

ВИДЫ КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ С УДВОЕНИЕМ ПЕРИОДА ПРИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ

М.Д. Прохоров

Рассмотрены колебательные состояния двух симметрично связанных идентичных систем, демонстрирующих удвоение периода. Для случая диссипативной связи показано, что несинфазные режимы колебаний существуют не только в области слабой связи (при $k \sim 0$), но и в области очень сильной связи ($k \sim 1$). При этом области несинфазных режимов в пространстве параметров системы симметричны относительно $k=0.5$. Однако, несмотря на симметрию, несинфазные режимы в области слабой и сильной связи существенно различны.

Введение

Система двух симметрично связанных идентичных объектов, каждый из которых демонстрирует при изменении управляющего параметра переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, является одним из базовых объектов нелинейной динамики, широко представленных в физике, химии и биологии. Наиболее детальные исследования поведения связанных систем с удвоением периода проводились на точечных отображениях [1-7]. Такие системы могут демонстрировать множество различных периодических, квазипериодических и хаотических режимов колебаний. Так, для системы двух диссипативно [1] связанных отображений вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) + k[f(y_n) - f(x_n)], \\y_{n+1} &= f(y_n) + k[f(x_n) - f(y_n)],\end{aligned}\tag{1}$$

где x , y - динамические переменные, k - коэффициент связи, а $f(x_n)$ и $f(y_n)$ - функции, описывающие поведение изолированных подсистем, в случаях функций с одним или несколькими квадратичными экстремумами показаны пути эволюции всех возможных колебательных режимов, выделены области их существования в пространстве параметров, исследованы бассейны притяжения аттракторов мультистабильных состояний [8-10]. При этом изучение динамики модельных и экспериментальных систем проводилось при достаточно слабой связи подсистем $0 \leq k \leq 0.5$. В настоящей работе рассмотрено поведение системы (1) при $f(x_n) = \lambda - x_n^2$, $f(y_n) = \lambda - y_n^2$ в более широкой области изменения k ($0 \leq k \leq 1$) и проведено сопоставление результатов для случаев $k < 0.5$ и $k > 0.5$.

Виды колебаний связанной системы

Исследуемая система

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2 + k(x_n^2 - y_n^2), \quad (2)$$

$$y_{n+1} = \lambda - y_n^2 + k(y_n^2 - x_n^2)$$

при $k=0$ распадается на две идентичные подсистемы:

$$x_{n+1} = \lambda - x_n^2, \quad (3)$$

$$y_{n+1} = \lambda - y_n^2,$$

колебания которых одинаковы, но в связи с дискретной симметрией отображений по отношению к временному сдвигу могут быть сдвинуты друг относительно друга в зависимости от начальных условий на $n=1,2, \dots$. В результате, каждый режим периода N может быть реализован в (3) N способами, отличающимися сдвигом колебаний подсистем во времени на величину $m=0,1,2, \dots, N-1$, где m - шаг итерации. Для обозначения периодических режимов будем использовать запись N^m . Случай $m=0$ соответствует синфазному режиму, его фазовый портрет на плоскости (x_n, y_n) располагается на биссектрисе $x=y$. Остальные $N-1$ режимов периода N - несинфазные ($m \neq 0$).

На рис. 1, 2 для случая нулевой связи приведены примеры аттракторов периода 2 и 4, соответственно, и их бассейны притяжения. На всех рисунках, включая последующие, x_n и y_n указаны в интервалах от -0.6 до 1.5. Область начальных условий на плоскости (x_0, y_0) , стартуя из которой, система имеет решение на бесконечности, отмечена на всех рисунках одинаковой штриховкой. Правые части уравнений системы (2) содержат только квадраты переменных x и y , поэтому бассейны притяжения колебательных состояний системы (2) симметричны относительно линий $x_0=0, y_0=0$, где x_0, y_0 - начальные условия системы (2).

