Изв.вузов «ПНД», т.4, № 4, 5, 1996 УДК 517.9

ДИНАМИКА ОДНОМЕРНОЙ ЦЕПОЧКИ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ ПОРОГОВОЙ СВЯЗЬЮ

А.А. Короновский

В настоящей работе рассматривается поведение одномерной (полубесконечной или замкнутой в кольцо) цепочки из логистических отображений, связанных друг с другом однонаправленной пороговой связью. Этот тип связи является принципиально новым и его влияние на процессы, происходящие в цепочке, приводит к качественно новому типу динамики, несвойственному цепочкам логистических отображений с «традиционными» типами связей. Показано, что внесенное в цепочку внешнее возмущение, в зависимости от параметров цепочки, может затухать, нарастать, распространяться по цепочке без изменений, а также эволюционировать к устойчивой пространственно-временной структуре - уединенному импульсу. Уединенный импульс не является «стационарным», так как его профиль изменяется с течением дискретного времени либо периодическим, либо хаотическим образом.

Системы с дискретным временем весьма широко изучены физиками и математиками [1,2]. Внимание к системам с дискретным временем определяется, во-первых, их относительной простотой и возможностью их довольно быстрого исследования в широком диапазоне изменения значений управляющих параметров, во-вторых, именно на языке систем с дискретным временем возможно наиболее понятное и «прозрачное» объяснение природы хаотической динамики, сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим [3,4]. Кроме того, на основе отображений, в том числе и на основе логистического отображения, строятся широкие классы связанных отображений, цепочек и решеток отображений, моделирующих распределенные системы и играющих важную роль в понимании динамики подобных систем [5]: подробно исследованы простые системы одномерных отображений, такие как два связанных фейгенбаумовских отображения с однонаправленной [6,7] и взаимной [8,9] связью, а также изучена динамика более сложных систем (одномерных [10,11] и двумерых [12] решеток, и даже сети глобально связанных отображений [13]).

В рамках настоящей работы мы будем рассматривать цепочку (полубесконечную или замкнутую в кольцо) логистических отображений с принципиально новым типом связи, которую мы называем однонаправленной пороговой связью. Динамика подобной цепочки описывается отображениями вида

$$x_{ij+1} = x_{ij}\{a - x_{ij} \pm s\,\mathrm{th}[k(x_{i-1j} - x_s)]\},$$

где i - пространственная координата элемента цепочки, а j - момент дискретного времени. В случае, если цепочка состоит из N элементов и замкнута в кольцо, то имеет место соотношение

$$x_{1j+1} = x_{1j}\{a - x_{1j} \pm s\ \mathrm{th}[k(x_{Nj} - x_s)]\}.$$

Поскольку связь является принципиально новой, следует ожидать, что поведение рассматриваемой цепочки будет отличаться от поведения цепочек логистических отображений с «традиционными» типами связей (например, с диссипативной связью), которые широко исследуются в настоящее время в литературе (см., например, [14]). Выбор параметров a и s осуществляется таким образом, чтобы в отсутствии связи поведение каждого элемента цепочки не демонстрировало никакой сложной динамики. При наличии связи, поведению каждого элемента цепочки соответствует притягивающая точка $x^*_{ij+1}=a-1 \pm s\mathrm{th}[k(x_{i-1j}-x_s)]$ (при $k\to\infty$ $x^*_i=a-1\pm s$), если значение в соседнем $(i-1)$ элементе меньше некоторого порога x_s. При превышении значением x_{i-1j} этого порога, поведению i-го элемента соответствует притягивающая точка $x^*_{ij+1}=a-1\mp s\mathrm{th}[k(x_{i-1j}-x_s)]$ (при $k\to\infty$ $x^*_i=a-1\mp s$). Внимание к этому типу связи объясняется тем, что он является аналогом кооперативного и антагонистического влияния[1] и результаты исследования систем с подобным типом связи могут быть применены к описанию процессов в сложных социально-экономических системах. Далее мы будем рассматривать цепочку, описываемую отображениями вида

