
$$+ (-k)^n[x_0k(k+1) - c_a\mu_a k - y_0\mu_a(k+1) + c_bk^2]/[2k(k+1)]. \qquad (\text{п}1.5)$$

Полученное решение описывает систему при $k\neq 1$. Первое слагаемое в (п1.5) - координата состояния равновесия системы, которое будет устойчивым при $k<1$ и неустойчивым при $k>1$. Обозначим его через x^*. Предположим, что в начальный момент времени система находилась в состоянии равновесия, которое определяется по формулам: $x_0=(c_a^0\mu_a+c_b^0k^2)/(1-k^2)$, $y_0=(c_b^0\mu_b+c_a^0k^2)/(1-k^2)$.

Подставим эти значения в (п1.5) и приведем вторые два слагаемых к общему знаменателю.

$$x_n = (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1-k^2) + k^n\{[x_0k(k-1) + c_a\mu_a k + y_0\mu_a(k-1) + c_bk^2](k+1) +$$
$$+ (-1)^n[x_0k(k+1) - c_a\mu_a k - y_0\mu_a(k+1) + c_bk^2](k-1)\}/[2k(k-1)(k+1)] =$$

$$= (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1-k^2) + k^n \begin{cases} [x_0k(k-1) + c_a\mu_a k + c_bk^2]/[k(k^2-1)], & n=2m \\ [c_a\mu_a k^2 + y_0\mu_a(k^2-1) + c_bk^2]/[2k(k^2-1)], & n=2m+1 \end{cases} =$$

$$= (c_a\mu_a + c_bk^2)/(1-k^2) + k^n \begin{cases} [-c_a^0\mu_a - c_b^0k^2 + c_a\mu_a + c_bk^2]/(k^2-1), & n=2m \\ [c_a\mu_a k^2 + (c_b^0\mu_b + c_a^0k^2)\mu_a + c_bk^2]/[k(k^2-1)], & n=2m+1 \end{cases} =$$

$$=x_n=(c_a\mu_a+c_bk^2)/(1-k^2) - k^n \begin{cases} [\Delta c_a\mu_a + \Delta c_bk^2]/(1-k^2), & n=2m, \\ k[\Delta c_a\mu_a + \Delta c_b]/(1-k^2), & n=2m+1, \end{cases} \qquad (\text{п}1.6)$$

где $c_a^0 = (M_a^0u_a + T_a^0)/v_a$, $c_b^0 = (M_b^0u_b + T_b^0)/v_b$, $c_a = \Delta c_a + c_a^0$, $c_b = \Delta c_b + c_b^0$.

Из соображений симметрии

$$y_n=(c_b\mu_b+c_ak^2)/(1-k^2)+k^n \begin{cases} [\Delta c_b\mu_b + \Delta c_ak^2]/(1-k^2), & n=2m, \\ k[\Delta c_b\mu_b + \Delta c_a]/(1-k^2), & n=2m+1. \end{cases} \qquad (\text{п}1.6.1)$$

Рассмотрим случай $k=1$. Из (п1.3) имеем

$$x^*(z) = z[x_0z(z-1) + c_a\mu_a z + y_0\mu_a(z-1) + c_b]/[(z-1)^2(z+1)].$$

Представим $x^*(z)$ в виде

$$x^*(z) = a_1 z/(z+1) + a_2 z/(z-1) + a_3 z/(z-1)^2. \qquad (п1.7)$$

Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, получаем

$$a_3 = (c_a \mu_a + c_b)/2,$$

$$a_1 = (x_0 - y_0 \mu_a)/2 + (c_b - c_a \mu_a)/4,$$

$$a_2 = (x_0 + y_0 \mu_a)/2 - (c_b - c_a \mu_a)/4.$$

Отсюда решение запишется в виде

$$x_n = n(c_a\mu_a + c_b)/2 + \begin{cases} x_0, & n = 2m, \\ y_0\mu_a - (c_b - c_a\mu_a)/2, & n = 2m+1. \end{cases} \qquad (п1.8)$$

Из соображений симметрии можно записать решение для y_n

$$y_n = n(c_b\mu_b + c_a)/2 + \begin{cases} y_0, & n = 2m, \\ x_0\mu_b - (c_a - c_b\mu_b)/2, & n = 2m+1. \end{cases} \qquad (п1.8.1)$$