В установившемся состоянии периода 2 при итерациях системы имеет место цепочка отображений

$$(x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_2) \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow \dots \quad (4)$$

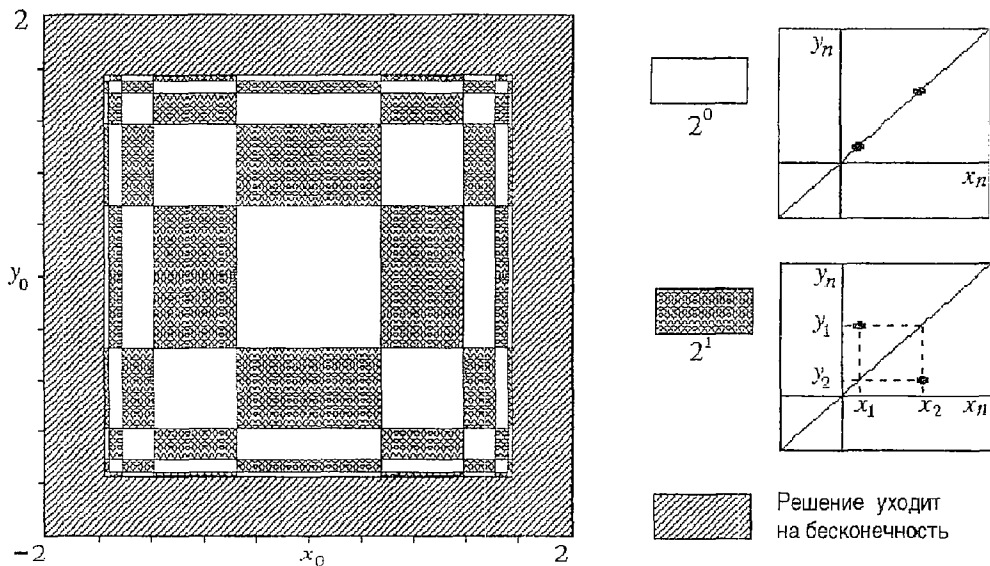


Рис. 1. Фазовые портреты и бассейны притяжения видов колебаний системы (2) при $\lambda=0.85, k=0$

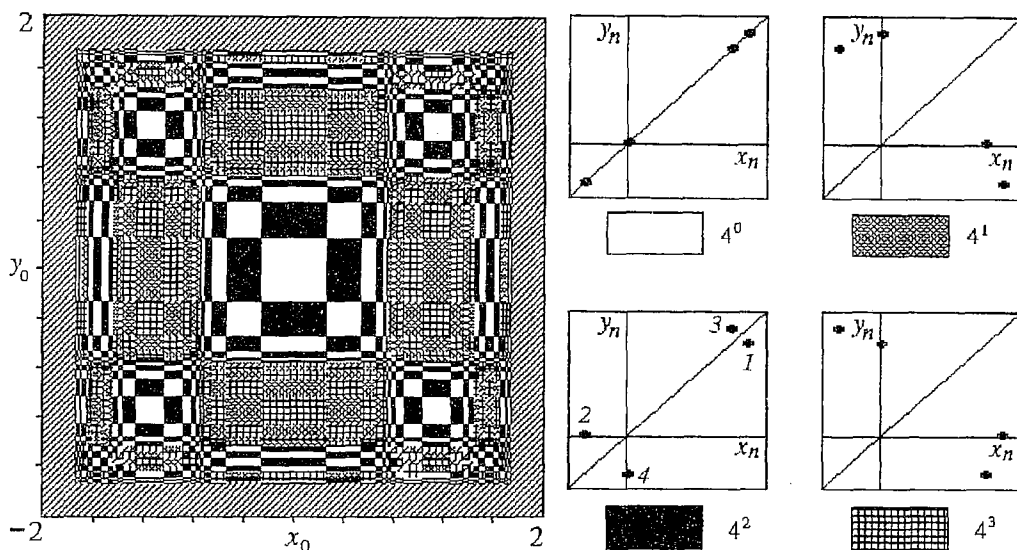


Рис. 2. Фазовые портреты и бассейны притяжения видов колебаний системы (2) при $\lambda=1.33, k=0$
 Для несинфазного режима 2^1 (см. рис.1) известно, что $x_2=y_1$ и $y_2=x_1$, и, следовательно

$$(x_1, y_1) \rightarrow (y_1, x_1) \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow \dots \quad (5)$$

В другом предельном случае $k=1$ система (2) примет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda - y_n^2, \\ y_{n+1} &= \lambda - x_n^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Для синфазных режимов $x_n=y_n$, поэтому для них системы (3) и (6) полностью идентичны, то есть связь не влияет на синфазные режимы (выражения, стоящие в скобках, в системе (2) обращаются в ноль).