$$x_{ij+1} = x_{ij}\{a - x_{ij} + s\ \mathrm{th}[k(x_{i-1j} - x_s)]\},$$

что является аналогом цепочки элементов, каждый из которых оказывает на соседний справа элемент кооперативное воздействие. Каждый элемент может рассматриваться как состояние некоторой отрасли хозяйства (например, объем производства в этой отрасли), а вся цепочка элементов может быть интерпретирована (конечно же, качественно), как состояние нескольких отраслей промышленности, каждая из которых оказывает кооперативное влияние на «соседнюю» отрасль, которая использует продукцию, производимую этой отраслью: например, добывающая промышленность $\Rightarrow$ металургическая$\Rightarrow$ сталелитейная $\Rightarrow$ и так далее. Понятно, что подобное рассмотрение является качественным: мы считаем существенными связи только между «соседними» отраслями и пренебрегаем всеми остальными связями.

Вполне понятно, что если данную полубесконечную цепочку предоставить самой себе, то после переходного процесса в ней установится одно из двух состояний равновесия, в зависимости от значения первого элемента: $x_{ij}^0>x_s$ если $x_{1j}>x_s$ и $x_{ij}^0<x_s$ если $x_{1j}<x_s$. Фактически, подобная цепочка представляет собой

---

[1] В последнее время для моделирования широкого круга явлений получил известность подход [15, 16], предложенный профессором Штуттгартского университета В.Вайдлихом, сущность которого заключается в следующем: для описания рассматриваемой системы вводятся макропеременные, которые характеризуют ее состояние. Эти макропеременные соответствуют наиболее существенным факторам модели и могут оказывать друг на друга кооперативное или антагонистическое взаимовлияние. Вайдлих называет макропеременную x кооперативной по отношению к переменной y (то есть переменная x оказывает на макропеременную y кооперативное воздействие), если x стремится увеличить значение y при больших собственных значениях и уменьшить при малых. Иными словами, кооперативная макропеременная стремится сравнять значение другой переменной, на которую она действует, со своим собственным значением. В случае, когда переменная x подавляет переменную y, если значение x велико, и усиливает, когда x мало (то есть, переменная x стремится противопоставить величину переменной y своей собственной величине), Вайдлих называет переменную x антагонистической по отношению к y.

В своих работах Вайдлих для описания самых различных социальных процессов использует только две макропеременные, что, конечно же, ведет к сильной идеализации: фактически, при описании явлений, происходящих в обществе, учитываются лишь два самых существенных, по мнению автора, фактора, и, в ряде случаев, этого оказывается недостаточно.

В [17] сделана попытка модифицировать предложенную Вайдлихом методику: число переменных (и, соответственно, уравнений) увеличено до трех и несколько по-другому введена связь между макропеременными, что привело к усложнению поведения системы и появлению хаотической динамики. Тем не менее, и в данном случае рассматриваемая модель остается сильно идеализированной. Для более адекватного описания различных социальных систем, включающих в себя много подсистем, необходимо большое число переменных, тем или иным образом связанных друг с другом.

последовательное однонаправленное соединение бистабильных элементов, у которых переход из одного состояния в другое осуществляется за конечный промежуток времени (в данном случае имеется в виду дискретное время). Понятно также, что если на вход подобной цепочки подать какое-либо внешнее воздействие (так как цепочка состоит из бистабильных элементов, то имеет смысл рассматривать в дальнейшем прямоугольный импульс определенной длительности), то от входа цепочки начнет распространяться возмущение, обусловленное этим внешним воздействием. Как будет эволюционировать внесенное в полубесконечную однонаправленную цепочку внешнее возмущение при $t \to \infty$? Изначально мы можем предположить три сценария развития событий: во - первых, внешнее воздействие в виде прямоугольного импульса может начать распространяться почти без искажений с постоянной скоростью в направлении, обусловленном связью (однонаправленой) предыдущего элемента с последующим. (В некотором смысле подобная ситуация аналогична процессам, происходящим в линейных средах без дисперсии и диссипации, хотя в данном случае мы ведем речь только о прямоугольных импульсах.) В этом случае длительность распространяющегося по цепочке импульса (под длительностью распространяющегося импульса мы в настоящей работе понимаем интервал дискретного времени, в течение которого выбранный нами любой элемент цепочки находится в «возбужденном» состоянии, то есть когда $x_{ij} > x_s$, при условии, что при $t=0$ (до внесения в цепочку внешнего возбуждения) в стационарном состоянии $x_{ij} < x_s$) полностью определяется длительностью внесенного возмущения, а амплитуда определяется параметрами цепочки a и s. Подобная ситуация возможна, если передний и задний фронты импульса распространяются с одинаковой скоростью, что, в свою очередь, определяется временем, необходимым для перехода любого элемента цепочки из одного состояния в другое и, в конечном счете, параметрами среды. В случае, если наша система замкнута в кольцо, то внесенный импульс будет циркулировать по цепочке неограниченно долго, при условии, что длина цепочки больше, чем длительность внесенного возмущения, умноженного на скорость распространения импульса: в противном случае все элементы цепочки окажутся в «возмущенном» состоянии.

