Прикладные задачи нелинейной теории колебаний и волн

Изв.вузов «ПНД», т. 4, № 4,5, 1996 УДК 519.866.2

О МЕХАНИЗМАХ УСТАНОВЛЕНИЯ РЫНОЧНОЙ ЦЕНЫ

А.А. Короновский

В настоящей работе исследуются нелинейные динамические процессы установления рыночной цены на однородные товары. Рассмотрены два предельных случая: превышение предложения над спросом и спроса над предложением. Показано, что, несмотря на различие механизмов ценообразования, в обоих случаях, «в первом приближении» можно считать, что на однородные товары с течением времени устанавливается единая цена.

Во многих учебниках по экономической теории (см., например, [1-3]) и работах, посвященных анализу и моделированию динамики рынка (см. также [4-7]), полагается, что на однородные товары устанавливается одинаковая цена. (Эта цена зависит от большого числа самых различных факторов: издержек на производство, хранение, транспортировку, реализацию товаров, от конкуренции производителей и продавцов, качества товара, соотношения спроса и предложения, покупательной способности населения и т.д. и т.п.) Конечно, на самом деле это не совсем соответствует действительности, на что обращается внимание в работе [8]. Но даже, если «в первом приближении» на однородный товар действительно устанавливается одинаковая цена, то механизм установления этой единой цены не только не описывается, но даже и не рассматривается, это считается как бы само собой разумеющимся.

В настоящей работе делается попытка, пользуясь строгим математическим аппаратом, раскрыть механизм установления цены на этапе сбыта товара, при сделанных предположениях о том, что все продавцы изначально поставлены в равные условия. Ключевыми моментами в понимании сути происходящих процессов являются стремление продавцов получить максимальную прибыль за рассматриваемый интервал времени и желание покупателей приобрести необходимый товар по минимально возможной цене.

1. Превышение предложения над спросом

Будем считать, что продавцы делают оптовые закупки товара у производителя-монополиста (или экспортера) по одинаковым ценам и затем продают закупленный товар уже в розницу, по более высоким ценам, населению. Будем рассматривать товар, на который существует постоянный, не меняющийся со временем, спрос населения[1]. Кроме того, будем полагать, что в любой момент времени запасы товаров у продавцов значительны и постоянно пополняются (иными словами, к услугам покупателей «изобилие» данного вида товара и в любое время запасы продукта на рынке больше, чем потребность в нем населения). Вполне естественно предположить, что продавец, закупив оптом товар, реализует его по ценам, которые он устанавливает сам, исходя из своих затрат (затраты на закупку товара, перевозку, хранение, уплату налогов и т.п.) и желаемой величины прибыли. Далее, предположим, что величина a - минимальная цена, по которой продавец еще может реализовать товар, чтобы окупить все свои затраты (включая, разумеется, и свое затраченное время). Вполне понятно, что продажная цена X, по которой реализуется товар населению, может не совпадать с минимально возможной ценой a, ибо в этом случае, при $X>a$, за каждую проданную единицу товара продавец будет получать дополнительную прибыль.

Проведем нормировку величины X: в дальнейшем будем рассматривать безразмерную цену $x=X/a$, характеризующую, насколько продажная цена X превышает минимально возможную продажную цену a. Число продавцов, реализующих свой товар по цене x в момент времени t, мы будем описывать зависимостью $N(x,t)$. Будем полагать, что число продавцов достаточно велико (и постоянно) и поэтому можно считать, что продавцы «непрерывно» распределены по величине x, то есть, $N(x,t)=N_0p(x,t)dx$, где $p(x,t)$ - фактически плотность распределения вероятностей того, что выбранный нами наугад продавец реализует свой товар по цене, попадающий в интервал цен от x до $x+dx$, N_0 - общее число продавцов, торгующих рассматриваемым видом товара[2]. Понятно, что в этом случае должно выполняться условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)dx = 1.$$