Легко заметить, что (3) переходит в (6) при замене x_{n+1} на y_{n+1} и y_{n+1} на x_{n+1} . Следовательно, итерации системы (6) эквивалентны итерациям системы (3), при которых на каждом шаге x и y меняются местами. Так, для значений λ , при которых в несвязанных подсистемах существуют режимы периода 2, при $k=1$ синфазный цикл 2^0 остается прежним ($x_i=y_i, i=1,2$ и можно менять местами x_i и y_i , см. (4)), а вместо несинфазного 2^1 (см. (5)) в зависимости от начальных условий получаем или $(x_1, y_1) \rightarrow (x_1, y_1)$, или $(y_1, x_1) \rightarrow (y_1, x_1)$. Обозначим последние два вида колебаний как 1^I и 1^{II} . В этих режимах в системе существуют колебания периода 1, но величина колебаний в подсистемах разная, ($x_1 \neq y_1$).^{*} Таким образом, при рассмотренных значениях параметров в фазовом пространстве имеются два цикла периода 1 и один цикл периода 2, бассейны притяжения которых делят плоскость начальных условий в соответствии с рис.3. Структура этого рисунка аналогична таковой рис. 1, но бассейн притяжения цикла 2^1 , существующего при $k=0$, оказывается поделенным между циклами 1^I и 1^{II} .

Этот принцип деления бассейнов сохраняется и при отличных от 0 и 1 значениях коэффициентов связи, если их сумма равна единице. В силу симметрии цикла 2^1 относительно замены x на y и y на x для него справедливо (5) и при ненулевой связи. В то же время, для произвольного k нетрудно показать, что замена k на $1-k$ в системе (2) приводит к замене x_{n+1} на y_{n+1} и y_{n+1} на x_{n+1} , что

^{*} Существование в связанной системе двух несинфазных режимов периода 1 может быть продемонстрировано иначе (см. приложение 1).

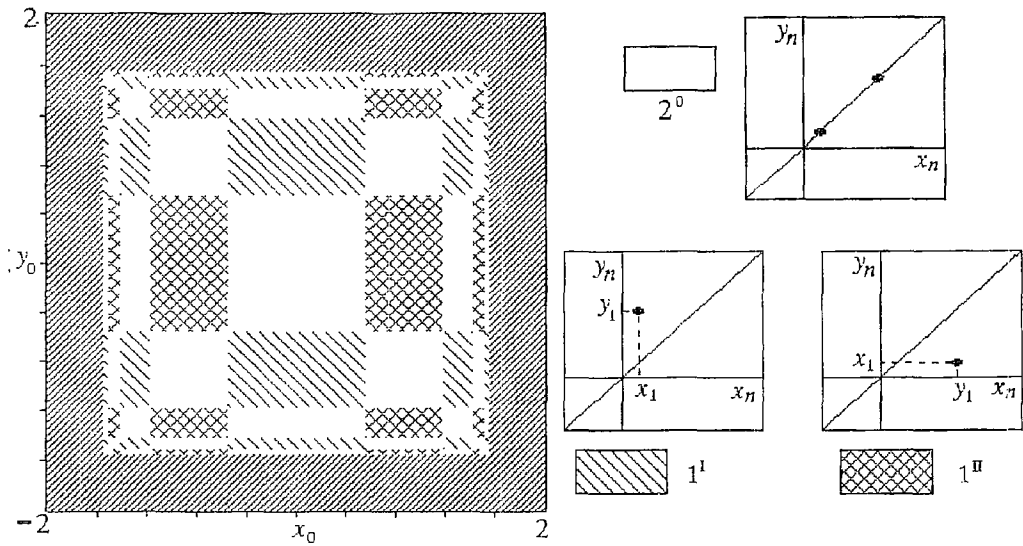


Рис. 3. Фазовые портреты и бассейны притяжения видов колебаний системы (2) при $\lambda=0.85$, $k=1$

