

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФАЗЫ В ДИНАМИКЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. Ю. Торонов, В. Л. Дербов, О. М. Приютова

На доступном для широкого круга специалистов по нелинейной динамике уровне изложены основы теории геометрических фаз для динамических систем общего вида и некоторые результаты исследований геометрических фаз в полуклассических и квантовых моделях лазерной физики и нелинейной оптики.

Введение

Проблема геометрической фазы (ГФ) как сфера исследовательской деятельности возникла благодаря работе М. Берри [1], в которой он с неожиданной новизной осветил, казалось бы, давно решенную задачу об адиабатической эволюции квантовой системы. Действительно, еще на заре квантовой механики было известно, что при достаточно медленном изменении окружения, например внешнего поля, система, первоначально находившаяся в некотором стационарном состоянии, продолжает находиться в нем и далее, эволюционируя так, что соответствующая волновая функция и энергия зависят от времени через набор параметров $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots)$. Берри обратил внимание на эволюцию фазы волновой функции такой системы. Действуя в соответствии с предписанием адиабатической теоремы [2], он стал искать решение уравнения Шредингера в виде $|\psi(t)\rangle = |\chi(p(t))\rangle \exp(i\alpha(t))$, где $|\chi(p)\rangle$ - собственный вектор гамильтониана $H(p)$, отвечающий значению энергии $E(p)$. Подставляя $|\psi(t)\rangle$ в уравнение Шредингера, можно получить

$$\alpha(t) = \int_0^t E dt + i \int_C \sum_k \langle \chi | \partial_{p_k} | \chi \rangle dp_k. \quad (1)$$

Первый член в (1), получивший название динамической фазы, ассоциируется с тривиальной зависимостью фазы собственного состояния гамильтониана от энергии. Абсолютно неожиданными оказались свойства второго слагаемого. Действительно, оно представляет собой интеграл по траектории C в пространстве параметров и не зависит явно от времени, но зато зависит от геометрии контура C . В отличие от динамической фазы, значение этой величины никак не реагирует на изменение скорости движения по контуру параметров, но чувствительно к его деформациям. Например, если контур C замкнутый, то движениям по контуру в противоположных направлениях, то есть различным ориентациям контура,

отвечают равные по величине и противоположные по знакам значения этого слагаемого. Из-за чувствительности второго слагаемого к геометрии траектории Берри назвал его геометрической фазой (ГФ).

Вскоре после открытия Берри ГФ были реализованы в эксперименте с поляризованным пучком медленных нейтронов [3]. Нейтроны пропускались через магнитное поле, ориентация вектора напряженности которого менялась вдоль траектории движения частиц. В качестве набора адиабатически меняющихся параметров выступали компоненты вектора напряженности магнитного поля. Непосредственно сравнивались компоненты макроскопического вектора поляризации пучка на входе и выходе устройства с управляемой конфигурацией магнитного поля. По этим данным определялась разность ГФ для собственных функций гамильтониана, отвечающих двум противоположным по знаку проекциям спина нейтронов на заданную ось. Меняя скорость движения частиц и конфигурацию поля, можно было экспериментально изучать свойства ГФ, о которых говорилось выше. Интересным и красивым свойством данной системы является то, что ГФ, приобретенная волновой функцией за время пролета нейтрона через магнитное поле, оказывается равной половине телесного угла, охваченного вращающимся вектором магнитного поля, взятой с обратным знаком.

В дальнейшем ГФ наблюдались и в других «квантовых» экспериментах: в опытах с атомами и молекулами во внешних полях [4], в ядерном магнитном резонансе [5]. Получили новую интерпретацию в терминах ГФ и некоторые известные ранее эффекты, например, эффект Ааронова - Бома [1] и квантовый эффект Холла [6]. Однако, массовый интерес к ГФ, отражаемый потоком публикаций, хлынувших после работы Берри, обусловлен тем, что круг явлений, связанных с ГФ, оказался гораздо шире, чем тот, к которому задача об адиабатической квантовой эволюции имеет непосредственное отношение. Например, выяснилось, что очень похожими на пучки нейтронов свойствами (в смысле ГФ) обладает классический поляризованный свет. Именно, известно что всякому поляризационному состоянию поперечной волны можно поставить в соответствие точку на единичной двумерной сфере, так что, например, полюсам соответствуют состояния круговой поляризации, экватору - линейной, остальным точкам - некоторые состояния эллиптической поляризации с различными параметрами эллипса [7] (подробнее об этом см. ниже). С помощью специальных оптических элементов, таких как, например, двулучепреломляющие и поляризующие пластинки, можно изменять состояние поляризации. Таким изменениям соответствуют перемещения изображающей точки по сфере вдоль дуг большого круга, соединяющих начальную и конечную точку. Как выяснилось [8], при циклическом изменении состояния поляризации у световой волны возникает ГФ, равная взятой с обратным знаком половине телесного угла Ω , охваченного на сфере контуром, соответствующим эволюции поляризационного состояния.

Как динамический хаос несколько лет назад, так и ГФ сегодня находят в системах, перечень которых стремится к бесконечности. Аналогия с динамическим хаосом не случайна. Действительно, концепция ГФ является объединяющей для множества, казалось бы, еще более разнородных систем, чем те, которые объединяет концепция странного аттрактора. В соответствии с мультидисциплинарностью темы ГФ, к настоящему времени уже имеется ряд посвященных ей тематических сборников [9,10] и обзоров [11-13]. Однако, ни один из них специально не освещает проблему ГФ ни в нелинейных оптических системах, ни в нелинейной динамике вообще (за исключением очень краткого обзора [13], в котором излагаются лишь некоторые формально-математические аспекты ГФ в моделях нелинейной оптики). Между тем, эволюционность - главное обстоятельство, сопровождающее появление ГФ, - наиболее существенно и интересно проявляется именно в нелинейных системах. С другой стороны, понятие фазы ассоциируется с колебательными процессами, характерными, в частности, для нелинейных систем радиофизики, электроники, оптики. Среди них выделяются такие традиционные объекты исследования нелинейной динамики, как лазеры и другие нелинейные оптические системы.

В данной работе сделана попытка с единых позиций изложить физические принципы и результаты, относящиеся к ГФ в полуклассических и квантовых системах нелинейной оптики. Для этого в 1-м разделе вводятся основные понятия, характеризующие ГФ в динамических системах общего вида. 2-й раздел посвящен введению в проблематику ГФ для нелинейных оптических систем на примере полуклассических моделей лазеров. Некоторые результаты исследования проявлений ГФ в динамике лазеров изложены в 3-м и 4-м разделах. В 5-м разделе рассмотрена проблема ГФ у сжатых состояний света.

Авторы стремились по возможности учесть интересы людей, занимающихся нелинейной динамикой, но не обязательно являющихся специалистами в области ГФ, лазерной физики или квантовой оптики.

1. Геометрические фазы в квантовых и классических динамических системах

Чтобы выяснить природу аналогии между различными системами, в которых можно наблюдать ГФ, следуя работам [14-17], рассмотрим динамическую систему, состояние которой описывается некоторым комплексным вектором $|\psi\rangle$. Это может быть квантовая система, волновое поле, система осцилляторов и т.п. Вектор $|\psi\rangle$ может быть представлен конечным набором комплексных чисел, как в случае спиноров, или бесконечным, как в случае волнового поля. Значения физических величин, измеряемых на опыте, для систем рассматриваемого типа обычно выражаются через $|\psi\rangle$ с помощью операции скалярного произведения $\langle\psi|\chi\rangle$, определенной в пространстве состояний \mathcal{N} . Например, для конечномерных векторов $|\psi\rangle=(\psi_1,\dots,\psi_n)$ и $|\chi\rangle=(\chi_1,\dots,\chi_n)$ $\langle\psi|\chi\rangle=\psi_1^*\chi_1+\dots+\psi_n^*\chi_n$. В случае волнового поля, когда $|\psi\rangle=\psi(\mathbf{r},t)$, - функция координат и времени, $\langle\psi|\chi\rangle=\int\psi^*\chi d^3r$. Примерами выражений физических величин с помощью скалярного произведения являются энергия квантовой системы $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ (\hat{H} - оператор Гамильтона), $\langle\psi|\psi\rangle$ - измеряемая с помощью идеального широкоапертурного фотоприемника интегральная мощность светового пучка с квазиплоским фронтом и поперечным распределением поля $\psi(\mathbf{r})$.

Пусть динамика системы описывается эволюционным уравнением вида

$$i\partial_t|\psi\rangle=\hat{U}|\psi\rangle, \quad (2)$$

где \hat{U} - некоторый оператор, который, возможно, зависит от $|\psi\rangle$. Такой вид имеют многие уравнения как линейной, так и нелинейной математической физики, например, уравнение Шредингера, нелинейное уравнение Шредингера, обобщенное уравнение Гинзбурга - Ландау. Все эти уравнения инвариантны относительно замены $|\psi\rangle\rightarrow|\psi\rangle\exp(i\alpha)$ ($\alpha=\text{const}$), что отражает свойство однородности времени. Одним из следствий этого свойства является то, что векторы состояний, различающиеся только фазовыми множителями, описывают состояния системы с одними и теми же значениями физических величин. Поэтому дополнительно к пространству векторов состояний \mathcal{N} можно ввести так называемое пространство лучей \mathcal{P} , которое получается из \mathcal{N} объединением всех его точек, различающихся только фазой вектора состояния. Название «пространство лучей» ассоциируется с математической процедурой проективного отображения

$$\Pi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}, \quad (3)$$

«генерирующего» точку пространства \mathcal{P} из «луча» - множества точек в \mathcal{N} , различающихся только фазой.

В отличие от пространства \mathcal{N} , каждой точке пространства \mathcal{P} соответствует только одно физическое состояние. Поэтому пространство \mathcal{P} иначе называют пространством физических состояний. В квантовой механике представлению состояния системы в \mathcal{P} -пространстве отвечает представление матрицы плотности.

Из сказанного не следует, однако, что степень свободы, связанная с фазой вектора состояния, лишь математическое украшение. Хотя абсолютная фаза и не имеет физического смысла, разность фаз состояний - физически измеримая величина. Примером является разность фаз двух волновых фронтов лазерного пучка, измеримая по интенсивности суммарного сигнала. В квантовой механике известно явление интерференции вырожденных атомных состояний [18]. Предположим что мы можем контролировать физическую величину

$$h(t) = \text{Re}[\langle \psi | \dot{\psi} \rangle^{-1} \langle \psi | \hat{U} | \dot{\psi} \rangle]. \quad (4)$$

Например, для квантовой системы это значение энергии. Вместо $|\psi\rangle$ можно использовать новый вектор состояния

$$|\phi\rangle = |\psi\rangle \exp(i \int_0^t h(\tau) d\tau). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (2), получим

$$i \partial_t |\phi\rangle = (\hat{U} - h) |\phi\rangle. \quad (6)$$

Умножая обе части этого уравнения скалярно на $|\phi\rangle$, получим

$$\text{Im}(\langle \phi | \partial_t |\phi\rangle) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) выражает закон, которому подчиняется эволюция вектора состояния. Заметим, что в уравнении (7) не содержится «следов» оператора \hat{U} или каких-либо иных признаков динамической системы, его породившей.