Во-вторых, может случиться так, что передний фронт импульса распространяется с большей скоростью, чем задний (иными словами, время перехода элемента цепочки из «невозмущенного» состояния в «возмущенное» меньше, чем наоборот); тогда передний фронт импульса «убегает» от заднего и по цепочке распространяется прямоугольный расширяющийся импульс. Если говорить об аналогиях, то ситуация напоминает процесс, происходящий в средах с конвективной неустойчивостью, когда нарастающее возмущение «убегает» из точки рассмотрения, с той лишь разницей, что в подобных средах возмущение нарастает по амплитуде, а в рассматриваемой дискретной однонаправленной цепочке амплитуда возмущения остается неизменной (она определяется параметрами цепочки), а нарастает длительность импульса. Понятно, что в цепочке элементов, замкнутой в кольцо, по истечении некоторого интервала времени передний фронт импульса догоняет свой задний фронт и все элементы оказываются в «возбужденном» состоянии.

Наконец, передний фронт импульса может распространяться медленнее, чем задний, и тогда длительность распространяющегося импульса будет непрерывно уменьшаться до тех пор, пока задний фронт импульса не достигнет переднего фронта, что приведет к схлопыванию импульса. В очередной раз прибегая к аналогии, заметим, что подобная ситуация напоминает процессы в средах с диссипацией, с отличием в том, что в рассматриваемой нами цепочке монотонно убывает длительность распространяющегося импульса при неизменной амплитуде (диктуемой параметрами цепочки), в то время как в диссипативных средах без дисперсии все происходит наоборот: при неизменной длительности импульса монотонно до нуля убывает его амплитуда. Очевидно, что тоже самое происходит и в цепочке, замкнутой в кольцо.

Как следует из проведенного нами исследования, в цепочке (которая, фактически, может рассматриваться как дискретная модель некоторой среды) в зависимости от параметров возможны все три сценария развития событий: рис. 1, *а* иллюстрирует распространение импульса постоянной длительности с постоянной скоростью, рис. 1, *б* показывает уширяющийся импульс, а на рис. 1, *в* показано распространение сжимающегося импульса и его схлопывание. Случай, представленный на рис. 1, *а* поясняется рис. 2, который показывает зависимость скорости распространения прямоугольного импульса V_i и его длительности T_i в элементе цепочки с номером n=750 в зависимости от длительности внешнего воздействия T. Как видно из рис. 2, *а*, скорость распространения импульса V_i не зависит от длительности внешнего возмущения T, а длительность импульса T_i (см. рис. 2,*б*), пришедшего в точку с пространственной координатой n (номер элемента, фактически, является пространственной координатой) линейно связана с длительностью внешнего воздействия T.