эквивалентно симметричному отражению точки (x_{n+1}, y_{n+1}) относительно линии $x=y$. Следовательно, имея при некоторых k цикл 2^1 , при связи $1-k$ будем всегда иметь два цикла периода 1: 1^I и 1^{II} , которые делят между собой его бассейн притяжения (рис. 4).

Выделенные особенности сохраняются и при других значениях параметра нелинейности λ . Например, при λ , соответствующих существованию в изолированных подсистемах циклов периода 4, при $k=1$, как и в случае $k=0$ (см. рис. 2), существуют четыре цикла периода 4, но вид всех трех несинфазных циклов иной (рис. 5). Несимметричные циклы 4^I и 4^{III} , так же как 4^1 и 4^3 , образуют зеркально симметричную пару: замена x_n на y_n и наоборот переводит их друг в друга. Что касается симметричного цикла 4^{II} , то его фазовый портрет совпадает с фазовым портретом цикла 4^2 , но порядок следования элементов цикла другой.

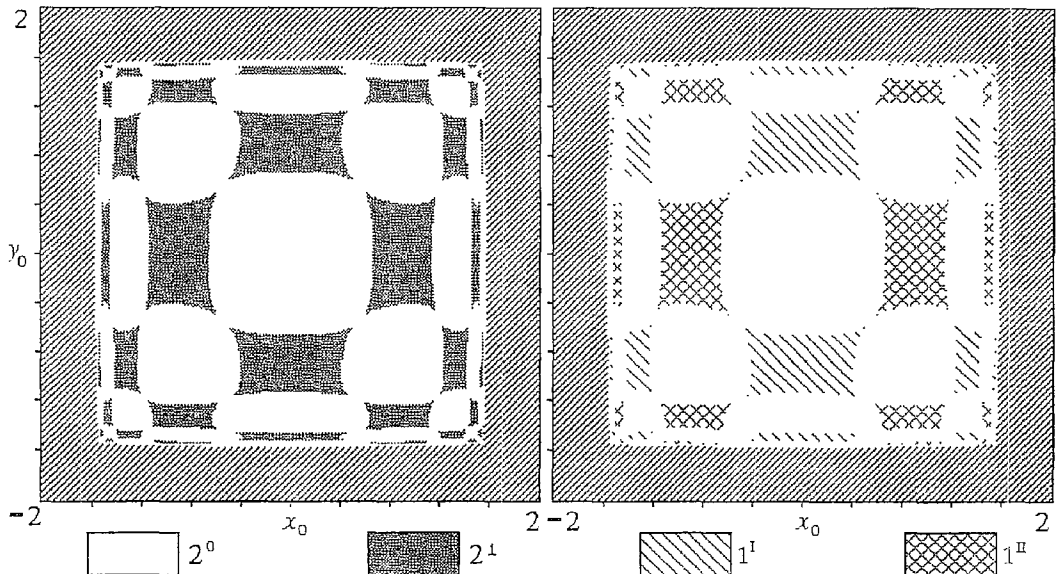


Рис. 4. Бассейны притяжения колебательных режимов системы (2) при $\lambda=0.85$ для случаев $k=0.025$ (слева) и $k=0.975$ (справа)