Предположим, что за некоторое время эволюции t_0 система вернулась в состояние $|\phi(t)\rangle$, отличающееся от исходного $|\phi(0)\rangle$ фазой γ . Рассмотрим контур ΓT в \mathcal{N} , образованный траекторией T эволюции вектора $|\phi(t)\rangle$ ($0 < t < t_0$) и замыкающей кривой Γ : $|\phi(t_0)\rangle \exp(i\beta(s))$, где функция $\beta(s)$ непрерывно меняется от 0 до γ , когда параметр s пробегает некоторый интервал на вещественной оси. Рассмотрим величину

$$- \oint_{\Gamma T} \text{Im}[\langle \phi | \dot{\phi} \rangle^{-1} \langle \phi | \partial_s |\phi\rangle] ds. \quad (8)$$

Ее легко вычислить, если учесть, что подынтегральная функция равна нулю на траектории T согласно (7), а $\int_{\Gamma} = \gamma$. Таким образом, значение разности фаз начального и конечного состояний определяется значением (8). При этом выражение (8) - чисто геометрическое в том смысле, что оно не содержит времени и зависит только от геометрии контура в \mathcal{N} . Кроме того, легко проверить, что значение этой величины инвариантно относительно калибровочного преобразования $|\phi(s)\rangle \rightarrow |\phi(s)\rangle \exp(i\eta(s))$, где $\eta(s)$ - непрерывная функция параметра s . Варьирование $\eta(s)$ деформирует траекторию в \mathcal{N} , но не меняет ее проекцию в \mathcal{P} . Поэтому интеграл в (8) можно рассматривать и как интеграл по кривой в пространстве лучей, причем при циклической эволюции эта кривая замкнута. Заметим, что согласно теореме Стокса [19], криволинейный интеграл в (8) можно преобразовать в интеграл по поверхности, охваченной контуром ΓT .

В качестве примера рассмотрим системы с двумерным комплексным вектором состояния $|\psi\rangle = (x_1, x_2)$. К таковым относятся квантовые частицы со спином $1/2$ (в частности, нейтроны) и поляризованный свет. Чисто алгебраическим является тот факт, что всякую пару комплексных чисел можно представить в виде

$$x_1 = (2\rho)^{1/2} \cos(\theta/2) \exp[i(\Theta)], \quad x_2 = (2\rho)^{1/2} \sin(\theta/2) \exp[i(\Theta + \varphi)], \quad (9)$$

где $\rho = (|x_1|^2 + |x_2|^2)/2$, Θ - абсолютная фаза вектора $|\psi\rangle$. Если рассматривать ρ , θ и φ как радиус, полярный и азимутальный углы некоторой сферической системы координат, то с точностью до абсолютной фазы состояние системы можно отождествить с точкой в трехмерном пространстве, которое в данном случае и есть пространство лучей. Заметим, что так как $\operatorname{tg}(\theta/2) = x_2/x_1$, а $x_1^* x_2 = |x_1||x_2| \exp(i\varphi)$, полярный угол θ характеризует отношение модулей чисел x_1 и x_2 , а азимутальный угол φ - разность их фаз. Вычисляя по формуле (8) ГФ, соответствующую некоторой циклической эволюции рассматриваемой системы, можно получить

$$\gamma = -\oint_{\Gamma} \sin^2(\theta/2) d\varphi. \quad (10)$$

В этом выражении нетрудно узнать взятую с обратным знаком половину телесного угла, охваченного траекторией системы в пространстве лучей. Напомним, что величина телесного угла есть площадь соответствующей «меньшей» области на единичной сфере, взятая со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от направления обхода.

Формула (10) объясняет тот факт, что в экспериментах по циклическому преобразованию состояния поляризации света ГФ оказывается равной $-\Omega/2$. В случае же нейтронов, медленно пролетающих через геликоидальное магнитное поле, параметры θ и φ , определяющие их спиновое состояние, взаимно однозначно и непрерывно связаны с направлением магнитного поля [3], которое тоже может быть задано точкой на двумерной сфере. Так как пространство физических состояний \mathcal{P} и пространство параметров (направлений поля) в данном случае эквивалентны (связаны взаимно однозначным и непрерывным отображением), ГФ также оказывается равной половине телесного угла, охваченного вектором напряженности магнитного поля, взятой со знаком «минус».

Таким образом, способность физической системы демонстрировать ГФ связана не с ее динамическими свойствами, а с геометрией ее пространства состояний. Дифференциально-геометрические аспекты ГФ, впервые продемонстрированные Саймоном [6], впоследствии обсуждались в многочисленных работах математического характера (см., например, обзор [11]), детальное рассмотрение которых выходит за рамки данной работы. Отметим лишь, что на языке геометрии уравнение (7) выражает условие «горизонтальности» эволюции вектора состояния, то есть трансверсальности вектора скорости $d_t|\psi\rangle$ к направлению вдоль луча, считающегося «вертикальным». Возникновение ГФ, то есть «вертикального» смещения в результате «горизонтальной» эволюции вдоль кривой в \mathcal{N} , которой в \mathcal{P} соответствует замкнутая кривая, обусловлено тем, что хотя пространства векторов состояний \mathcal{N} и физических состояний \mathcal{P} и связаны операцией проектирования (3), пространство \mathcal{N} не может быть получено из \mathcal{P} прямым произведением его на луч.

Следует осознавать, что геометрические особенности математических моделей рассматриваемых систем, такие как наличие пространств \mathcal{N} и \mathcal{P} и нетривиальность топологической связи между ними, отражают их физические свойства, а именно - наличие фазы как особой физической характеристики системы. Именно осознание «геометрической» сущности фазы Берри привело авторов работ [15-17] к пониманию возможности их реализации в нелинейных, в том числе и диссипативных [16,17], динамических системах. Действительно, описанными свойствами обладают многие системы нелинейной оптики, электроники СВЧ и т.д. При этом в отличие от пассивных систем, в которых динамика вектора состояния определяется изменением внешнего окружения, в нелинейных системах возможны динамические режимы, обусловленные «внутренними» свойствами этих систем. Поэтому особенности поведения ГФ в

таких режимах отражают геометрию соответствующих множеств в фазовом пространстве.

Однако, для нелинейной системы обсуждавшийся до сих пор случай циклической эволюции является лишь одним из возможных, наряду с квазипериодическим и хаотическим видами установившихся движений. Поэтому введенное выше для случая циклической эволюции понятие ГФ и формула для ее вычисления требует обобщения. Прежде всего, необходимо обобщить понятие разности фаз двух векторов состояний для произвольных состояний, то есть различающихся не только фазой, но и другими параметрами. Впервые оно было введено Панчратнамом ([20], см. также в [10]) для состояний классического поляризованного света, а затем обобщено на случай систем общего вида (2) в [21]. В общем случае разность фаз векторов состояний $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$ определяется фазой комплексного числа $\langle\phi_1|\phi_2\rangle$. Мотивировка этого определения такова: два состояния $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$ «синфазны», если физическая величина $\langle\phi_1+\phi_2|\phi_1+\phi_2\rangle$ максимальна по всем возможным значениям фаз векторов ϕ_1 и ϕ_2 , что достигается при $\arg(\langle\phi_1|\phi_2\rangle)=0$. Далее, в работе [21] было показано, что в случае, когда эволюция вектора состояния подчиняется закону (7), разность фаз двух векторов состояний, относящихся к различным моментам времени и различным физическим состояниям (как фаза числа $\langle\phi_1|\phi_2\rangle$), может быть определена по той же формуле (8), где под кривой Γ , замыкающей контур, следует понимать кривую в \mathcal{N} , проецируемую отображением (3) на геодезическую в \mathcal{P} . Отметим еще раз, что этот же интеграл может быть рассмотрен как интеграл в \mathcal{P} . В частном случае системы, характеризуемой двумерным вектором состояния, геодезическая - это просто прямая, соединяющая начальную и конечную точку в трехмерном пространстве. При вычислении ГФ по площади радиальной проекции контура в \mathcal{P} на единичную сферу (что удобно из-за наглядности метода) следует иметь в виду, что прямая проецируется на дугу большого круга.

2. Геометрические свойства полуклассических моделей лазеров

В полуклассической теории [23,24] поле излучения лазера считается классическим и описывается напряженностью электрического поля \mathcal{E} (влияние магнитного поля на процессы в лазере обычно пренебрежимо мало), являющейся функцией координат и времени. Так как для работы лазера дискретность уровней энергии активной среды является существенной, состояние активной среды описывается квантовомеханически с помощью матрицы плотности. Через матрицу плотности выражается дипольный момент единицы объема вещества, который входит в волновое уравнение для \mathcal{E} .

Для динамики лазеров характерным является наличие двух резко различающихся временных и пространственных масштабов: высокочастотного и низкочастотного. Высокочастотный (оптический) определяется частотой рабочего перехода ω_0 и соответствующей ей длиной волны. Низкочастотный (от 10 до 100 МГц) соответствует процессам перекачки энергии из излучения в активную среду и обратно. В экспериментальных исследованиях динамики лазерного излучения в качестве регистрирующих приборов используются квадратичные по полю фотоприемники с конечным временным и пространственным разрешением. Это означает, что наблюдаемой величиной является

$$I(t) = \int_S \vec{\mathcal{E}}^2 dS, \quad (11)$$

где интегрирование ведется по фоточувствительной поверхности приемника, а черта над подынтегральным выражением означает усреднение по времени. Это

усреднение производится на некотором характерном для приемника интервале времени, которое обычно значительно превышает период высокочастотных (оптических) колебаний, но мало по сравнению с характерным временным масштабом изменения огибающей. Иначе говоря, высокочастотный масштаб является недоступным для данного типа регистрирующих приборов. Это обстоятельство побуждает к выводу уравнений, описывающих динамику лазера непосредственно в терминах наблюдаемых пространственно-временных изменений, что достигается введением «медленных» комплексных амплитуд поля $E(t)$ и дипольного момента $P(t)$

$$(\mathcal{E}, \mathcal{P}) = (E, P) \exp(i\omega_0 t - ikz) + \text{к.с.} \quad (12)$$

Физически комплексность E и P выражает тот факт, что не только амплитуда колебаний поля и дипольного момента, но и их частота могут медленно меняться во времени и в пространстве. При этом абсолютные фазы амплитуд поля и дипольного момента наблюдаемыми не являются. Действительно, используя (12), получим

$$\mathcal{E}^2 = 2|E|^2 + E^2 \exp(2i\omega_0 t - 2ikz) + \text{к.с.}$$

Усреднение по времени в (11) обращает в ноль быстро осциллирующее слагаемое с $\exp(2i\omega_0 t - 2ikz)$, так что наблюдаемой является величина $|E|^2$, нечувствительная к фазе. Однако разность фаз α двух комплексных амплитуд E_1 и E_2 , соответствующих двум сигналам, может быть оценена по интенсивности суммарного сигнала

$$I_{1,2} = \int_S (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 dS = \int_S |E_1 + E_2|^2 dS = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} \cos \alpha. \quad (13)$$

Подставляя (12) в волновое уравнение и уравнения для элементов матрицы плотности, можно получить так называемые уравнения Максвелла - Блоха [24] для медленных амплитуд E и P и разности заселенностей рабочих уровней N

$$i\partial E/\partial t = (\omega_0/2 - i2\pi\sigma)E + [c^2/(2\omega_0)]\nabla^2 E + 2\pi\omega_0 P, \quad (14)$$

$$i\partial P/\partial t = (\Delta_\omega - i\tau^{-1})P - (|\mu|^2/h)ED, \quad (15)$$

$$\partial D/\partial t = (D_0 - D)/T + (2i/h)(E^*P - EP^*), \quad (16)$$

где τ , T и μ - спектроскопические константы, σ - скорость затухания поля в резонаторе, D_0 - ненасыщенная инверсия, создаваемая внешним источником энергии в отсутствие поля, Δ_ω - разность частот резонатора и рабочего перехода. Уравнения (14)-(16) инвариантны относительно преобразования

$$(E, P) \rightarrow (E, P) \exp(i\alpha) \quad (17)$$

в соответствии с ненаблюдаемостью абсолютных фаз E и P .