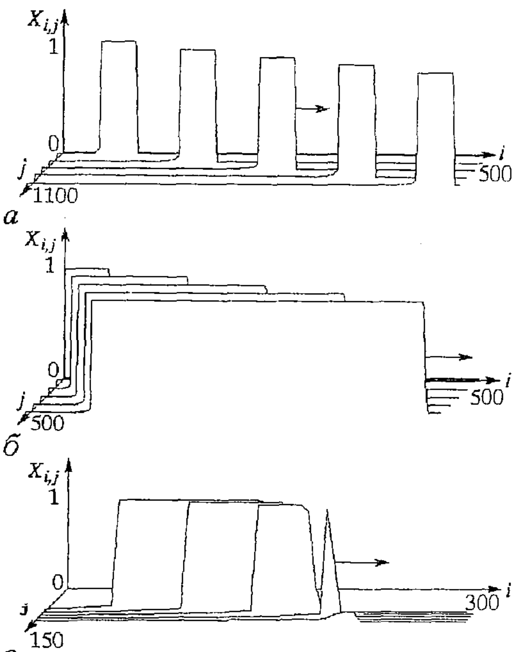

Рис. 1. Распространение внесенного внешнего импульса по одномерной полубесконечной цепочке с однонаправленной пороговой связью при фиксированных параметрах a=1.5, s=0.45, $k\to\infty$ и x_s, равном: *а* - 0.095; *б* - 0.08; *в* - 0.22

Однако, существует еще один возможный сценарий распространения внесенного в цепочку возмущения, который реализуется при значениях параметров a=1.5, s=0.45, $k\to\infty$, $0.096<x_s<0.215$. Задний фронт прямоугольного импульса распространяется быстрее, чем передний, однако, когда задний фронт «настигает» передний, окончательного «схлопывания» импульса не происходит и далее по цепочке распространяется уединенный импульс (рис. 3, *а*). Этот импульс является устойчивым в том смысле, что любое начальное возмущение, внесенное в цепочку, через определенный интервал времени (определяемый длительностью начального возмущения) превращается в этот уединенный импульс. Для того, чтобы в однонаправленной цепочке рассматриваемых элементов возбудить уединенный импульс, необходимо и достаточно внести в нее внешнее возмущение (вообще говоря, произвольного вида) с амплитудой большей, чем x_s, и длительностью, большей, чем длительность уединенного импульса, которая определяется параметрами среды. Заметим, что уединенный импульс нельзя назвать «стационарным» (по аналогии со стационарными волнами в непрерывных средах, см., например, [18]), так как его профили в различные моменты дискретного времени различны. На рис. 3, *б*-*г* показаны

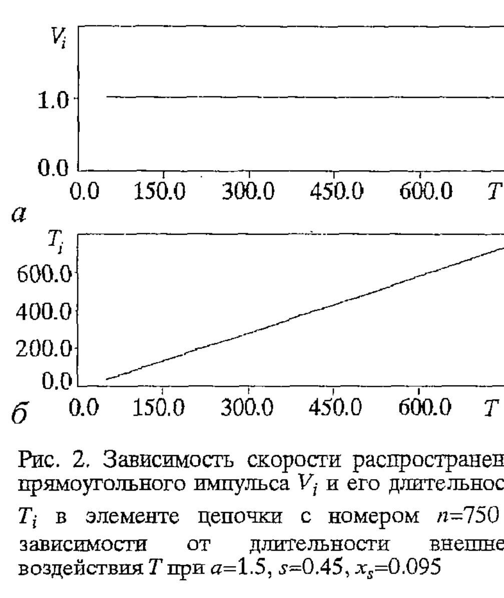

Рис. 2. Зависимость скорости распространения прямоугольного импульса V_i и его длительности T_i в элементе цепочки с номером n=750 в зависимости от длительности внешнего воздействия T при a=1.5, s=0.45, x_s=0.095