А что же покупатели? Предположим, что за рассматриваемый интервал времени совершается M_0 покупок. Какова же вероятность того, что покупатель приобретет необходимый ему товар за цену, лежащую в интервале $[x, x+dx)$? Конечно, это определяется в первую очередь тем, сколько продавцов реализуют свой товар по этой цене. Полагая, что все продавцы находятся в равных условиях и обращение к любому продавцу равновозможно, вероятность того, что покупатель обратится к продавцу, реализующему свой товар по цене, лежащей в интервале $[x, x+dx)$, равна $p(x,t)dx$. Однако, далеко не каждый покупатель приобретает необходимый ему товар у первого же продавца, к которому он обратился. Очень часто покупатель опрашивает нескольких продавцов и приобретает товар по наименьшей цене из тех, которые ему были предложены. Будем исходить из того, что каждый покупатель в среднем опрашивает n продавцов. Вероятность же того, что при опросе n продавцов покупатель найдет товар, реализуемый по цене, лежащей в интервале $[x, x+dx)$, которая является наименьшей из всех, предложенных ему продавцами, равна $p_n(x,t)dx$, где $p_n(x,t)$ - плотность распределения вероятностей того, что при опросе n продавцов минимальная продажная цена, которая будет найдена покупателем, попадет в интервал $[x, x+dx)$. Можно показать (см. приложение), что

$$p_n(x,t) = np(x,t)[1 - F(x,t)]^{n-1},$$

где $F(x,t)$ - функция распределения величины x,

$$F(x,t) = \int_{-\infty}^{x} p(y,t)dy.$$

Понятно, что число продавцов, реализующих свой товар по цене, лежащей в интервале $[x, x+dx)$, равно $N_0p(x,t)dx$, а число покупателей, покупающих товар по

[1] К таким вида товара относятся, например, по нашему мнению, продукты питания или сигареты, во всяком случае, «в первом приближении».

[2] В дальнейшем мы будем полагать, что число продавцов, торгующих рассматриваемым видом товара, постоянно и не меняется с течением времени.

этой же цене (после опроса n продавцов) составляет $M_0 p_n(x,t)dx$. Полагая, что каждый из покупателей приобретает в среднем k единиц товара, получим, что за рассматриваемый интервал времени, продавец, реализующий свой товар по цене, лежащей в интервале $[x, x+dx)$, продает $kM_0 p_n(x,t)/[N_0 p(x,t)]$ единиц товара. Тогда величина прибыли, получаемой продавцом, будет составлять

$$g(x,t) = ak\{M_0 p_n(x,t)/[N_0 p(x,t)]\}(x-1) = akn(M_0/N_0)[1 - F(x,t)]^{n-1}(x-1).$$

Понятно, что продавец заинтересован в том, чтобы за рассматриваемый период времени получить как можно большую величину прибыли. Заметим, что, если бы продавец реализовывал свой товар не по цене x, а по цене $x+dx$, то он получал бы прибыль не $g(x,t)$, а $g(x+dx,t)$ и его выигрыш в получении прибыли на единицу изменения цены составил бы

$$[g(x+dx,t) - g(x,t)]/dx \to g'_x(x,t).$$

Понятно, что чем больше величина прироста прибыли на единицу изменения цены, тем больше у продавца стимул для изменения цены, по которой он реализует свой товар. Для простоты будем полагать, что скорость изменения продавцом продажной цены, по которой он реализует товар в единицу времени, пропорциональна величине прироста прибыли на единицу изменения цены, то есть,

$$\dot{x} = v(x,t) = \mu g'_x(x,t). \qquad (1)$$

Из-за того, что продавцы, стремясь получить максимально возможную прибыль, изменяют цены на товар, разумеется, изменяется и распределение $p(x,t)$ (а, соответственно, и $p_n(x,t)$, $g(x,t)$, $v(x,t)$). Уравнением, которым определяется динамика $p(x,t)$, является уравнение непрерывности

$$p'_t = -(vp)'_x, \qquad (2)$$

которое, фактически, является законом сохранения[3] общего числа продавцов на рынке. Учитывая, что $p(x,t)=F'_x(x,t)$ и используя формулы (1), (2), можно записать, что

$$F'_t(x,t) = -bnF'_x(x,t)\cdot\{(1 - F(x,t))^{n-1}(x-1)\}'_x, \qquad (3)$$

где $b = \mu(M_0/N_0)ak$. Если считать, что продавцы реализуют товары по ценам, лежащим в интервале $[0,l]$, то $F(0)=0$, $F(l)=1$, $(p(x,t)=\partial F(x,t)/\partial x)$, и динамика изменения функций $F(x,t)$ и $p(x,t)$ с течением времени однозначно определяется первоначальным распределением продавцов $F(x,0)=F^0(x)$ $(F^0(0)=0, F^0(l)=1)$.