Рассмотрим теперь случай $k>1$. Поскольку при этом координаты состояния равновесия отрицательные, имеет смысл рассмотреть случай, когда начальные условия (x_0,y_0) - произвольные положительные числа. Преобразуем выражение (п1.5) к более удобному виду. Для этого вынесем k^n за скобку и приведем подобные слагаемые отдельно для четной и нечетной подпоследовательностей временных интервалов:

$$x_n = (c_a\mu_a + c_b k^2)/(1-k^2) + k^n\{[x_0 k(k-1) + c_a\mu_a k + y_0\mu_a(k-1) + c_b k^2]/[2k(k-1)] +$$

$$+ (-1)^n[x_0 k(k+1) - c_a\mu_a k - y_0\mu_a(k+1) + c_b k^2]/[2k(k+1)]\} =$$

$$= (c_a\mu_a + c_b k^2)/(1-k^2) + k^n\{[x_0 k(k-1) + c_a\mu_a k + y_0\mu_a(k-1) + c_b k^2](k+1) +$$

$$+ (-1)^n[x_0 k(k+1) - c_a\mu_a k - y_0\mu_a(k+1) + c_b k^2](k-1)\}/[2k(k-1)(k+1)] =$$

$$= [1/(1-k^2)]\left[-c_a\mu_a - c_b k^2 + k^{n-1}\begin{cases} x_0 k(k^2-1) + c_a\mu_a k + c_b k^3, & n = 2m \\ y_0\mu_a(k^2-1) + c_a\mu_a k^2 + c_b k^2, & n = 2m+1 \end{cases} \right]. \qquad (п1.9)$$

Из соображений симметрии запишем решение для второго предприятия:

$$y_n = [1/(1-k^2)]\left[-c_b\mu_b - c_a k^2 + k^{n-1}\begin{cases} y_0 k(k^2-1) + c_b\mu_b k + c_a k^3, & n = 2m \\ x_0\mu_b(k^2-1) + c_b\mu_b k^2 + c_a k^2, & n = 2m+1 \end{cases} \right].$$

Приложение 2

Нахождение и анализ реальной рентабельности предприятий

Из формулы (п1.9) Приложения 1 легко вычисляется величина

$$x_n - x_{n-1} = [1/(1-k^2)]\, k^{n-1}\begin{cases} k(k^2-1)(x_0 - y_0\mu_a - c_a\mu_a), & n = 2m \\ (k^2-1)(y_0\mu_a - x_0 k^2 - c_b k^2), & n = 2m+1 \end{cases} =$$

$$= k^{n-1}\begin{cases} k(x_0 - y_0\mu_a - c_a\mu_a), & n = 2m, \\ y_0\mu_a - x_0 k^2 - c_b k^2, & n = 2m+1. \end{cases} \qquad (п2.1)$$

Найдем предел отношения реального и предполагаемого показателей рентабельности $\gamma = r^*_a/r_a = x_n/x_{n+1} = 1 + \Delta x_n/x_{n+1}$ при $k>1$

$$1 + \lim_{n\to\infty}(\Delta x_n/x_{n+1}) = 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{(k^2-1)k^{n-1}\begin{cases}k(x_0 - c_a\mu_a - y_0\mu_a)\\ -x_0k^2 - c_bk^2 + y_0\mu_a\end{cases}}{-c_a\mu_a - c_bk^2 + k^n\begin{cases}c_a\mu_ak + x_0k(k^2-1) + c_bk^3\\ c_a\mu_ak^2 + y_0\mu_a(k^2-1) + c_bk^2\end{cases}} =$$

$$= 1 + (k^2-1)/k\begin{cases}(x_0 - c_a\mu_a - y_0\mu_a)/[c_a\mu_a + x_0(k^2-1) + c_bk^2], & n = 2m,\\ (-x_0k^2 - c_bk^2 + y_0\mu_a)/[c_a\mu_ak^2 + y_0\mu_a(k^2-1) + c_bk^2], & n = 2m+1.\end{cases} \quad (п2.2)$$

В таком случае условие достижения в пределе желаемой рентабельности будет совпадать с условиями неотрицательности числителей и выглядеть в четные и нечетные моменты времени для предприятий **А** и **В**, соответственно, следующим образом:

$$\begin{cases}x_0 - c_a\mu_a - y_0\mu_a > 0,\\ -x_0k^2 - c_bk^2 + y_0\mu_a > 0,\end{cases} \quad (п2.3а)$$

$$\begin{cases}y_0 - c_b\mu_b - x_0\mu_b > 0,\\ -y_0k^2 - c_ak^2 + x_0\mu_b > 0.\end{cases} \quad (п2.3б)$$