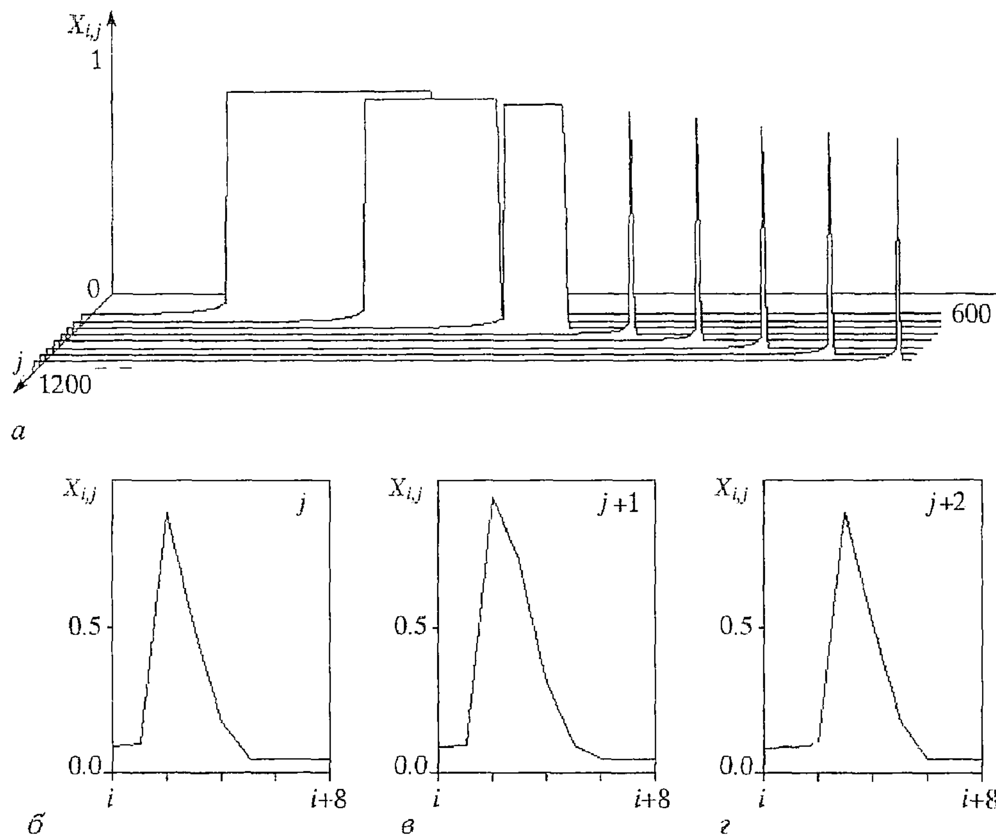

Рис. 3. *Уединенный импульс (а), профили уединенного импульса в моменты дискретного времени j (б), j+1 (в), j+2 (г)*

профили уединенного импульса, распространяющегося по цепочке в три последовательных момента дискретного времени для значения x_s=0.1. Из этих рисунков видно, что в данном случае уединенный импульс является устойчивой пространственной структурой, периодически изменяющейся в дискретном времени с периодом 2. Похожая ситуация имеет место в клеточных автоматах (см., например, об игре «жизнь» [19]). Заметим, однако, что профиль уединенного импульса может изменяться как сложнопериодическим, так и хаотическим образом. На рис. 4 приведены гистограммы для характерных точек профиля импульса для различных значений параметров. Рис. 4,*а* показывает гистограмму для «вершины» уединеного импульса, а рис. 4,*б* - гистограмму для точки уединенного импульса, отстоящей от «вершины» импульса на две пространственные единицы. На рис. 4, *б,г* показаны гистограммы для этих же двух точек при другом значении параметра x_s, а на рис. 4,*д* приведена гистограмма для «вершины» уединенного импульса. Как видно из этого рисунка, в данном случае профиль уединенной волны является устойчивой структурой с хаотической динамикой, распространяющейся по рассматриваемой цепочке.

Если мы интерпретируем цепочку логистических отображений, замкнутую в кольцо и изначально находящуюся в состоянии x_{ij}<x_s, как последовательную цепочку отраслей хозяйства, в которых наблюдается экономический спад, а внесенное внешнее воздействие - как инвестиции (например, государственные) в одну из отраслей, то возможно следующее развитие событий: инвестиции вызывают увеличение объема производства в этой отрасли промышленности, что ведет к увеличению объема производства и в той отрасли промышленности, которая использует продукцию первой отрасли. В результате (в зависимости от параметров) во всех отраслях либо наблюдается экономический подъем, либо