На рис. 1-3 показано распределение продавцов по ценам в начальный

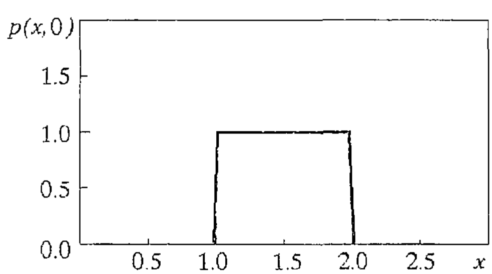

Рис. 1. Начальное распределение цен. Для простоты мы полагаем, что первоначально вероятность того, что продавец запрашивает цену, лежащую в интервале $[x, x+dx)$, одинакова для всех x из интервала [1,2]

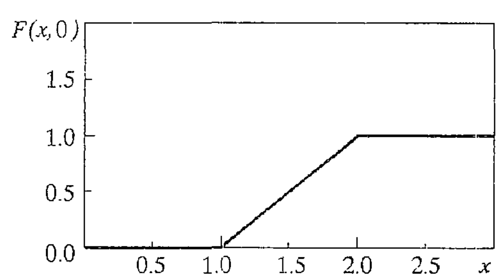

Рис. 2. Вид функции $F(x,0) = F^0(x)$

[3] О том, что уравнение непрерывности обеспечивает сохранение движущегося вещества, см., например, [9].

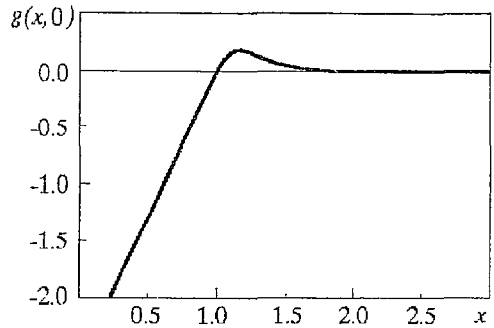

Рис. 3. Величина прибыли, получаемой продавцом, в зависимости от цены x, по которой он реализует свой товар, в начальный момент времени. Отрицательная величина прибыли (для $x<1$) свидетельствует о том, что продавец несет убытки, не возмещая своих издержек

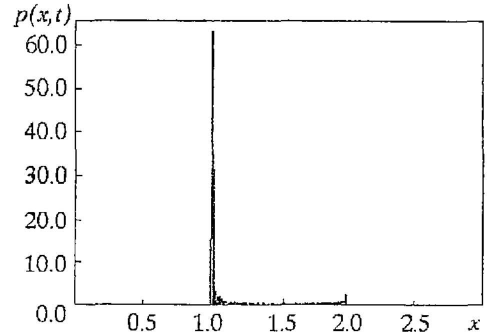

Рис. 4. Распределение цен в момент времени t=50.0. Отчетливо видно, что подавляющее большинство продавцов вынуждено продавать товары по цене x=1.0 (n=5, b=0.05)

момент времени (для простоты мы полагали, что продавцы «равномерно» распределены по ценам) и, соответственно, вид функций $F(x,0)=F^0(x)$ и $g(x,0)$. Рис. 4-6 показывают те же функции в момент времени t=50. Как показывают результаты численного моделирования уравнения (2)[4], распределение $p(x,t)$ ассимптотически стремится (при $t \to +\infty$) к виду $\delta(x-1)$. Таким образом, в случае, если предложение многократно превышает спрос (а именно этот случай мы здесь рассмотрели), на однородные товары устанавливается (с течением времени, при прочих равных условиях) одинаковая цена. Следует обратить внимание, что в случае δ-распределения продавцы не получают никакой прибыли (что приводит, в общем-то, к оттоку продавцов, торгующих этим видом товара, с рынка и их переориентации на другие виды товаров, что в этой модели не рассматривается), а лишь компенсируют свои издержки. Интересно то обстоятельство, что продавцы изменяют цены, по которым они реализуют товар, с целью увеличить свою прибыль, но их совместные действия приводят как раз к противоположному результату!