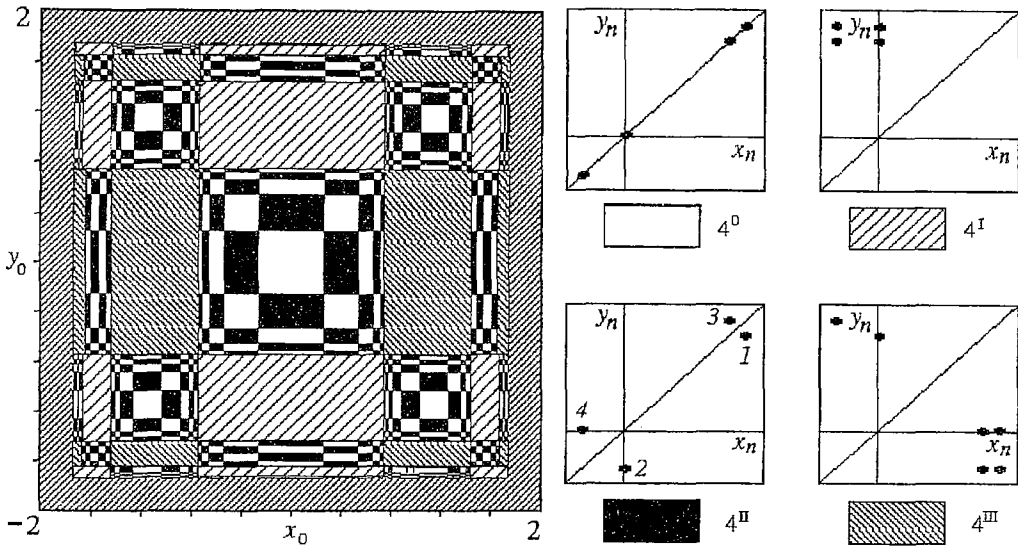


Рис. 5. Фазовые портреты и бассейны притяжения видов колебаний системы (2) при $\lambda=1.33, k=1$

При произвольных значениях связи подсистем справедливо, что если при некоторых k существуют зеркально симметричные 4^I и 4^3 , то при $1-k$ существуют зеркально симметричные 4^I и 4^3 , а симметричный 4^2 переходит при замене k на $1-k$ в симметричный 4^2 .

Аналогичная картина имеет место для всех циклов периода $2^n, n=2,3, \dots$, то есть при замене k на $1-k$ несинфазные симметричные циклы остаются, но порядок следования элементов меняется, а вместо зеркально симметричных пар циклов появляются новые пары зеркально симметричных циклов. В фазовых портретах при такой замене происходят следующие изменения: половина элементов (на каждом нечетном шаге итерации) остается на месте, а другая половина (на четных шагах) симметрично отражается относительно биссектрисы $x=y$, и наоборот.

Конфигурация бифуркационных множеств связанной системы

На рис. 6 показана плоскость параметров (k, λ) системы (2). Области устойчивости синфазных циклов ограничены горизонтальными линиями, соответствующими линиям бифуркаций удвоения периода. Остальные линии ограничивают области устойчивости несинфазных циклов.

Исследование эволюции различных видов колебаний и описание бифуркационных переходов для случая $k < 0.5$ приведено в работе [8]. В настоящей работе подобная задача для случая $k > 0.5$ не ставилась и рис.6 следует рассматривать лишь как иллюстрацию областей устойчивости синфазных и несинфазных циклов периода 1, 2 и 4. Как видно из рисунка, бифуркационные линии симметричны относительно $k=0.5$, то есть относительно замены k на $1-k$. Однако, хотя картина и симметрична, бифуркационные линии в области малой и большой связи относятся к разным циклам.

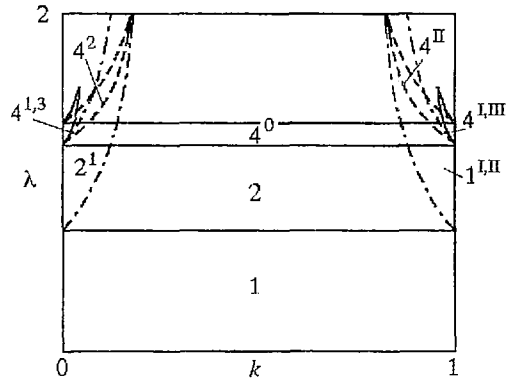


Рис. 6. Плоскость параметров (k, λ) системы (2). Штриховыми линиями ограничены области устойчивости режимов 4^2 и 4^II , а штрихпунктирными режимов $2^1, 1^I$ и 1^II