Фазовое пространство лазера представляет собой бесконечномерное пространство, каждая точка которого соответствует определенной «мгновенной» комбинации трех функций пространственных координат: E , P и D . Если же ограничиться подпространством \mathcal{N} этого пространства, определяемого всевозможными комбинациями двух функций E и P , то можно видеть, что это подпространство обладает всеми описанными в разделе 1 свойствами, необходимыми для возможности реализации ГФ.

Заметим, что система уравнений (14), (15) имеет вид (2), где вектор состояния $|\psi\rangle$ определяется парой функций E и P . Для того, чтобы использовать описанные в разделе 1 формальные выражения для ГФ в лазере, необходимо определить скалярное произведение в пространстве \mathcal{N} . Естественной формой такого определения является

$$\langle \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle = \int_V [E_\alpha^*(\mathbf{r})E_\beta(\mathbf{r}) + P_\alpha^*(\mathbf{r})P_\beta(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r}. \quad (18)$$

Это определение находится в соответствии с выражениями для энергии электромагнитных колебаний в среде ($W \sim \langle \psi | \psi \rangle$) и других интегральных характеристик поля. Вектор состояния можно «подчинить» уравнению (7) с помощью преобразования (5), где h определяется согласно (4). Тогда разность фаз векторов состояния $|\psi(t_1)\rangle$ и $|\psi(t_2)\rangle$ является чисто геометрической и может быть вычислена по формуле (8).

Итак, свойства фазового пространства лазера позволяют поставить вопрос о возможности реализации ГФ. Физическими предпосылками для этого являются наличие у поля и дипольного момента медленных амплитуды и фазы, и ненаблюдаемость оптических осцилляций этих переменных.

Экспериментальные методы анализа фазовой динамики поля в лазере основаны на наблюдении смешанного сигнала от двух полей, который, в соответствии с формулой (13), чувствителен к разности фаз. При этом смешиваются либо сигналы от исследуемого лазера, относящиеся к различным моментам времени и разделенные с помощью системы задержки (гомодинирование), либо сигнал от исследуемого лазера и монохроматический сигнал от дополнительного источника (гетеродинирование). Гетеродинирование позволяет отслеживать эволюцию фазы поля во времени в системе отсчета, связанной с линейно растущей фазой опорного монохроматического сигнала [25]. При этом изменению частоты несущего сигнала на величину $\delta\omega$ соответствует «калибровочное» преобразование амплитуд поля и дипольного момента

$$(E, P) \rightarrow (E, P) \exp(i\delta\omega t). \quad (19)$$

Прежде чем перейти к вопросу о проявлениях ГФ в свойствах излучения лазеров, рассмотрим применение введенных выше понятий для некоторых стандартных ситуаций, когда общая система уравнений Максвелла - Блоха (14)-(16) сводится к уравнениям другого вида.

Для моделирования динамики лазеров часто используется разложение функций E , P и D по системе ортогональных функций $\chi_n(\mathbf{r})$, отвечающих модам пустого резонатора

$$\{E, P, D\} = \sum_n \{E_n(t), P_n(t), D_n(t)\} \chi_n(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Получающаяся при этом система дифференциальных уравнений для $E_n(t)$ и $P_n(t)$ по-прежнему имеет вид (2), где вектор состояния $|\psi\rangle$ представлен совокупностью комплексных чисел E_n, P_n . В соответствии с этим подстановка (20) в (18) дает выражение для скалярного произведения

$$\langle \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle = \sum_n E_{n\alpha}^* E_{n\beta} + P_{n\alpha}^* P_{n\beta}. \quad (21)$$

Часто встречается ситуация, когда характерное время релаксации дипольного момента τ в (15) мало по сравнению с характерным временем изменения амплитуды поля. В этом случае в (15) можно пренебречь производной по времени и выразить P как функцию E и D . В этом случае вектором состояния является сама функция $E(\mathbf{r}, t)$ аналогично квантовомеханической волновой функции в координатном представлении. При этом скалярное произведение может быть определено по аналогии с (18) или с (21), если используется модовое представление.

3. Геометрические фазы в кольцевом лазере с одной бегущей волной

Одной из простейших моделей, описывающих режимы пульсаций излучения в лазере, является система полуклассических уравнений для одномодового

кольцевого лазера с однородно уширенной линией усиления в режиме Однонаправленной генерации [25-28]. Такой режим может быть осуществлен введением в резонатор лазера селективирующего элемента, «прозрачного» для волны, бегущей в одном направлении, и подавляющего генерацию встречной волны. Уравнения динамики данного лазера могут быть получены из системы (14)-(16). Эти уравнения с точностью до линейной замены переменных эквивалентны уравнениям комплексной модели Лоренца (КМЛ) [29], которые имеют вид

$$dx/dt = -k(x - y), \quad (22)$$

$$dy/dt = -(1 - i\delta)y + (r - z)x, \quad (23)$$

$$dz/dt = -bz + 1/2(x^*y + xy^*). \quad (24)$$

Здесь комплексные переменные x и y - безразмерные амплитуды поля и дипольного момента, вещественная переменная z соответствует разности заселенностей (инверсии), параметры k и b - соответственно, скорости релаксации поля и разности заселенностей, выраженные в единицах скорости релаксации дипольного момента, δ - отстройка, то есть разность частот резонаторной моды и частоты перехода между рабочими атомными уровнями, r - безразмерная мощность накачки. КМЛ относится к числу весьма популярных в нелинейной динамике моделей (см., например, работу [27] и обширную библиографию к ней).

Согласно (5),

$$h(t) = [\delta|y|^2 - (i/2)(k + z - r)(x^*y - xy^*)](|x|^2 + |y|^2)^{-1}. \quad (25)$$

Исключая динамическую фазу, получим вектор состояния, эволюция которого удовлетворяет уравнению (7),

$$|\phi(t)\rangle = \exp(-i\int_0^t h(\tau)d\tau) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Динамика $X(t)$ и $Y(t)$ описывается системой уравнений

$$dX/dt = -(k - ih)X + kY, \quad (27)$$

$$dY/dt = -(1 - i\delta - ih)Y + (r - z)X, \quad (28)$$

$$dz/dt = -bz + 1/2(X^*Y + XY^*). \quad (29)$$

Поскольку в данном случае вектор состояния двумерный, то, как показано в разделе 1, разность фаз $\gamma = \arg(\langle\phi(t_1)|\phi(t_2)\rangle)$ равна величине телесного угла в пространстве лучей, охватываемого контуром, составленным из куска траектории между точками, соответствующими моментам времени t_1 и t_2 , и отрезка прямой, соединяющего эти точки (или площади на единичной сфере, охватываемой радиальной проекцией контура). В соответствии с (9), декартовы координаты в пространстве лучей суть

$$\zeta_1 = (x^*y + xy^*)/2, \quad \zeta_2 = -i(x^*y - xy^*)/2, \quad \zeta_3 = (|x|^2 - |y|^2)/2. \quad (30)$$

С помощью системы уравнений (22)-(24) можно получить уравнения движения в этих координатах

$$d\zeta_1/dt = -(k+1)\zeta_1 - \delta\zeta_2 - (k - r + z)\zeta_3 + (k+r - z)R, \quad (31)$$

$$d\zeta_2/dt = -(k+1)\zeta_2 + \delta\zeta_1, \quad (32)$$

$$d\zeta_3/dt = -(k+1)\zeta_3 + (k - r + z)\zeta_1 - (k-1)R, \quad (33)$$

$$dz/dt = -bz + \zeta_2, \quad (34)$$

где $R=(\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2)^{1/2}=(|x|^2+|y|^2)/2$. Решение системы уравнений (22)-(24), описывающее режим генерации излучения с постоянной во времени интенсивностью, имеет вид

$$x(t) = a \exp(i\omega t), \quad (35)$$

$$y(t) = (1+i\omega/k)a \exp(i\omega t), \quad (36)$$

$$z(t) = |a|^2/b, \quad (37)$$

где

$$|a|^2 = b(r - r_c), \quad (38)$$

$$\omega = k\delta/(k+1), \quad (39)$$

$$r_c = 1 + \delta^2/(k+1)^2. \quad (40)$$

Ему соответствует неподвижная точка в \mathcal{P} . Поскольку в этом случае траектория в \mathcal{P} не охватывает какого-либо телесного угла, нет и ГФ. Это согласуется с тем, что для рассматриваемого решения динамическая частота, определяемая выражением (25), совпадает с частотой ω в (39), что можно проверить подстановкой x , y и z из (35)-(37) в (25).

На рис. 1, а показан фазовый портрет циклического (периодического в \mathcal{P})

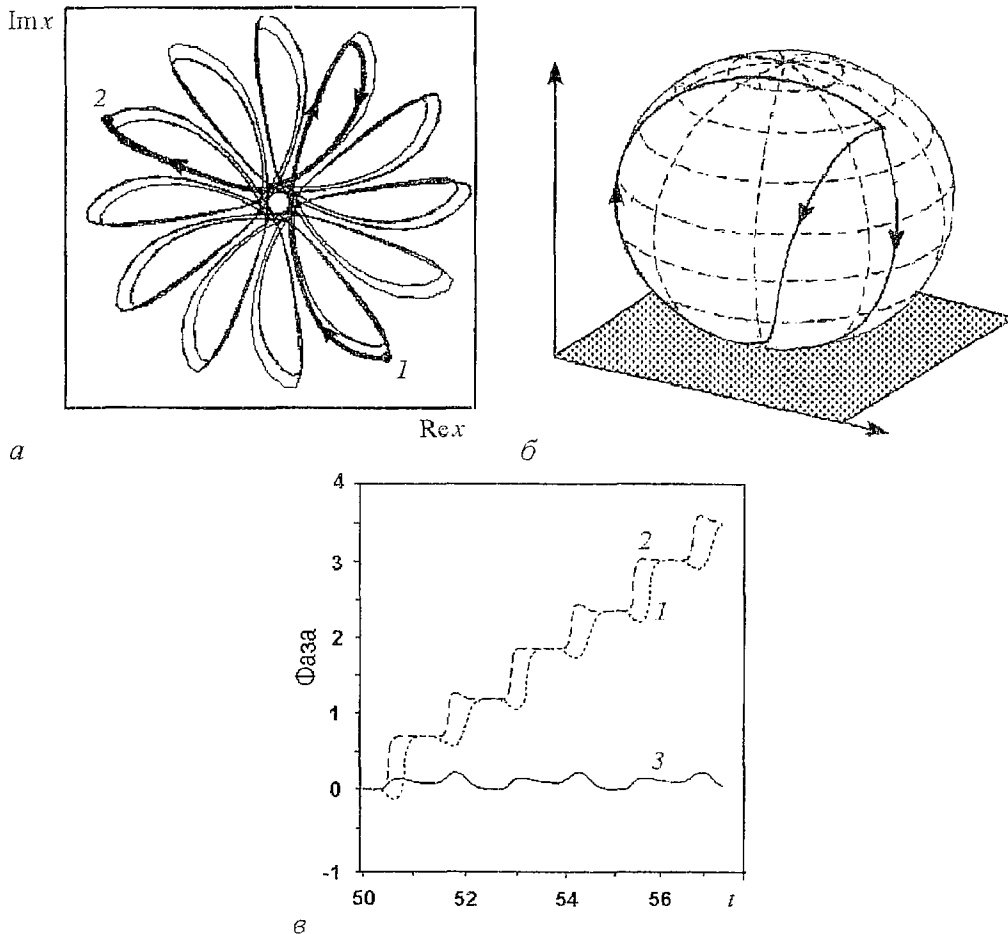


Рис. 1. Периодическое в \mathcal{P} решение системы (27)-(29), полученное численно при $k=3$, $b=0.1$, $r_1=30$, $r_2=0$, $\delta=1$: а - фазовый портрет в комплексной плоскости X ; б - проекция траектории в \mathcal{P} на единичную сферу; в - эволюция фаз: фазы Панчаратнама (1), фазы переменной X (2) и динамической фазы (3)