Разделим второе неравенство из (п2.3а) на μ_a, а второе неравенство из (п2.3б) на μ_b. Нетрудно видеть, что если теперь в (п2.3б) поменять неравенства местами, то она полностью совпадет с (п2.3а). Это означает, что для обоих предприятий границы одни и те же и лишь меняются местами в четные и нечетные моменты времени. Точки пересечения уравнений границ с осями координат равны соответственно $c_a\mu_a$ и $c_b\mu_b$ и заведомо положительны. Если добавить к этому факт пересечения этих прямых в 3-ем квадранте, то становится очевидно, что прямые не могут быть расположены друг относительно друга иначе, чем показано на рис. 3.

Рассмотрим вопрос об области безубыточности предприятий. Она определяется следующим соотношением: $\gamma r_a = r^*_a > 1$. Распишем это условие подробней, используя (п2.2)

$$\left[1 + (k^2-1)/k\begin{cases}(x_0 - c_a\mu_a - y_0\mu_a)/[c_a\mu_a + x_0(k^2-1) + c_bk^2]\\ (-x_0k^2 - c_bk^2 + y_0\mu_a)/[c_a\mu_ak^2 + y_0\mu_a(k^2-1) + c_bk^2]\end{cases}\right] r_a \geq 1.$$

Раскроем скобки и приведем к общему знаменателю

$$\begin{cases}\dfrac{k(c_a\mu_a + x_0(k^2-1) + c_bk^2) + (k^2-1)(x_0 - c_a\mu_a - y_0\mu_a)}{k(c_a\mu_a + x_0(k^2-1) + c_bk^2)}\, r_a \geq 1\\[2ex] \dfrac{k(c_a\mu_ak^2 + y_0\mu_a(k^2-1) + c_bk^2) + (k^2-1)(-x_0k^2 - c_bk^2 + y_0\mu_a)}{k(c_a\mu_ak^2 + y_0\mu_a(k^2-1) + c_bk^2)}\, r_a \geq 1.\end{cases} \quad (п2.4)$$

Записав аналогичную систему неравенств, исходя из симметрии для предприятия **В**, мы получим систему из четырех неравенств с большим количеством параметров, анализ которой в общем виде представляется достаточно сложным. По этой причине рассмотрим частный случай, когда предприятия «одинаковы», то есть $c_a=c_b$, $\mu_a=\mu_b=k$. В этом случае (п2.4) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} [k(c_a k+x_0(k^2-1)+c_a k^2)+(k^2-1)(x_0-c_a k-y_0 k)]/[k(c_a k+x_0(k^2-1)+c_a k^2)]r_a \geq 1 \\ [k(c_a k^3+y_0 k(k^2-1)+c_a k^2)+(k^2-1)(-x_0 k^2-c_a k^2+y_0 k)]/[k(c_a k^3+y_0 k(k^2-1)+c_a k^2)]r_a \geq 1. \end{cases}$$

Очевидно, с точностью до замены x_0 на y_0, полученные неравенства совпадают. Это означает, что каждая из двух границ, расположенных, кстати, симметрично относительно прямой $x_0=y_0$, будет являться границей безубыточности поочередно то одного, то другого предприятия. Преобразуем одно из полученных неравенств. Домножим на знаменатель и приведем подобные члены

$$[k(c_a k + x_0(k^2-1) + c_a k^2) + (k^2-1)(x_0 - c_a k - y_0 k)]r_a \geq k(c_a k + x_0(k^2-1) + c_a k^2) =$$

$$= [c_a k(k+1) + x_0(k^2-1)(k+1) - y_0 k(k^2-1)]r_a - k[c_a k + x_0(k^2-1) + c_a k^2] \geq 0.$$

Выразим y_0 как функцию от x_0 и представим ее по степеням x_0

$$y_0 \leq \{[c_a k(k+1) + x_0(k^2-1)(k+1)]r_a - k[c_a k + x_0(k^2-1) + c_a k^2]\}/[k(k^2-1)r_a],$$

$$y_0 \leq \{x_0(k^2-1)[k(r_a-1) + r_a] + c_a k(k+1)(r_a - k)\}/[k(k^2-1)r_a],$$

$$y_0 \leq x_0[k(r_a-1) + r_a]/(kr_a) + [c_a(r_a - k)]/[(k-1)r_a]. \qquad (п2.5)$$