Объяснение полученным результатам можно дать и на языке мультипликаторов. Обозначая мультипликаторы несинфазного цикла 2^1 через $\mu_{1,2(2^1)}$, а несинфазных циклов 1^I и 1^{II} через $\mu_{1,2(1,I,II)}$, можно показать (см. приложение 2), что

$$\mu_{1,2(2^1)}(\lambda, k) = \mu_{2,1(1,I,II)}^2(\lambda, 1-k).$$

Следовательно, если $|\mu_{1,2(2^1)}(\lambda, k)| < 1$ (несинфазный цикл 2^1 устойчив), то и $|\mu_{2,1(1,I,II)}(\lambda, 1-k)| < 1$ (несинфазные циклы периода 1 тоже устойчивы).

Закономерности, обнаруженные при исследовании дискретной модели (2) в области слабой связи, были найдены в реальной осцилляторной системе с непрерывным временем [8]. Физический эксперимент проводился на системе нелинейных электрических маятников (резистивно связанных колебательных контурах с варакторными диодами). Было показано, что виды колебаний и конфигурации бифуркационных линий модели качественно соответствуют обнаруженным в эксперименте. Это дает основания полагать, что полученные закономерности соответствуют и системам с непрерывным временем. Однако, в области очень сильной симметричной связи физический эксперимент на колебательных контурах оказывается трудно реализуемым.

Заключение

Итак, на примере точечных отображений в работе рассмотрены колебательные состояния симметрично связанных систем с удвоением периода. Показаны особенности поведения системы при сильной связи ее элементов и продемонстрированы закономерности изменения несинфазных режимов колебаний при замене значения k коэффициента связи на $1-k$, то есть при переходе от слабой связи к сильной и наоборот.

Результаты, полученные для системы связанных логистических отображений (2) являются общими для более широкого класса систем (1), при условии идентичности функций $f(x_n)$ и $f(y_n)$, демонстрирующих удвоение периода.

Выражаю признательность Б.П. Безручко и В.В. Астахову за плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 96-02-16753, а также при поддержке INTAS, грант 93-2492-ext., в рамках программы Международного центра фундаментальной физики в Москве.

Приложение 1

Введем вместо x_n и y_n новые переменные $u_n = (x_n - y_n)/2$, $v_n = (x_n + y_n)/2$. В этих новых переменных система (2) запишется в следующем виде:

$$u_{n+1} = 2(2k-1)u_n v_n, \tag{П.1.1}$$

$$v_{n+1} = \lambda - v_n^2 - u_n^2.$$

Для цикла периода 1 $u_{n+1} = u_n = u$, $v_{n+1} = v_n = v$ и из (П.1.1) получаем

$$u(1 - 2(2k-1)v) = 0, \tag{П.1.2}$$

$$v^2 + v + u^2 - \lambda = 0.$$

Первое уравнение в (П.1.2) имеет два решения: $u=0$ и $v = 1/[2(2k-1)]$. Случай $u=0$ соответствует синфазному режиму ($x_n = y_n$), при этом из второго уравнения: $v_{1,2} =$

$= [-1 \pm (1+4\lambda)^{1/2}] / 2$. Другое решение соответствует несинфазному режиму. Подставив v во второе уравнение (П.1.2), получим: $u_{1,2} = \pm \{ \lambda - (4k-1) / [4(2k-1)^2] \}^{1/2}$. При $k=1$ $u_{1,2} = \pm (\lambda - 3/4)^{1/2}$ и принимает действительные значения при $\lambda \geq 3/4$.