решения системы уравнений (27)-(29) на плоскости комплексной амплитуды поля X . Толстая линия, соединяющая точки 1 и 2, показывает путь, пройденный изображающей точкой за один произвольно выбранный период движения в \mathcal{P} . Разность фаз между начальным и конечным положениями изображающей точки на X -плоскости равна площади, охватываемой проекцией цикла в \mathcal{P} на единичную сферу (рис. 1,б). Следует иметь в виду, что при вычислении набегу ГФ за период учитываются площади на единичной сфере, соответствующие как внешней, так и внутренней петлям цикла удвоенного периода, показанного на рис. 1, б. На рис. 1, в показаны временные реализации ГФ γ (кривая 1) и фазы Θ переменной X (кривая 2), измеренных в единицах π . Можно видеть, что обе фазы имеют равные набегу за период \mathcal{P} -цикла, хотя их набегу за произвольные интервалы времени могут различаться. Такое поведение фаз поля и дипольного момента согласуется с тем, что полюсы единичной сферы в \mathcal{P} лежат вне области, охватываемой радиальными проекциями траекторий КМЛ, так что при полном обходе вдоль цикла набегу разности фаз X и Y , соответствующий смещению в азимутальном направлении по сфере, равен нулю.

В случае хаотического режима (рис. 2) физический смысл имеют только средние набегу фаз $\gamma(t)$ и $\Theta(t)$ за единицу времени, то есть средние (по времени)

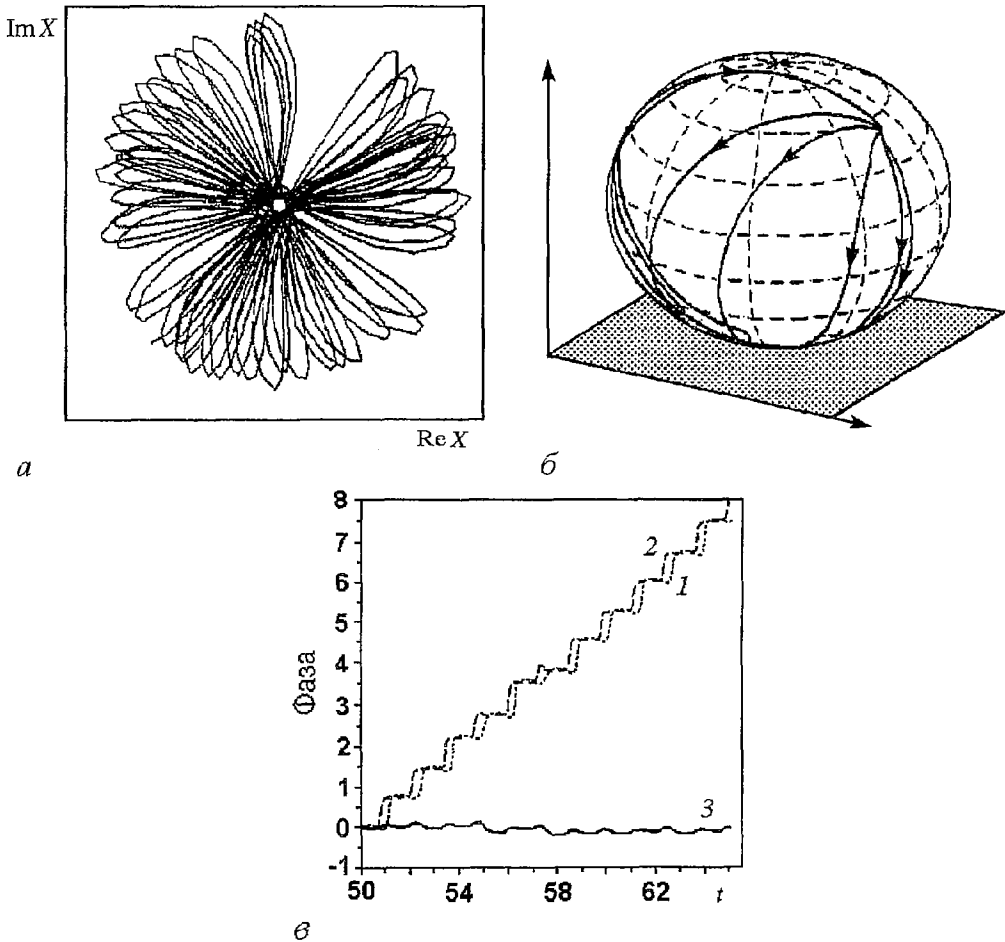


Рис. 2. Хаотическое в \mathcal{P} решение системы (27)-(29), полученное при $k=3$, $b=1$, $r_1=30$, $r_2=0$, $\delta=1$: а - фазовый портрет в комплексной плоскости X ; б - проекция траектории в \mathcal{P} на единичную сферу; в - эволюция фаз: фазы Панчаратнама (1), фазы переменной X (2) и динамической фазы (3)

наклоны $\bar{\gamma}$ и $\bar{\Theta}$ кривых зависимостей фаз от времени. В работе [17] было показано, что средние наклоны кривых $\gamma(t)$ и $\Theta(t)$ равны для любого ограниченного решения системы (27)-(29). Поэтому по измеренному среднему наклону фазы поля в принципе можно определить наклон для ГФ.

Однако, проблема наблюдения ГФ состоит в том, чтобы выбрать частоту опорного сигнала [25] таким образом, чтобы исключить фазовый наклон $\dot{h}(t)$, соответствующий динамической фазе. Эту проблему можно обойти, используя для наблюдения ГФ кольцевой лазер со встречными волнами (см. раздел 4). Для однонаправленного режима в работе [17] было предложено феноменологическое правило исключения динамической фазы, основанное на следующем наблюдении. На рис. 1, в и 2, в кривые 3 показывают эволюцию динамической фазы в системе отсчета, связанной с фазой гармонического сигнала на частоте стационарной генерации ω , определяемой по (39). На обоих рисунках наклоны этих кривых очень малы, то есть средний набег динамической фазы для любого режима остается близким к стационарному. Это обстоятельство находится в соответствии с выводом, сделанным в работах [30,31], что дополнительный фазовый наклон, возникающий при рождении предельного цикла из неподвижной точки, соответствующей стационарной генерации лазера в \mathcal{P} , может быть интерпретирован как проявление ГФ. Несмотря на это, выяснение физического смысла динамической фазы для лазера остается пока нерешенной задачей.

Однако, в динамике одномодового лазера с однонаправленной генерацией было обнаружено явление, которое может быть непосредственно связано с геометрической фазой. Именно, авторы работы [28], анализируя численно циклические решения системы уравнений (22)-(24), обнаружили, что, когда частота моды резонатора меняется вблизи резонанса с частотой атомной спектральной линии, кривая зависимости частоты максимального пика в спектре мощности поля от отстройки δ испытывает скачок в точке резонанса $\delta=0$. В этой же работе было показано, что частота, соответствующая максимальному пику в спектре мощности поля, совпадает со средним наклоном (полной) фазы поля. Таким образом, кривая зависимости среднего наклона фазы от δ тоже имеет скачок при $\delta=0$. При этом «высота» скачка не зависит от частоты опорного сигнала, используемого при наблюдении эволюции фазы. Следуя работе [32] покажем, что этот доступный наблюдению скачок имеет «геометрическое» происхождение. Для этого остановимся на некоторых свойствах устойчивых решений системы уравнений (31)-(34). На рис. 3 и 4 показаны фазовые портреты

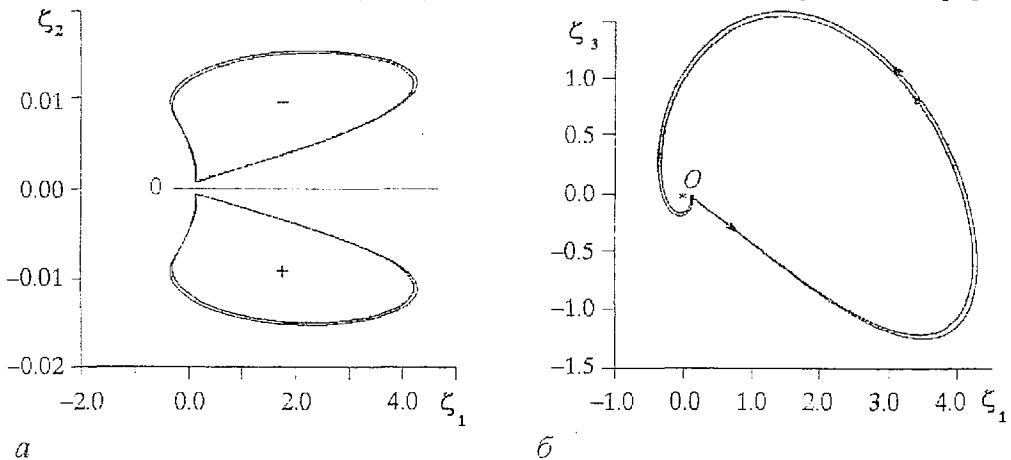


Рис. 3. Фазовые портреты циклического аттрактора в \mathcal{P} -пространстве, полученные при $k=3$, $b=0.1$, $r=15$: а - на плоскости (ζ_1, ζ_2) для $\delta=\pm 0.01$ и $\delta=0$ соответственно; б - на плоскости (ζ_1, ζ_3) для $\delta=0$; O - начало координат

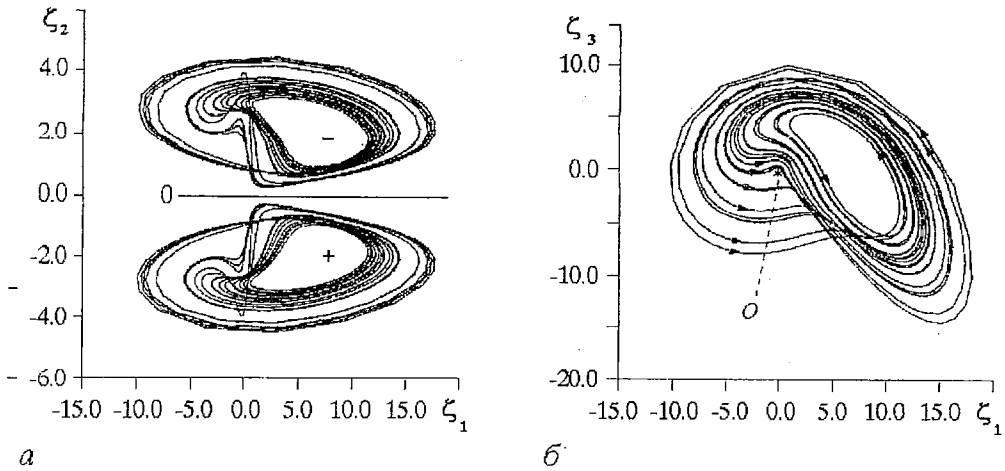


Рис. 4. Фазовые портреты хаотического аттрактора в \mathcal{P} -пространстве, полученные при $k=3$, $b=1$, $r=30$: *a* - на плоскости (ζ_1, ζ_2) для $\delta=\pm 0.01$ и $\delta=0$ соответственно; *б* - на плоскости (ζ_1, ζ_3) для $\delta=0$

циклического (рис. 3) и хаотического (рис. 4) аттракторов в пространстве лучей $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ для различных значений δ . На этих рисунках можно обнаружить следующие общие для всех режимов свойства.