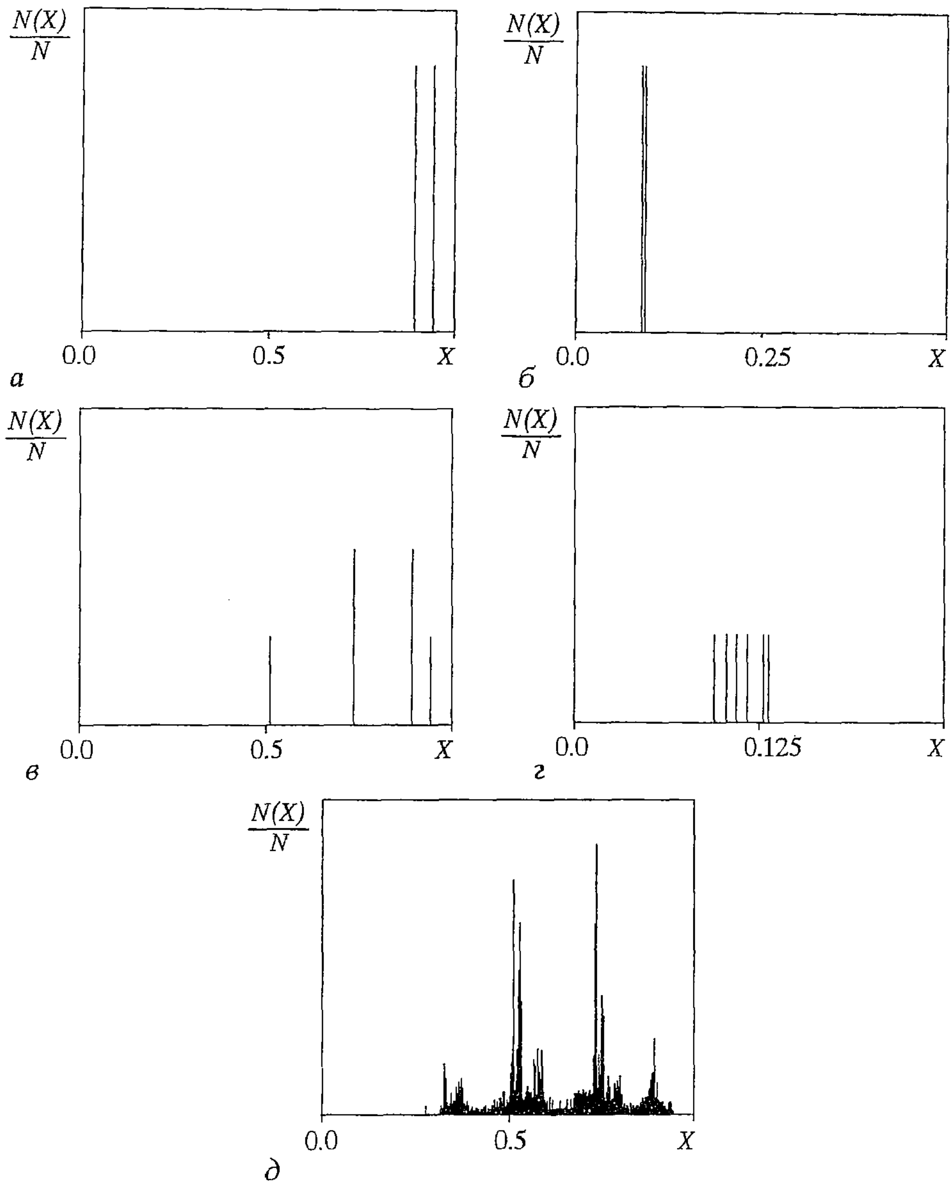

Рис. 4. Гистограммы для отдельных точек уединенного импульса при значениях параметров $a=1.5$, $s=0.45$; *а, б* - $k\to\infty$, $x_s=0.1$; *в, г* - $k\to\infty$, $x_s=0.15$; *д* - $k=100$, $x_s=0.19$

происходят колебания «спад-подъем», либо все инвестиции «уходят в песок» и после некоторого переходного процесса во всех рассматриваемых отраслях объем производства устанавливается на первоначально низком уровне.

Таким образом, предложенная в работе цепочка логистических отображений с однонаправленной пороговой связью может являться качественной моделью, описывающей динамику социально-экономических процессов. Стоит отметить, что использование систем с дискретным временем не только в физических задачах [14], но и в задачах самой различной природы: (экологических [20], биологических [21], экономических [22] и социальных) приобретает в настоящее время все большее распространение.