Для исследования циклов на устойчивость найдем их мультипликаторы. Мультипликаторы цикла периода N являются собственными значениями матрицы монодромии цикла и определяются из уравнения

$$\mu^2 - \mu S + J = 0,$$

где S - след, а J - детерминант матрицы монодромии M , имеющей вид: $M = M_{N-1} M_{N-2} \dots M_0$ [1]. В случае цикла периода 1 для системы (П.1.1) получаем:

$$M = \begin{pmatrix} 2(2k-1)v & 2(2k-1)u \\ -2u & -2v \end{pmatrix}.$$

Обозначив мультипликаторы цикла периода 1 через $\mu_{1,2(1)}$, получим

$$\mu_{1,2(1)} = 2v(k-1) \pm 2[k^2v^2 + u^2(1-2k)]^{1/2}. \quad (\text{П.1.3})$$

Для синфазного цикла 1^0 $u=0$ и $\mu_{1(1^0)} = -2v$, $\mu_{2(1^0)} = 2v(2k-1)$. Таким образом, в интервале положительных λ $v_1 = [-1 - (1+4\lambda)^{1/2}] / 2$ соответствует всегда неустойчивой неподвижной точке, а $v_2 = [-1 + (1+4\lambda)^{1/2}] / 2$ - устойчивой при $\lambda < 3/4$ неподвижной точке (оба мультипликатора при этом по модулю меньше единицы).

Подставляя в (П.1.3) значения v и $u_{1,2}$, соответствующие несинфазному режиму, и обозначая мультипликаторы в точке (v, u_1) через $\mu_{1,2(1a)}$, а в точке (v, u_2) через $\mu_{1,2(1b)}$, получим

$$\mu_{1,2(1a)} = \mu_{1,2(1b)} = (k-1)/(2k-1) \pm \{ [(k-1)/(2k-1)]^2 + 4[k - \lambda(2k-1)^2] / (2k-1) \}^{1/2}. \quad (\text{П.1.4})$$

То есть существуют два несинфазных, симметричных относительно замены u на $-u$ (или x на y и y на x) цикла периода 1, мультипликаторы которых всегда равны. Эти циклы устойчивы в широкой области параметров (рис.7). Например, при $k=1$ $\mu_{1,2(1a,b)} = \pm 2(1-\lambda)^{1/2}$ и циклы 1^a и 1^b устойчивы при $3/4 < \lambda < 5/4$, то есть при тех же значениях λ , что и циклы периода 2 в несвязанной системе.

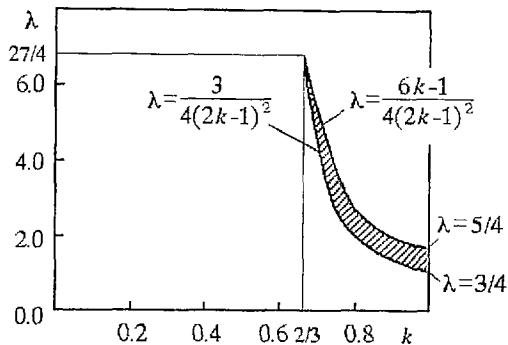


Рис. 7. Область устойчивости несинфазных циклов 1^a и 1^b в интервале значений k от 0 до 1. В заштрихованной области мультипликаторы рассматриваемых циклов по модулю меньше единицы. Границы области устойчивости получены в явном виде из (П.1.4)

Приложение 2

Матрица монодромии цикла периода 2 системы (2) имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 2x_1(k-1) & -2ky_1 \\ -2kx_1 & 2y_1(k-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2(k-1) & -2ky_2 \\ -2kx_2 & 2y_2(k-1) \end{pmatrix},$$

где x_1 , x_2 и y_1 , y_2 - элементы циклов в подсистемах x и y , соответственно. Несинфазный цикл 2^1 является симметричным, и для него: $x_1 = y_2$, $x_2 = y_1$. С учетом этого

$$\mu_{1,2(2i)} = 2k^2(x_1 + y_1)^2 + 4x_1y_1(1-2k) \pm 2k(x_1 + y_1)[k^2(x_1 + y_1)^2 + 4x_1y_1(1-2k)]^{1/2}. \quad (\text{П.2.1})$$