а. Для положительных δ аттракторы полностью лежат в области отрицательных значений координаты ζ_2 , то есть расположены внутри некоторого конуса с вершиной в начале координат и осью вращения, направленной противоположно оси ζ_2 .

б. Фазовый портрет аттрактора для некоторого значения δ является зеркальным отражением в плоскости $\zeta_2=0$ портрета аттрактора при значении отстройки равном $-\delta$.

в. Для $\delta=0$ аттракторы лежат в плоскости $\zeta_2=0$, причем они охватывают начало координат таким образом, что траектория совершает оборот вокруг начала координат против часовой стрелки, если смотреть на аттрактор со стороны отрицательной полуоси ζ_2 .

г. Для любого фиксированного набора значений параметров k , b и r существует область значений параметра δ от $-\tilde{\delta}$ до $+\tilde{\delta}$, в которой данный аттрактор непрерывно деформируется при непрерывном изменении δ ; в пределе $\delta \rightarrow 0$ угол между образующей конуса, ограничивающего аттрактор, и плоскостью $\zeta_2=0$ стремится к нулю.

Не останавливаясь на доказательстве этих утверждений (см.[27]), перейдем к объяснению резонансного скачка кривой среднего фазового наклона. То, что это явление связано с ГФ, можно видеть из формулы (25). Действительно, согласно (25) и свойству **в**, для всякого режима набег динамической фазы тождественно равен нулю при резонансе ($\delta=0$). Кроме того, из свойства **г** следует, что средний наклон динамической фазы, определяемый временным средним от правой части формулы (13), непрерывно зависит от параметра отстройки δ в некоторой окрестности резонанса.

Чтобы понять механизм явления, рассмотрим изменение наклона ГФ $\bar{\gamma}$ при изменении параметра δ в окрестности $\delta=0$. Свойство **а** гарантирует, что для любого $\delta \neq 0$ значение $\bar{\gamma}$ определено однозначно, поскольку оно означает, что

величина телесного угла, охватываемого контуром ГТ в (10) имеет определенное значение в любой момент времени. Далее, согласно б и д, $\bar{\gamma}$ является нечетной функцией δ , непрерывной при $\delta \neq 0$. Наконец, из в и д следует, что в пределе $\delta \rightarrow +0$ $\bar{\gamma}$ стремится к значению $-\pi/T$ (где T - среднее время обхода изображающей точки вокруг начала координат), так как телесный угол, охватываемый за период, стремится к -2π . Таким образом, кривая $\bar{\gamma}(\delta)$ совершает скачок на $2\pi/T$ в момент, когда отстройка проходит через резонансное значение. Примечательно, что геометрическое рассмотрение поведения фазового наклона позволяет предсказать «высоту» скачка. Для циклического режима она оказывается равной фундаментальной частоте пульсаций интенсивности излучения. В случае же хаотического режима, соответствующего аттрактору Лоренца [29], «высота» скачка равна средней частоте переключений с одной ветви аттрактора на другую, симметричную ей относительно начала координат плоскости $(\text{Re}(x), \text{Re}(y))$, ветвь. Подчеркнем, что хотя скачок кривой среднего наклона фазы не вызван какой-либо негладкой перестройкой формы аттрактора, тем не менее в данном случае имеет место бифуркация, так как в момент резонанса происходит топологическая перестройка аттрактора, выражающаяся в смене его ориентации.

Как было показано в разделе 1, единственным условием, необходимым для возникновения ГФ в системе с двумерным комплексным вектором состояния является то, чтобы соответствующий вектор в пространстве лучей охватывал в ходе эволюции некоторый ненулевой телесный угол. В работе [17] было показано, что такая ситуация может быть реализована и в одномодовом кольцевом лазере, работающем в режиме однонаправленной генерации с постоянной во времени интенсивностью, когда параметры лазера адиабатически и циклически изменяются в пределах области устойчивости стационарного режима. В принципе, возникающая при этом фаза Берри может быть измерена интерференционным методом аналогично тому, как это было сделано в экспериментах с поляризованным пучком нейтронов [3] и классическим поляризованным светом [8]. Однако, согласно оценке [17], значения набегающей при этом ГФ оказываются слишком малы для ее измерения. Более перспективным с точки зрения возможности экспериментальной реализации ГФ представляется одномодовый кольцевой лазер с двумя встречными волнами [22].

4. Фазовая динамика в кольцевом лазере со встречными волнами

Поскольку две медленные амплитуды встречных волн в кольцевом лазере образуют минимальный набор комплексных переменных, необходимых для реализации ГФ, ограничимся рассмотрением случая динамической модели лазера с малыми временами релаксации дипольного момента и инверсии, когда последние можно «исключить» из полуклассических уравнений, считая их адиабатически зависящими от времени через амплитуды поля [23]. В этом случае и при не слишком больших превышениях усиления над порогом генерации уравнения движения системы имеют вид [23,33,34].

$$idE_{\pm}/dt = [i\eta_{\pm} + \zeta_{\pm} - i\alpha |E_{\pm}|^2 - i\beta |E_{\mp}|^2]E_{\pm} + g_{\pm} E_{\mp}, \quad (41)$$

где η_{\pm} - коэффициенты усиления встречных волн, α и β - комплексные коэффициенты само- и взаимного насыщения встречных волн, ζ_{\pm} - отстройки собственных частот волн в пустом резонаторе от частоты спектральной линии среды. Различие значений ζ_{+} и ζ_{-} возникает в случае вращения резонатора, что, кстати, используется в навигационной технике.

Динамическая связь между фазами встречных волн, описываемая комплексными параметрами g_{\pm} , возникает благодаря обратному рассеянию, отражению или локализованным источникам потерь. Масштабированием переменных можно выбрать $g_{\pm} = \exp(\pm\chi)$.

В работах [35-39] изучалась более сложная модель кольцевого лазера, в которой учитывается инерционность динамики активной среды по отношению к эволюции поля излучения. Помимо амплитуд встречных волн, эта модель в качестве динамических переменных содержит амплитуды двух низших пространственных гармоник инверсии заселенностей, что отражает возможность пространственной модуляции инверсии. Эта модуляция обеспечивает дополнительный механизм фазовой связи встречных волн. Однако, фазовое подпространство этой модели, относящееся к E_{\pm} , устроено так же, как фазовое пространство модели (41).

Отметим близость в описании лазера со встречными волнами и такими системами, как спин $1/2$ и поляризованный свет. Во всех этих случаях состоянию системы можно поставить в соответствие точку на единичной двумерной сфере. Действительно, декартовы координаты в пространстве лучей системы (41) можно ввести аналогично (30)

$$u = (|E_+|^2 - |E_-|^2)/2, \quad v = (E_+^* E_- + E_+ E_-^*)/2, \quad w = -i(E_+^* E_- - E_+ E_-^*)/2. \quad (42)$$

Поставим в соответствие состоянию системы точку, прокальваемую на единичной сфере вектором с координатами (v, w, u) . «Широта» точки на сфере характеризует соотношение амплитуд встречных волн. Так, полюсы сферы соответствуют режимам однонаправленной генерации, а точки на экваторе - режиму генерации встречных волн с равными амплитудами, образующими стоячую волну. Движение в азимутальном направлении по сфере соответствует изменению разности фаз волн.

Отметим, что системы, состояние которых изображается двумя комплексными величинами, не обязательно параметризуются на сфере. Ниже будут рассмотрены примеры, в которых при эволюции сохраняется не сумма, а разность квадратов модулей этих величин. Такие состояния изображаются точкой на гиперboloиде.

Наряду с уравнениями для лазера с одной бегущей волной (22)-(24), модель лазера со встречными волнами относится к числу наиболее популярных в лазерной физике. В работах [33-35] в модели (41) было обнаружено существование циклических режимов пульсаций, для которых фазы встречных волн бегут с различной скоростью, что приводит к расщеплению частот волн. Это явление было отнесено к числу «типичных нелинейных лазерных эффектов», хотя в работе [34] отмечались топологические различия соответствующих аттракторов. И действительно, расщепление частот допускает геометрическое толкование.

С точностью до динамической фазы, которая дает одинаковый вклад в набег фаз встречных волн, связь между движением изображающих точек системы в пространствах \mathcal{P} и \mathcal{N} определяется законом параллельного переноса (7), который имеет чисто геометрический смысл. Для перенормированного согласно (5) вектора состояния рассматриваемой системы $|\phi\rangle = (|E_+| \exp(i\varphi_+(t)), |E_-| \exp(i\varphi_-(t)))$, где φ_{\pm} - «геометрические» фазы встречных волн, закон параллельного переноса (7) можно записать в виде

$$\dot{\varphi}_+ = -(|E_-|^2 / |E_+|^2) \dot{\varphi}_-. \quad (43)$$

Отсюда видно, что фазы φ_+ и φ_- всегда бегут в противоположных направлениях, причем фаза волны, имеющей меньшую амплитуду, бежит быстрее. Эти закономерности находятся в соответствии с тем, что для таких циклов в \mathcal{P} , радиальные проекции которых на единичную сферу охватывают один из полюсов, за период набегает разность фаз φ_+ и φ_- , равная $+2\pi$ или -2π в зависимости от направления движения, а для циклов, не охватывающих один из полюсов, набег разности фаз за период равен нулю. Таким образом, наличие или отсутствие набег разности фаз встречных волн (а значит и расщепления частот) в данном циклическом режиме работы лазера связано с поведением «геометрических», то

есть нединамических компонент фаз, и определяется топологией соответствующего ему предельного цикла в пространстве лучей.

Интересно рассмотреть поведение ГФ вектора состояния для режимов, которым на единичной сфере в пространстве лучей соответствуют циклы, охватывающие один из полюсов. Для простоты рассмотрим однопетлевой цикл, целиком лежащий в северном или южном полушарии сферы. Выберем в качестве начальной точку пересечения цикла с нулевым меридианом, так что направления векторов E_+ и E_- на комплексной плоскости совпадают. В соответствии с (43), если отбросить динамическую фазу, при движении по циклу фазы E_+ и E_- бегут в противоположных направлениях с различными скоростями, так что при полном обходе цикла в \mathcal{P} векторы E_+ и E_- на комплексной плоскости встретятся, имея уже другое направление, смещенное относительно начального на угол равный набегу фазы волны, имеющей большую амплитуду. Таким образом, набег ГФ равен набегу фазы волны, имеющей большую амплитуду, причем в соответствии с формулой (10) он равен половине площади области S , охватываемой циклом на единичной сфере. Для обратной волны набег фазы равен $S/2+2\pi$. Особым является случай $S=2\pi$, который может иметь место, если рассматриваемый цикл совпадает с экватором сферы или несколько раз пересекает его. В этом случае фазы E_+ и E_- имеют равные набег за период, и ГФ неопределена.

По-видимому, к числу эффектов, связанных с проявлением ГФ, относится и обнаруженное в работе [39] явление динамического переключения направления генерации, сопровождающееся переключениями частот встречных волн (этот интересный вопрос еще не исследован). Вообще, кольцевой лазер со встречными волнами является удобной системой для экспериментального изучения описанных закономерностей фазовой динамики. Отметим, что коэффициенты α и β в (41) зависят от отстроек ζ_{\pm} , причем для невращающегося лазера и в случае точной настройки резонатора на частоту спектральной линии активной среды ζ_{\pm} и мнимые части коэффициентов α и β обращаются в ноль. В этом случае согласно (4) скорость изменения динамической фазы тождественно равна нулю, так что, используя в качестве опорного монохроматический сигнал на частоте спектральной линии, можно в чистом виде выделить геометрическую фазу, набегавшую в том или ином режиме лазера. При этом одновременно можно было бы экспериментально построить траектории системы в пространстве лучей, измеряя интенсивности и разность фаз встречных волн.