Из принятых соотношений параметров следует, что $k=\varphi r_a$, $\varphi<1$; $r_a>1$; $k>1$. На основе этого проведем анализ коэффициентов при линейной и постоянной части в (п2.5):

$$[k(r_a-1) + r_a]/(kr_a)=[\varphi(r_a-1+1/\varphi)]/(\varphi r_a)=1+(1-\varphi)/(\varphi^2 r_a) > 1, \quad c_a(r_a - k)/[(k-1)r_a] > 0.$$

Легко также найти пересечение границ безубыточности, воспользовавшись тем, что в силу симметрии должно выполняться условие

$$x_0 = y_0 = c_a(r_a - k)kr_a/[(k-1)r_a(r_a - k)] = c_a k/(k-1). \qquad (п2.6)$$

С учетом сделанного предположения относительно «равенства» предприятий, система неравенств (п2.3а) запишется в более простом виде

$$y_0 \leq x_0/k - c_a, \qquad (п2.7)$$

а координаты пересечения границ достижения желаемой рентабельности совпадут с (п2.6). Таким образом, все построенные прямые пересекутся в одной точке.

Рассмотрим вопрос о соотношении между углами наклона прямых, являющихся границами областей достижения желаемой рентабельности и безубыточности, а по сути о пересечении областей безубыточной работы обоих предприятий и достижения желаемой рентабельности хотя бы одним из них, или отсутствии такового. Для этого выясним вопрос о соотношении между величиной k и $[k(r_a-1) + r_a]/(kr_a)$. Используя условия $k=\varphi r_a$, $\varphi<1$ запишем

$$[r_a\varphi(r_a-1) + r_a]/(r_a^2\varphi) <> r_a\varphi, \quad r_a^2\varphi^2 - (r_a - 1)\varphi - 1 <> 0.$$

При $r_a\to\infty \Rightarrow [r_a\varphi(r_a-1) + r_a]/(r_a^2\varphi) < r_a\varphi$, значит пересечение пусто. При $r_a\varphi\to 1+0$ и $\varphi<1$ имеем: $r_a^2\varphi^2 - r_a\varphi + \varphi - 1 < 0 \Rightarrow [r_a\varphi(r_a-1) + r_a]/(r_a^2\varphi) > r_a\varphi$. Следовательно, даже при некоторых достаточно близких, но больших чем $1/\varphi$ значениях r_a, пересечение областей будет не пусто. Таким образом доказано существование различных вариантов взаимного расположения указанных областей.

Библиографический список

1. *Долан Э. Дж., Линдсей Д.* Макроэкономика. СПб., 1994.
2. *Самуэльсон П.* Экономика. М.:Прогресс, 1964.

Нижегородский государственный университет

Поступила в редакцию 22.11.95

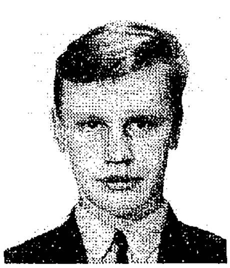
ONE MECHANISM OF THE INFLATION

L.A. Kruchinin, P.S. Rasenstein, A.V. Smorgonsky

The model of two enterprises, coupled through mutual delivery of goods is investigated. The significant parameters of this model and their bifurcations values which determine the appearance of the tendency of the infinite growth of prices are found. The influence of bifurcation transition on some economical indices of working enterprises is studied.

Сморгонский Андрей Владимирович родился в 1946 году в Горьком, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1968). После окончания ГГУ работал в Научно-исследовательском радиофизическом институте и Институте прикладной физики АН. Защитил кандидатскую (1975), докторскую (1994) диссертации по релятивистской высокочастотной электронике. Последние годы занимается моделями экономики и в более широком смысле - экономической динамики. Автор многочисленных статей по указанным выше направлениям исследований. Лауреат премии Ленинского комсомола (1980).

Разенштейн Петр Сергеевич родился в 1950 году в ЕАО РСФСР, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета (1974). После окончания ГГУ работал в Научно-исследовательском радиофизическом институте и Институте прикладной физики АН. Является автором ряда научных статей и изобретений в области лазерной физики, флуктуаций в лазерах, когерентной и нелинейной оптики. В последние годы занимается исследованиями в области экономики в «ЭПИцентре-НН».



Кручинин Леонид Анатольевич родился в 1973 году в Горьком, окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Нижегородского государственного университета (1995). В настоящее время работает в «ЭПИцентре-НН».