Выразим теперь значения мультипликаторов $\mu_{1,2(2i)}$ только через λ и k . Для этого запишем систему (2) для симметричного несинфазного цикла 2^1

$$x_1 = \lambda - y_1^2 + k(y_1^2 - x_1^2),$$

$$y_1 = \lambda - x_1^2 + k(x_1^2 - y_1^2).$$

Вычитая эти уравнения, получаем: $x_1 + y_1 = 1/(1-2k)$, а складывая: $x_1y_1 = (1-k)/(1-2k)^2 - \lambda$. Подставляя эти выражения в (П.2.1), имеем

$$\begin{aligned} \mu_{1,2(2i)} = & 2k^2/(1-2k)^2 + 4[1-k-\lambda(1-2k)^2]/(1-2k) \pm \\ & \pm 2k/(1-2k)\{[k/(1-2k)]^2 + 4[1-k-\lambda(1-2k)^2]/(1-2k)\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.2})$$

Возводя (П.1.4) в квадрат, окончательно получаем:

$$\mu_{1,2(2i)}(\lambda, k) = \mu_{2,1(1,i)}^2(\lambda, 1-k). \quad (\text{П.2.3})$$

В частном случае, при $k = 0$ из (П.2.2): $\mu_{1,2(2i)} = 4(1-\lambda)$, а при $k = 1$ $\mu_{1,2(1,i)} = \pm 2(1-\lambda)^{1/2}$, то есть выполняется (П.2.3).

Библиографический список

1. Кузнецов С.П. Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 8. С.991.
2. Buskirk R., Jeffries C. Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators // Phys. Rev. A. 1985. Vol.31, № 5. P.3332.
3. Gu Y., Tung M., Yuan J.M., Feng D.H., Narducci L.M. Crises and hysteresis in coupled logistic maps // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol.52, № 9. P.701.
4. Дмитриев А.С., Старков С.О., Широков М.Е. Синхронизация ансамблей диссипативно связанных отображений. Препринт № 9 (609) / Институт радиотехники и электроники РАН. М., 1995. 38 с.
5. Sato K., Aihara T. Numerical study on a coupled-logistic map as a simple model for a predator-prey system // J. Phys. Soc. of Japan. 1990. Vol.59, № 4. P.1184.
6. Reick C., Mosekilde E. Emergence of quasiperiodicity in symmetrically coupled, identical period-doubling systems // Phys. Rev. E. 1995. Vol.52, № 2. P.1418.
7. Crutchfield J.P., Kaneko K. Directions in chaos. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1987. Vol.1. P.272.
8. Астахов В.В., Безручко Б.П., Ерастова Е.Н., Селезнев Е.П. Виды колебаний и их эволюция в диссипативно связанных фейгенбаумовских системах // ЖТФ. 1990. Т.60, вып.10. С.19.
9. Безручко Б.П., Селезнев Е.П., Смирнов Е.В. Эволюция бассейнов притяжения аттракторов симметрично связанных систем с удвоением периода // Письма в ЖТФ. 1995. Т.21, вып.8. С.12.
10. Безручко Б.П., Прохоров М.Д., Селезнев Е.П. Особенности устройства пространства параметров двух связанных неавтономных неизохронных осцилляторов // Письма в ЖТФ. 1996. Т.22, вып.6. С.61.

Институт радиотехники и
электроники РАН, СФ

Поступила в редакцию 18.04.96
после переработки 23.09.96

OSCILLATION TYPES OF DISSIPATIVELY COUPLED PERIOD DOUBLING SYSTEMS AT STRONG COUPLING

M.D. Prokhorov

Oscillation types of two symmetrically coupled identical systems demonstrating period doubling are considered. For the case of dissipative coupling it is shown that out-of-phase oscillation regimes exist not only at weak coupling between subsystems ($k \sim 0$), but also at very strong coupling ($k \sim 1$). In the system parameter space the regions of out-of-phase regimes are symmetrical about $k=0.5$. However, in spite of symmetry the out-of-phase regimes at weak and strong coupling are essentially different.



Прохоров Михаил Дмитриевич родился в 1968 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1992). Работает младшим научным сотрудником в Саратовском филиале института радиотехники и электроники РАН. Область научных интересов - нелинейная динамика, экспериментальное и численное моделирование сложных систем. Имеет 11 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.