Данный тип лазеров позволяет реализовать и адиабатические ГФ с помощью циклической перестройки управляющих параметров в пределах области устойчивости режима генерации волн с постоянными во времени интенсивностями [34]. Такому режиму соответствуют стационарные решения системы уравнений, описывающей движение изображающей точки в пространстве лучей, которую можно получить, дифференцируя (42) и используя (41). Эти уравнения имеют вид

$$\dot{u} = \Lambda u + \Delta \rho - 4\alpha u \rho, \quad (44)$$

$$\dot{q} = [\Lambda - 2(\alpha+\beta)\rho]q + 2\rho \exp(-i\chi), \quad (45)$$

где $q = v + iw$, $\Lambda = \eta_+ + \eta_-$, $\Delta = \eta_+ - \eta_-$, $\rho = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2} = (|E_+|^2 + |E_-|^2)/2$. Рассмотрим стационарные решения системы уравнений (44), (45), для которых

$$u = \rho \cos\theta = \Delta\rho / (4\alpha\rho - \Lambda), \quad (46)$$

$$q = |q| \exp(i\varphi) = 2\rho [\Lambda - 2(\alpha+\beta)\rho]^{-1} \exp(-i\chi), \quad (47)$$

где θ и φ - полярный и азимутальный углы в сферической системе координат в \mathcal{P} - пространстве системы. Из выражения (46) можно видеть, что полярным углом θ

можно управлять, изменяя параметр Δ . Последнее можно осуществить, увеличивая потери для одной моды и уменьшая их для другой. Как видно из (47), азимутальная координата изображающей точки на сфере определяется параметром χ , который может меняться в широких пределах с помощью изменения положения источников потерь и внешних зеркал [23]. То, что разность фаз мод зависит от положения источника локализованных потерь и внешнего зеркала, можно легко понять, учитывая, что незатухающими являются колебания тех стоячих волн, узлы которых расположены на источниках потерь (внешнем зеркале). Изменяя положение источников, можно тем самым менять положение узлов, что эквивалентно изменению разности фаз бегущих волн, образующих стоячую волну.

Этого же эффекта можно достичь с помощью перемещаемого внешнего зеркала [33,40], которое связывает фазы волн как эффективный источник потерь, помещенный внутрь резонатора (рис. 5). Так как зеркало осуществляет перекачку энергии из одной волны в другую, то, меняя коэффициент отражения зеркала, можно управлять соотношением амплитуд мод. Поскольку перемещение зеркала на половину длины волны соответствует полному обходу параллели на единичной сфере, оно вызывает набег $\Gamma\Phi$, равный набегу фазы сильной волны и равный половине площади меньшей части сферы, отсекаемой параллелью. При этом знак $\Gamma\Phi$ зависит от направления движения зеркала. Равномерное перемещение зеркала должно вызывать несимметричные сдвиги частот сильной и слабой волн, зависящие как от направления и скорости движения зеркала V , так и от отношения квадратов амплитуд волн $\vartheta = |E_+|^2/|E_-|^2$. Действительно, пусть зеркало медленно и равномерно со скоростью V движется навстречу слабой волне, причем положительное направление отсчета координаты z вдоль резонатора совпадает с направлением распространения сильной волны, то есть сильной волне в принятых обозначениях соответствует знак + (см. рис.1). Для определенности поставим в соответствие волне, бегущей в положительном направлении, северный полюс единичной сферы в \mathcal{P} . Тогда z меняется во времени по закону $z=Vt$, и, в соответствии с (47), изображающая точка на сфере движется с запада на восток по параллели, лежащей в северном полушарии. Этой параллели соответствует фиксированное значение θ , которое связано с отношением квадратов амплитуд волн ϑ соотношением $\cos\theta = u/\rho = (\vartheta - 1)/(\vartheta + 1)$. В момент времени $T = \lambda/V$, когда зеркало смещается на длину волны, изображающая точка завершает полный оборот. При этом площадь, охваченная контуром на сфере, равна $2\pi(1 - \cos\theta) = 4\pi/(\vartheta + 1)$, чему соответствует набег $\Gamma\Phi \gamma = 2\pi/(\vartheta + 1)$. Так как набег $\Gamma\Phi$ равен набегу фазы сильной волны, движение зеркала вызывает сдвиг частоты сильной волны $\nu_+ = \gamma/T$. Подставляя сюда γ и T , получим относительное изменение частоты сильной волны

$$\nu_+/\nu = 1/(1+\vartheta)(V/c). \quad (48)$$

Выражение для относительного изменения частоты слабой волны можно получить, используя (43), откуда следует

$$\nu_-/\nu = -\vartheta\nu_+ = -\vartheta/(1+\vartheta)(V/c). \quad (49)$$

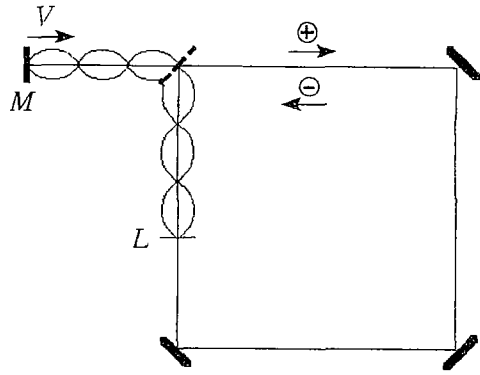


Рис. 5. Кольцевой резонатор с внешним зеркалом. Роль зеркала M аналогична роли источника потерь L , помещенного внутрь резонатора

Разность частот волн от ϑ не зависит и определяется только скоростью движения зеркала: $\nu_+ - \nu_- = kV$. Поэтому возникающая при движении внешнего зеркала разность частот встречных волн лазера полностью соответствует сдвигу частоты в эффекте Доплера при отражении свободной волны от движущегося зеркала. Кардинальное отличие рассматриваемого эффекта от эффекта Доплера в свободном пространстве состоит в зависимости сдвигов частот встречных волн относительно их значений при неподвижном зеркале от соотношения квадратов амплитуд волн.

5. Геометрические фазы сжатых состояний света

Потребность в уточнении лазерных моделей и, прежде всего, в корректном учете флуктуаций приводит к необходимости отказа от полуклассического приближения, в котором поле световой волны описывается классическим образом (см., например, [24]). Простейшая схема перехода к квантовому описанию поля состоит в замене классических амплитуд операторами. Так, например, для одной стоячей волны свободного электромагнитного поля оператор напряженности электрического поля в представлении Гайзенберга можно записать в виде

$$E(t, \mathbf{r}) = 1/2 \hat{\epsilon}(\mathbf{r}) [a \exp(-i\omega t) + a^+ \exp(i\omega t)], \quad (50)$$

где a , a^+ - операторы рождения и уничтожения фотона, $\hat{\epsilon}$ - функция пространственной моды поля. В отличие от классических амплитуд, операторы a и a^+ не коммутируют друг с другом, а удовлетворяют коммутационному соотношению $[a, a^+] = a a^+ - a^+ a = 1$. Главным следствием математического факта некоммутативности операторов являются соотношения неопределенностей, физический смысл которых состоит в существовании у динамических переменных фундаментальных флуктуаций, которые связаны с квантовой природой объекта (в данном случае электромагнитного поля) и не могут быть устранены путем стабилизации системы, исключения внешних шумовых воздействий и т. п. (см. [41]). Поэтому, в отличие от предыдущего раздела, мы принципиально вынуждены вводить в рассмотрение величины, характеризующие некоторым статистическим взбросом измеряемых на опыте значений. Для удобства дальнейшего изложения запишем соотношение неопределенностей не для самих операторов a и a^+ , а для их комбинаций - так называемых квадратурных компонент, аналогичных координате и импульсу гармонического осциллятора

$$X = (a^+ + a)/2; \quad Y = i(a^+ - a)/2, \quad (51)$$

через которые оператор напряженности поля выражается как

$$E(t, \mathbf{r}) = \hat{\epsilon}(\mathbf{r}) (X \cos \omega t + Y \sin \omega t). \quad (52)$$

Для этих величин коммутационное соотношение $[X, Y] = i/2$ порождает соотношение неопределенностей

$$\delta X \delta Y \geq 1/4, \quad (53)$$

где $\delta X = \{ \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle \}^{1/2}$ - неопределенность величины X , $\langle \dots \rangle$ - квантовое среднее. Последнее существенно зависит от состояния, в котором оказывается квантовая система в результате своей эволюции.

Соотношение (53), выполняющееся в любом квантовом состоянии, означает, что квантовый шум принципиально нельзя уничтожить. Однако, его можно минимизировать, выбрав состояние таким образом, чтобы в (53) выполнялось точное равенство. Состояния, обладающие этим свойством, называются когерентными состояниями (см., например, [42]); нетрудно показать,

что они являются собственными состояниями оператора уничтожения

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle.$$

Такие состояния света могут быть реализованы при его генерации газовым лазером с идеальной амплитудной стабилизацией, работающим существенно выше порога [43]. В обычных когерентных состояниях дисперсии квадратурных компонент равны: $\delta X = \delta Y = 1/2$ [42]. Дальнейшее уменьшение шума в одной из квадратурных компонент поля возможно только за счет его увеличения в другой. Состояния с $\delta X < 1/2$ или $\delta Y < 1/2$ называются сжатыми состояниями.

Сжатые состояния света в последнее время являются объектом интенсивных исследований (см., например, обзоры [43-47]), что вполне объяснимо как с теоретической (углубление представлений о взаимодействии объекта с измерительным прибором), так и с прикладной (поиск методов снижения фундаментальных шумов в оптических устройствах для обработки и передачи информации) точек зрения. Предмет данной части нашего обзора - ГФ сжатых состояний. Этот вопрос является частью более общей проблемы ГФ в квантовой оптике. Выбор именно сжатых состояний для рассмотрения вместе с полуклассическими нелинейными моделями лазерной физики связан с двумя причинами. Во-первых, сжатые состояния света возникают в результате существенно нелинейных процессов распространения и взаимодействия лазерных пучков в среде. Описание этих процессов традиционно проводится с помощью классических уравнений для медленных амплитуд связанных волн [44], а переход к квантовому описанию происходит путем замены амплитуд полей соответствующими операторами. Сам процесс сжатия может быть реализован и по отношению к классическим флуктуациям поля [43,44], причем формальные различия квантового и классического описания в простейших случаях минимальны. Во-вторых, сжатый свет является, по-видимому, наиболее физически значимым примером системы, состояние которой хотя и характеризуется (как и в примерах, рассмотренных выше) парой комплексных параметров, однако отображается не на сфере Пуанкаре, а на единичном гиперboloиде. Изображая движение системы в пространстве трех вещественных координат, получаем в этом случае вместо последовательности вращений последовательность преобразований Лоренца. Эволюции, реализующие группу Лоренца, могут встретиться и в других системах [48]. В этой связи сжатые состояния могут послужить по отношению к моделям лазерной физики и нелинейной динамики таким же источником плодотворных аналогий, каким оказались классические состояния поляризованного света.