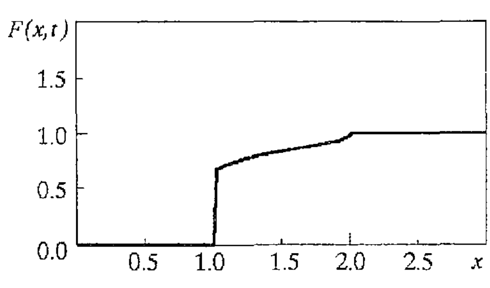

Рис. 5. Вид функции $F(x,t)$ в момент времени t=50.0

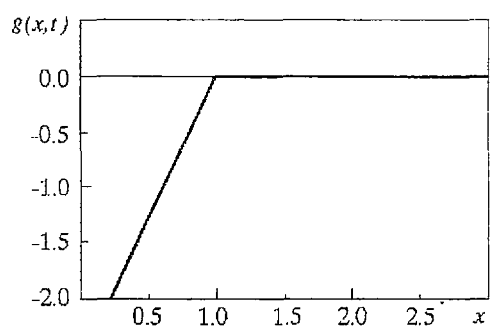

Рис. 6. Величина прибыли, получаемой продавцом, в зависимости от цены x, по которой он реализует свой товар, в момент времени t=50.0

2. Превышение спроса над предложением

До сих пор мы рассматривали ситуацию, когда предложение превышает спрос. Рассмотрим теперь противоположную ситуацию, когда спрос многократно

[4] Моделирование уравнения (2) осуществлялось методом, аналогичным методу «крупных частиц» в радиофизике, а именно, распределение продавцов по ценам $p(x,t)$ моделировалось конечным, но достаточно большим числом «продавцов-частиц»; каждой такой «частице» соответствовала своя цена x, изменяющаяся с течением времени согласно (1).

превосходит предложение (то есть, $N_0 << M_0$). Пусть, опять-таки, $p(x,t)$ характеризует распределение продавцов по ценам в момент времени t. В этом случае кардинальным образом изменяется стратегия поиска товара покупателями: если в рассмотренной выше ситуации покупатели могли позволить себе провести n опросов продавцов и приобрести товар по минимальной найденной цене, то теперь, в условиях дефицита, в условиях нехватки товара, покупатели будут приобретать товар сразу же, как только найдут его на рынке, если только цена на него не будет слишком высока. Пусть функция $z(y)$ характеризует число покупателей, для которых цена на рассматриваемый вид товара, лежащая в интервале $[y,y+dy)$ является предельной, то есть, это та максимальная цена, которую они еще могут позволить себе уплатить за товар. Понятно, что вид функции $z(y)$ тесным образом связан с уровнем дохода покупателей. Тогда, за единицу времени, покупатели на рынке найдут $kN_0p(x,t)dx$ единиц товара, цена на который лежит в интервале $[x,x+dx)$, но вот приобретут товар только те покупатели, для которых цена x еще не является предельной, то есть те, для которых $x \leq y$. Если считать, что все покупатели находятся в равных условиях, то за единицу времени $kN_0p(x,t)z(y)dxdy$ покупателей, чья предельная цена лежит в интервале $[y,y+dy)$, найдут товар по цене, попадающей в интервал $[x,x+dx)$.

Тогда за рассматриваемый период времени будет приобретено $kN_0p(x,t)[1-Z(x)]dx$ единиц товара ($Z(x)=\int_{-\infty}^{x} z(y)dy$), и, соответственно, прибыль продавцов, реализующих свой товар по цене x, составит

$$g(x,t) = ka[1-Z(x)](x-1). \tag{4}$$

Если исходить из предположения, что запасы товаров пополняются непрерывно и общий объем товаров на рынке не изменяется[5], а величина спроса постоянна, то, проводя рассуждения, аналогичные проделанным выше, мы вновь придем к уравнениию (2), где $g(x,t)$ будет определяться теперь по формуле (4).