В заключение автор выражает признательность Д.И. Трубецкову за постоянное внимание и поддержку, а также В.И. Пономаренко за ряд ценных советов, использованных автором при написании настоящей работы.

Библиографический список

1. *Kaneko K.* Theory and aplications of coupled map lattices. Chichester: John Wiley and Sons. Ltd., 1993. 191 p.

2. *Шарковский А.Н., Коляда С.Ф., Сивак А.Г., ФедоренкоВ.В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.

3 *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть I: Сценарий Фейгенбаума // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т.1, № 1,2. С. 15.

4. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть II. Двухпараметрический переход к хаосу // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 3,4. С. 17.

5. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т.34, № 10,11,12.

6. *Кузнецов С.П.* Динамика двух однонаправленно связанных систем Фейгенбаума у порога гиперхаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т.33, № 7. С.788.

7. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критические явления в однонаправленно связанных системах Фейгенбаума // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т.34, № 4. С. 357.

8. *Кузнецов С.П.* Масштабно-инвариантная структура пространства параметров связанных систем Фейгенбаума // ЖТФ. 1985. Т. 55, № 9. С. 1830.

9. *Астахов В.В., Безручко Б.П. и др.* Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 3. С. 60.

10. *Кузнецов С.П.* О критическом поведении одномерных цепочек // Письма в ЖТФ. 1983. Т.9, вып. 2. С. 94.

11. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Пространственные структуры в диссипативных средах у порога возникновения хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1991. Т. 34, № 2. С. 142.

12. *Kaneko K.* // Physica. 1989. Vol. D37. P. 60.

13. *Kaneko K.* // Physica. 1990. Vol. 41D.

14. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Селезнев Е.П.* Мультистабильность и хаос в замкнутой цепочке элементов с удвоением периода (физический и численный эксперимент) // Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. 10-я зимняя школа-семинар: Межвуз. сб. науч. тр. Кн. 2. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1996. С. 51.

15. *Weidlich W.* Stability and cyclicity in social systems // Behavioral Science. 1988. Vol. 33. P. 241.

16. *Weidlich W.* Physics and social science - the approach of synergetics // Phys. Repts. 1991. Vol. 204, № 1. P. 1.

17. *Короновский А.А., Трубецков Д.И.* Нелинейная динамика в действии: Как идеи нелинейной динамики проникают в экологию, экономику и социальные науки. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 1995.

18. *Скотт Э.* Волны в активных нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.

19. *Гарднер М.* Крестики - нолики. М.: Мир, 1988.

20. *Смит Дж.М.* Модели в экологии. М: Мир, 1976.

21. *Kamuro S., Takashi A.* Numerical study on a coupled-logistic map as a simple model for a predator-prey system // Journal of the Physical society of Japan. 1990. Vol.59, № 4. P. 1184.

22. *Аллен Дж.Р.* Математическая экономия. М: Изд-во иностр. лит., 1963.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 1.07.96
после переработки 22.10.96

THE DYNAMICS OF THE ONE-DIMENSIONAL CHAIN OF LOGISTIC MAPS WITH THE UNIDIRECTIONAL THRESHOLD COUPLING

A.A. Koronovskiy

This article deals with the behaviour of the one-dimensional (semi-infinite or ring-shaped) chain of logistic maps connected with each other by the unidirectional threshold coupling. This type of coupling is radically new and its influence upon the chain processes results in the new type of dynamics that is unusual for chains of logistic maps with traditional types of coupling. It has been shown that the inserted exterior perturbation depending on chain parameters can damp, increase, spread without modifications along the chain and evolve to a stable space-time structure, namely, the solitary impulse. This one is not «stationary» for its profile is changed either periodically or chaotically during discrete time.

Короновский Алексей Александрович - родился в 1972 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995). Аспирант кафедры электроники и волновых процессов СГУ. Область научных интересов - нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой жизнедеятельности, в том числе нелинейная динамика социально-экономических процессов. В Издательстве ГосУНЦ «Колледж» вышла монография в соавторстве с профессором Д.И. Трубецковым «Нелинейная динамика в действии» (1996). Автор 2 статей в центральной печати.