Рассмотрим вначале описание процесса сжатия. Предметом нашего внимания являются дисперсии квадратур поля, вычисляемые как квантовые средние значения. Эволюция квантовых средних может быть описана либо как эволюция операторов, которые затем усредняются по фиксированному начальному состоянию (картина Гайзенберга), либо как эволюция самих векторов состояния при неизменных операторах (картина Шредингера). Пользуясь картиной Гайзенберга, представим себе, что в результате некоторого физического процесса оператор напряженности электрического поля световой волны, в начальный момент заданный соотношением (50), приобрел вид

$$E'(t, \mathbf{r}) = 1/2 \mathcal{E}(\mathbf{r}) [b \exp(-i\omega t) + b^* \exp(i\omega t)], \quad (54)$$

где

$$b = \mu a + \nu a^*, \quad b^* = \mu^* a^* + \nu^* a. \quad (55)$$

Чтобы новые операторы b , b^* удовлетворяли тому же коммутационному соотношению $[b, b^*] = 1$, что и a , a^* (нетрудно видеть, что при этом условии они сохраняют смысл операторов уничтожения и рождения), необходимо

$$|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1. \quad (56)$$

Предполагается, что физический процесс, ответственный за эволюцию операторов, обеспечивает выполнение этого соотношения. Примеры таких процессов будут приведены ниже.

В результате эволюции операторы квадратур преобразуются к виду

$$X' = (b++b)/2, \quad Y' = i(b+- b)/2. \quad (57)$$

Если поле первоначально находилось в когерентном состоянии α с $\delta X = \delta Y = 1/2$, нетрудно показать, что в конечном состоянии

$$\delta X' = 1/2|\mu - \nu|, \quad \delta Y' = 1/2|\mu + \nu|. \quad (58)$$

Тот же результат можно получить в картине Шредингера, вычисляя дисперсии исходных X, Y как квантовые средние от квадратичных отклонений этих величин в собственных состояниях $|\beta\rangle_{\mu, \nu}$ оператора b , которые, следовательно, являются сжатыми состояниями [45]. Минимум произведения неопределенностей достигается, когда $\mu, \nu \rightarrow \infty$ и отношение μ/ν вещественно. В этом случае сжатое состояние стремится к исходному когерентному состоянию. Если $\mu/\nu \rightarrow 1$, сжатое состояние становится собственным для X , если $\mu/\nu \rightarrow -1$ - собственным для Y .

В качестве примера реального физического процесса, приводящего к возникновению сжатого света, рассмотрим нелинейный процесс вырожденной параметрической генерации, при которой под действием мощной накачки с частотой 2ω в среде происходит усиление сигнальной волны на частоте ω . При классическом рассмотрении в приближении плоских волн из волнового уравнения общего вида можно получить нелинейную систему связанных уравнений для комплексных амплитуд сигнальной волны A и накачки A_p , медленно меняющихся во времени [44]

$$\dot{A} = \gamma A^* A_p - A\delta, \quad \dot{A}_p = -\gamma A^2 - A_p \delta_p + f, \quad (59)$$

где γ - коэффициент нелинейной связи волн, а действительные и положительные δ, δ_p и f характеризуют потери в резонаторе и подкачку излучения извне. Простейшее решение (59) легко получается для начального этапа усиления, пока поле сигнальной волны мало и его влиянием на накачку можно пренебречь. Тогда при $\delta, \delta_p = 0, f = 0$ первое из уравнений (59) можно решать отдельно, считая амплитуду накачки постоянной. При вырожденном параметрическом усилении в режиме стационарных бегущих волн справедливы аналогичные соображения с заменой времени на продольную координату z [44], которая в этом случае играет роль эволюционной переменной. Переходя от классических амплитуд к операторам, получаем уравнения, связывающие a и a^+

$$da/dz = \beta a^+, \quad da^+/dz = \beta^* a, \quad (60)$$

где $\beta \equiv \Gamma e^{i\varphi}$ - произведение коэффициента нелинейной связи на амплитуду накачки. Решение этих уравнений

$$a(z) = a(0)\text{ch}\Gamma z + a^+(0)\text{sh}\Gamma z e^{i\varphi}, \quad (61)$$

очевидно, описывает преобразование типа (55), причем выполнение (56) вытекает непосредственно из уравнений движения.

Поискам источников поля излучения в сжатом состоянии посвящено много теоретических и ряд экспериментальных работ. Показано, что для получения сжатых состояний различных типов можно использовать практически весь спектр нелинейных оптических явлений: двухфотонную генерацию, параметрическое усиление [49,50], генерацию гармоник [51], параметрическую генерацию в резонаторе [52], лазерную генерацию на свободных электронах [53-55],

комбинационное и гиперкомбинационное рассеяние [56], четырехволновое смешение [57-62], фазовую самомодуляцию [63]. Во всех этих явлениях преобразования операторов поля типа (55) с условиями типа (56) вытекают непосредственно из уравнений движения.

Для обсуждения вопроса о проявлениях ГФ, связанных со сжатым светом, необходимо напомнить основные факты, касающиеся математического описания сжатых состояний.

Ввиду (56) комплексные параметры, определяющие сжатое состояние, можно представить в виде

$$\mu = \text{ch}(\tau/2) \exp(i\Phi), \quad \nu = -\text{sh}(\tau/2) \exp(i\varphi) \exp(i\Phi), \quad (62)$$

где $\exp(i\Phi)$ - общий фазовый множитель, не влияющий на сжатие, как хорошо видно из примеров, рассмотренных выше. Для изображения физически различных состояний сжатия можно ввести вектор с тремя вещественными координатами в трехмерном евклидовом пространстве

$$\mathbf{n} = (n_0, n_1, n_2) = (\text{ch}\tau, \text{sh}\tau \cos\varphi, \text{sh}\tau \sin\varphi). \quad (63)$$

Конец вектора \mathbf{n} лежит на единичном гиперboloиде вращения

$$\mathbf{n}^2 = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 = 1, \quad (64)$$

причем для однозначности отображения достаточно одной половины гиперboloида, например, с $n_0 > 0$. Переменные τ и φ имеют очевидный геометрический смысл: φ есть азимутальный угол, а τ есть удвоенная площадь гиперболического треугольника, образованного вектором \mathbf{n} , осью Ox_0 и соответствующим сечением верхней половины гиперboloида.

Изменение операторов поля при сжатии (55) можно представить как результат унитарного преобразования [45]

$$b = S(\xi) a S^+(\xi), \quad (65)$$

где

$$S(\xi) = \exp(\xi K_+ - \xi^* K_-), \quad (66)$$

$\xi = \tau/2 \exp(-i\varphi)$, а операторы K_{\pm} для простейшего случая одной оптической моды могут быть выражены через операторы рождения и уничтожения как

$$K_+ = (a^+ a^+)/2, \quad K_- = (a a)/2. \quad (67)$$

Можно непосредственно убедиться, используя определения (66), (67) и известные свойства операторных экспонент (см., например, [64]), что из (65) действительно вытекает преобразование (55) с коэффициентами (62). Из $[a, a^+] = 1$ следует, что операторы K_{\pm} и

$$K_0 = (a^+ a + a a^+)/4 \quad (68)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad [K_-, K_+] = 2K_0, \quad (69)$$

а оператор $\mathcal{K}_2 \equiv K_0^2 - K_1^2 - K_2^2$ ($K_{\pm} = K_1 \pm iK_2$) коммутирует с K_0, K_{\pm} .

Рассмотрим процесс преобразования поля как процесс эволюции. Преобразованию операторов (65) в картине Гайзенберга соответствует в картине Шредингера преобразование исходного состояния (волновой функции) поля $|\psi_0\rangle$ в сжатое состояние

$$|\mathbf{n}\rangle \equiv |\xi\rangle = S(\xi) |\psi_0\rangle, \quad (70)$$

$S(\xi)$ называется оператором сжатия. Его можно рассматривать как оператор

эволюции, определяемый некоторым гамильтонианом H : $S = \exp(-i/\hbar Ht)$, тогда из основного или любого когерентного состояния, взятого в качестве начального, может получиться сжатое состояние при условии, что H содержит квадратичные слагаемые, пропорциональные aa , $a+a^+$ [45]. Таким гамильтонианом, в частности, описывается процесс вырожденной параметрической генерации [44,45,65].

Процесс сжатия, таким образом, можно рассматривать, с одной стороны, как преобразование операторов поля, и, с другой стороны, как изменение вектора состояния поля. Последний оказывается зависящим от классических параметров, которые можно связать с координатами точки на единичном гиперboloиде. Пусть оптическая система, через которую проходит свет, изменяет эти параметры так, что изображающая точка совершает обход замкнутого контура на единичном гиперboloиде. В соответствии с теорией [1,21] естественно ожидать у таких состояний появления геометрической фазы, которую можно вычислить непосредственно через производную от вектора состояния вдоль контура эволюции. Такой подход был реализован в [65] для сжатых состояний несколько более общего вида, по отношению к которым рассмотренные нами состояния представляют собой частный случай. Такой же подход использовался в работах [66-68] для вычисления геометрических фаз другого класса обобщенных когерентных состояний (ОКС) - поляризационных ОКС, введенных и изученных в [69-71].

Для вычисления геометрических фаз сжатых состояний, следуя [65], прежде всего конкретизируем исходное состояние $|\psi_0\rangle$. Рассмотрим состояния, являющиеся собственными для полного набора коммутирующих наблюдаемых K_2, K_0 .

$$K_0|k,\mu\rangle = \mu|k,\mu\rangle, \quad K_2|k,\mu\rangle = k(k-1)|k,\mu\rangle. \quad (71)$$

В качестве начального состояния выберем $|k,k\rangle$, что порождает обобщенные когерентные состояния, минимизирующие произведение неопределенностей, и в этом смысле «наиболее близкие к классическим» [42]. Рассмотрим сжатое состояние $|\xi\rangle = S(\xi)|k,k\rangle$ с параметром $\xi(t)$, циклически зависящим от времени, $\xi(0) = \xi(T)$. По определению фаза Берри равна

$$\gamma(C) = i \oint_C \langle \xi | d/dt | \xi \rangle dt. \quad (72)$$

Явное вычисление этого интеграла с использованием свойств операторных экспонент и собственных функций $|k,k\rangle$ [65] приводит в конце концов к следующему результату:

$$\gamma(C) = -2k \int_0^T \text{sh}^2(\tau/2) \dot{\varphi} dt = -kQ, \quad (73)$$

где T - время обхода замкнутого контура C . Величина Q представляет собой площадь части поверхности единичного гиперboloида, ограниченной контуром C , который описывает изображающий вектор \mathbf{n} в процессе циклической эволюции. Это аналог телесного угла, с которым связана ГФ состояний, параметризуемых на сфере [8,72,73], в частности, поляризационных ОКС [69]. Для конкретного вида гамильтониана, обеспечивающего эволюцию сжатого состояния, в простейших случаях удалось связать параметры контура C с физическими параметрами процесса сжатия, например, с частотой и интенсивностью накачки при вырожденной параметрической генерации [65].

В этих рассуждениях безразлично, в силу каких причин параметры, входящие в вектор состояния, меняются именно так, а не иначе. Этим еще раз подчеркивается тот факт, что возникающая фаза является именно геометрической, то есть не связана с физической причиной изменения состояния системы, а отражает лишь свойства самого пространства этих состояний. Джордан [74] рассмотрел циклическую эволюцию системы как результат

последовательного действия операторов бесконечно малого сжатия на исходное состояние, являющееся собственным состоянием оператора K_0 . Было показано, что в результате последовательности малых сжатий, возвращающей систему в исходное состояние, возникает добавочная фаза, в точности равная формально вычисленной фазе Берри.