Рис. 7 иллюстрирует эволюцию начального равномерного распределения цен в случае, если

$$Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 1.5, \\ x-1.5, & 1.5 \leq x < 2.5, \\ 1, & x \geq 2.5. \end{cases}$$

Рис. 8 соответствует той же ситуации, с тем только отличием, что все распределение цен изначально лежит ниже «критического уровня»:

$$Z(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ x-2, & 2 \leq x < 3, \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

Видно, что в этом случае начальное распределение эволюционирует как бегущая волна до тех пор, пока уровень цен не достигнет отметки, при которой начинает сказываться ограниченность покупательной способности населения.

Таким образом, мы рассмотрели механизмы установления рыночной цены в двух предельных случаях. Как видно из настоящей работы, «в первом приближении» действительно можно считать, что на однородные товары устанавливается единая цена (что и делается в различных работах, правда, без должного на то обоснования), хотя механизмы установления этой цены в разных случаях различны. Мы сознательно не рассматривали «обратные связи», характерные для рынка, такие как процессы изменения числа продавцов на рынке, увеличения (или уменьшения) предложения товара в соответствии с

---

[5] Такое предположение, конечно, довольно нереалистично, но оно позволяет существенно упростить дальнейшие выкладки.

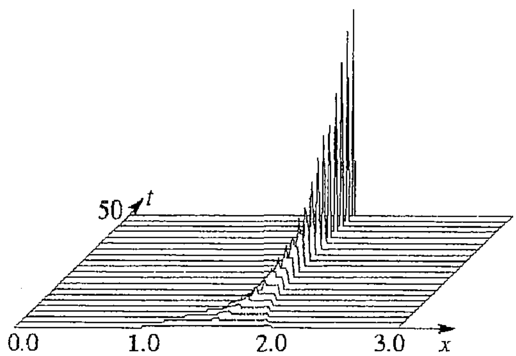

Рис. 7. Эволюция начального распределения цен в случае, если спрос многократно превышает предложение (n=5, $a\mu k$=0.5)

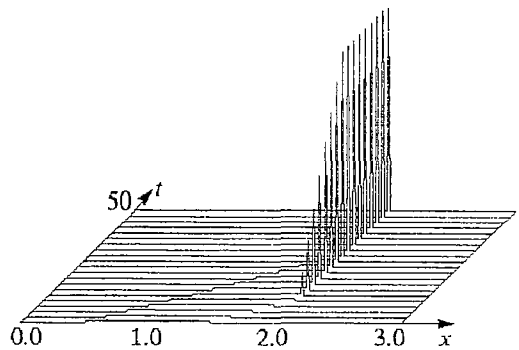

Рис. 8. Эволюция начального распределения цен, лежащего ниже «критического уровня» в случае, если спрос многократно превышает предложение. Отчетливо видно, что решение в виде бегущей волны эволюционирует в δ-распределение (n=5, $a\mu k$=0.5)

устанавливающимся распределением цен и т.п., так как, во-первых, процесс ценообразования является более динамичным и более быстро протекающим, нежели все остальные процессы, которые в значительной мере определяются им, а во-вторых, рассмотрение экономических процессов с учетом вышеупомянутых «обратных связей» представляет собой достаточно обширное и самостоятельное научное исследование.

Приложение

Будем полагать, что «плотность распределения продавцов» по ценам x (в момент времени t) $p(x,t)$ определена на всем множестве действительных чисел $(-\infty,+\infty)$[6]. Тогда вероятность того, что при обращении к продавцу в момент времени t покупатель найдет товар по цене, лежащей в интервале $[x,x+dx)$, равна $p(x,t)dx$, а вероятность того, что цена на товар окажется больше, чем x, будет $\int_x^{+\infty} p(x,t)dx = 1 - F(x,t)$. Что же означает тот факт, что при n опросах продавцов покупатель нашел минимальную цену, лежащую в интервале $[x,x+dx)$? Это значит, что либо покупатель нашел товар по искомой цене лишь в одном случае из n (существует n вариантов подобных ситуаций), а при остальных опросах цена оказалась больше x, либо в двух случаях из n (C_2^n вариантов) ему «повезло», а в остальных случаях цена цена была больше, чем x, …, либо в m случаях из n (C_m^n вариантов) цена товара «попала» в интервал $[x,x+dx)$, а во всех остальных случаях она превышала x, …, либо во всех n случаях (всего один вариант) цена оказалась равной искомой. Заметим, что все эти события несовместны. Тогда вероятность P объединения всех вышеописанных событий, то есть вероятность того, что за n опросов продавцов покупатель найдет минимальную цену, «попадающую» в интервал $[x,x+dx)$,равна сумме вероятностей каждого из этих событий. Вероятность же того, что при n опросах продавцов покупатель m раз найдет искомую цену, есть $C_m^n[p(x,t)dx]^m[1-F(x,t)]^{n-m}$ (см, например, [10]). Тогда

$$P = p_n(x,t)dx = \sum_{m=1}^{n} C_m^n[p(x,t)dx]^m[1 - F(x,t)]^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_m^n[p(x,t)dx]^m[1 - F(x,t)]^{n-m} - [1 - F(x,t)]^n =$$

$$= [1 - F(x,t) + p(x,t)dx]^n - [1 - F(x,t)]^n = [1 - F(x- dx,t)]^n - [1 - F(x,t)]^n.$$

6 Хотя, конечно же, представить себе, чтобы товар реализовывался по «отрицательным» ценам весьма затруднительно, тем не менее, мы сознательно не исключаем из рассмотрения отрицательные числа, для того, чтобы все наши выкладки были проведены в наиболее общем виде.

Обозначая $W(x,t)=[1-F(x,t)]^n$, получим, что

$$P = p_n(x,t)dx = W(x-dx) - W(x).$$

Тогда $p_n(x,t)=-W'(x,t)=np(x)[1-F(x,t)]^{n-1}$. Можно показать, что $p_n(x)$ удовлетворяет условию нормировки, то есть, $\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x,t)dx=1$. Действительно, обозначив

$$I(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)[1-F(x,t)]^n dx,$$

учитывая, что $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$, вычисляя этот интеграл по частям, получим рекурентное соотношение $I(n) = [n/(n+1)]I(n-1)$. Нетрудно видеть, что $I(0)=1$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x,t)dx = nI(n-1) = n[(n-1)/n]I(n-2) = (n-1)I(n-2) = \ldots = I(0) = 1.$$

Библиографический список

1. *Самуэльсон П.* Экономика. М.: МГП «АЛГОН», ВНИИСИ, 1992. Т.1,2.
2. *Макконнел Кэмпбелл Р., Брю Стенли.* Экономикс: принципы, проблемы и политика // Т. 1, 2.
3. *Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р.* Экономика. М.: Дело ЛТД, 1993.
4. *Аллен Р.Дж.* Математическая экономия. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
5. *Красноцеков П.С., Петров А.А.* Принципы построения моделей. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 182.
6. *Крутов А.П., Романко А.В.* Влияние государственных расходов на характер развития рыночной экономики // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.
7. *Оленев Н.Н., Поспелов И.Г.* Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа // Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986.
8. *Стинглер Дж. Дж.* Экономическая теория информации // Экономика и математические методы. 1994. Т. 30, N 1.
9. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика // М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1963. Ч. 1.
10. *Боровков А.А.* Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 1.12.95
после переработки 24.06.96

ABOUT THE MECHANISMS OF THE MARKET PRICES FIXING

A.A. Koronovskiy

This work deals with the nonlinear dynamic processes of the market prices fixing for the identical goods. Two opposite cases are investigated: the excess of the supply over the demand and the excess of the demand over the supply. It has been shown that in spite of the difference of the prices fixing mechanisms in both cases we can consider that the unified price is fixed for the identical goods during some period of time.