Вычисленная ГФ квантовых состояний поля содержит множитель k , являющийся собственным значением оператора K_0 . В рассмотренном выше случае этот оператор имеет простой физический смысл: $K_0=(a+a^\dagger)/2$, где a -оператор числа фотонов с собственным значением N . В частности, для вакуума $N=0$ и $k=1/4$. Присутствие множителя k в фазе, таким образом, означает ее пропорциональность числу фотонов, то есть интенсивности рассматриваемой волны. Очевидно, что состояние сжатия, как и состояние поляризации света, не зависят от его интенсивности. На зависимость ГФ многофотонных состояний, вычисленной при помощи стандартного определения, от числа фотонов обратил внимание Клышко [12,75], сделавший вывод о некорректности применения данного определения к векторам многофотонных состояний квантового света. С другой стороны, если рассматривать фазовый множитель, приобретаемый не вектором состояния, а оператором a , связанным с амплитудой электрического поля, как, например, сделали Чао и Джордан [76], то «лишний» множитель k у фазы не появляется, и остается лишь фактор, связанный с площадью на гиперboloиде, который авторы [76] называют «существенной» частью ГФ. Согласно [76], последовательность операторов сжатия, обеспечивающая возврат изображающей точки в исходное состояние $(0,0,1)$, сводится к действию оператора $\exp(-i\phi K_0)$, где фаза ϕ при дальнейшем расчете оказывается связанной с площадью на гиперboloиде. В результате

$$\exp(-i\phi K_0)|n\rangle = \exp[i(\phi/2)(n+1/2)]|n\rangle, \quad (74)$$

но при этом

$$\exp(-i\phi K_0)a\exp(-i\phi K_0) = \exp[i(\phi/2)]a.$$

Вопрос о соотношении фаз, приобретаемых вектором состояния и операторами поля, возникал и в наших предыдущих работах [66-68] при сравнении ГФ поляризационных ОКС [69-71] с известными в классической поляризационной оптике теоретическими и экспериментальными результатами [8,72,73]. Агарвал и Саймон [77] показали, что при обычном измерении интенсивности суммы двух волн на выходе интерферометра регистрируется не разность фаз векторов состояния поля, а разность фаз, приобретаемых в разных плечах интерферометра операторами амплитуды поля. Как заключают авторы [77] на основании ряда рассмотренных примеров, фаза оператора поля может быть отождествлена с классическим углом Ханни [78]. Связь этого угла с фазой Берри соответствующих квантовых состояний [78-80] получается в результате разложения фазы Берри по степеням \hbar в квазиклассическом пределе. Если отбросить члены порядка \hbar^2 и выше, угол Ханни h_j , соответствующий j -й классической степени свободы, получается равным

$$h_j = -\partial\gamma_{nj}/\partial n_j, \quad (75)$$

где γ_{nj} - геометрическая фаза состояния с набором квантовых чисел $\{n_j\}$, связанных условием Бора - Зоммерфельда $I_j=(n_j+\mu_j)\hbar$ с соответствующими классическими переменными действия [80]. Для состояний с определенным числом частиц, например, рассмотренных выше $|n\rangle$, I_j является классическим интегралом движения, равным как раз «лишнему» множителю k .

Обсудим возможность экспериментального наблюдения ГФ, обусловленной сжатием. С этой целью Чао и Джордан [76] предложили схему микроволнового интерферометра, в каждом плече которого находится по два вырожденных параметрических усилителя. В каждом плече реализуется перевод излучения из

одного и того же начального состояния, изображаемого точкой $(0,0,1)$ на единичном гиперboloиде, в одно и то же конечное состояние, изображаемое точкой $-\text{sh}(r)$, $\text{sh}(r)$, $\text{ch}(r)\text{ch}(s)$, но по разным путям, в результате чего операторы поля приобретают разность фаз, которая может быть зарегистрирована по сдвигу интерференционных полос. Указанные пути образуют на единичном гиперboloиде замкнутый контур, проекция которого на плоскость (n_1, n_2) представляет собой прямоугольник. В этом случае, как замечено в [76], рассчитанная фаза оказывается не равной площади, вырезаемой контуром эволюции на гиперboloиде. Этому, на первый взгляд, довольно неожиданному результату авторы [76] не дают четкого объяснения. Причина же заключается в следующем. При прохождении света через дискретные оптические элементы, когда состояние меняется скачком, «правильный» контур для расчета ГФ должен состоять из отрезков геодезических линий, соединяющих дискретные точки, изображающие промежуточные состояния. Это «правило геодезических» хорошо известно для параметризуемых на сфере Пуанкаре задач поляризационной оптики [8,72,73] и обсуждалось нами в предыдущем разделе. Очевидно, части контура, проекция которых на плоскость (n_1, n_2) являются отрезками прямых, не пересекающих ось симметрии гиперboloида, не являются геодезическими, на что, в частности, указано в [48]. При правильном построении контура из отрезков геодезических противоречие устраняется. Несмотря на принципиальную простоту предложенный Чао и Джорданом эксперимент довольно сложен технически и пока не реализован на практике.

Имея в виду поиск возможных приложений теории ГФ в динамике систем, описываемых классическим образом, мы должны уделить особое внимание классическому аналогу эксперимента Чао и Джордана, который, в отличие от своего квантового прототипа, был успешно реализован в уже упоминавшейся выше работе Китано и Ябузаки [48] с помощью простой поляризационной установки. Предварительно отметим, что для геометрических свойств пространства состояний системы важны именно соотношения (69) (в терминах теории симметрии ими определяются генераторы группы двумерных преобразований Лоренца $SU(1,1)$ [42,81]), а не явный вид операторов $K_{0,\pm}$, который может и отличаться от (67), (68). Например, если рассмотреть сжатие при невырожденном параметрическом взаимодействии двух мод [44,65] эти операторы будут содержать билинейные комбинации операторов рождения и уничтожения, относящихся к разным модам. Китано и Ябузаки [48] показали теоретически, что действие линейного поляризатора (поляроида) на классический естественный или частично поляризованный свет описывается как сжатие. Аналог параметра сжатия τ при этом определяется дихроизмом поляризатора, то есть отношением коэффициентов пропускания для волн, поляризованных вдоль и поперек его главной оси. K_α были выбраны пропорциональными матрицам Паули

$$K_1 = i\sigma_z/2, \quad K_2 = i\sigma_y/2, \quad K_0 = \sigma_x/2, \quad (76)$$

тогда оператор $S(\xi)$ представляет матрицу преобразования пары поперечных компонент классического электрического поля световой волны (матрицу Джонса) при прохождении через систему линейных поляризаторов и вращателей, вызывающих поворот плоскости поляризации. В результате теория поляризационных преобразований классического света оказывается формально аналогичной квантовой теории сжатия. Единственным серьезным отличием, которое, впрочем, оказывается несущественным для ГФ, является неэрмитовость операторов (76) и, следовательно, неунитарность оператора $S(\xi)$. Авторы [48] используют установленную аналогию для физического моделирования эксперимента по схеме, предложенной в [76]. Последовательность четырех линейных поляризаторов, ось каждого из которых повернута на угол $\pi/4$ относительно оси предыдущего, а параметры сжатия плавно регулируются, описывается оператором

$$T = \exp(irK_2) \exp(isK_1) \exp(-isK_2) \exp(-irK_1), \quad (77)$$

который при $\text{thr}=\text{shs}$ задает циклическую эволюцию и сводится к виду $T = \exp(-i\phi K_0)$, где ϕ - набег фазы поля. Таким образом, четыре поляризатора оказываются эквивалентными одному вращателю, поворачивающему плоскость поляризации на угол $\phi/2$. Этот угол измерялся экспериментально, а затем сравнивался с результатом расчета ϕ как суммы геометрической и динамической фаз. Результаты находятся в хорошем согласии.

Классическая модель [48] служит хорошим примером аналогии и позволяет надеяться на обнаружение в нелинейной динамике других систем как классических, так и квантовых, демонстрирующих ГФ при эволюции, описываемой последовательностью преобразований Лоренца.

Заключение

Проблема ГФ по своей сути в какой-то мере отражает общее современное состояние фундаментальной физики, для которой характерно тесное сращивание концепций как непосредственно основанных на экспериментальных фактах, так и порожденных попытками осмысления этих фактов, и включения их в единую формально-логическую схему. Собственно говоря, само понятие фазы является в какой-то мере «вторичным», основанным на модельных представлениях о системе. Возможность получения прикладных результатов от применения концепции ГФ демонстрируют описанные в 3-м и 4-м разделах эффекты, связанные с проявлением ГФ в динамике лазеров. Заметим, что «радиус действия» теории ГФ не ограничен задачами шредингеровской квантовой механики, лазерной физики или электроники, где комплексные векторы или функции пространственных переменных являются привычными средствами описания состояния системы. Фактически, он совпадает с «радиусом действия» методов комплексной математики, являющихся мощным универсальным средством исследования динамических систем [83]. Например, в классической механике это симплектические методы [83], основой которых является парность канонических переменных $\{p_k, q_k\}$, приводящая к четной размерности фазового пространства. При этом используются комплексные переменные $a_k = p_k + iq_k$, для которых, как показано в разделе 1, можно определить ГФ.

Исследование ГФ в нелинейных динамических системах только начинается и, на взгляд авторов, представляет особый интерес, так как только нелинейные системы способны «жить своей собственной жизнью», в отличие от линейных, в которых динамика возникает лишь под действием внешнего окружения. Естественно, что на этом пути стоит немало нерешенных проблем. Одна из основных - это возможность выделения ГФ в чистом виде, то есть устранение динамической фазы. Если понимать эту процедуру как приведение динамической системы к виду, удовлетворяющему закону параллельного переноса (5), то проблема сводится к выяснению физического смысла этого закона для произвольной динамической системы. В то же время следует отметить, что наблюдение ГФ может быть и косвенным, как, например, по резонансному скачку среднего наклона фазы при однонаправленной генерации или по зависящим от амплитуд сдвигам частот встречных волн в кольцевом лазере. Среди интересных проблем собственно лазерной динамики выделим задачу поиска проявлений ГФ в свойствах эволюционирующих пространственных распределений лазерных полей.

Авторы благодарны В.П.Карасеву за сотрудничество и помощь, а также А.В.Масалову и А.В.Горохову за стимулирующие дискуссии и ценные замечания.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Госкомвуза РФ (грант 95-0-2.1-59).

Библиографический список

1. *Berry M.V.* Quantal phase factors accompanying adiabatic changes // *Proc. Roy. Soc. A. London.* 1984. Vol.392. P.45.
2. *Born M. and Fock V.* Beweis des Adiabatenatzes // *Zs. Phys.* 1928. Bd 51. S. 165.
3. *Bitter T., Dubbers D.* Manifestation of Berry's topological phase on neutron spin rotation // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol.59. P.251.
4. *Zwanziger J.V., Rucker S.P., and Chingas G.C.* Measuring the geometric component of the transition probability in a two-level system // *Phys. Rev. A.* 1991. Vol.43. P.3232.
5. *Suter D., Muller K.T., and Pines A.* Study of the Aharonov-Anandan Quantum Phase by NMR interferometry // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol.60. P.1218.
6. *Simon B.* Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's Phase // *Phys. Rev. Lett.* 1983. Vol. 51. P.2167.
7. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970.
8. *Bhandari R., Samuel J.* Observation of Topological Phase by use of a laser interferometer // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol.60. P. 1211; *Bhandari R.* Evolution of light beams in polarization and direction // *Physica B.* 1991. Vol. 175. P.111.
9. *Markovski B.L. and Vinitzky S.I.* eds Topological Phases in Quantum Theory. Singapore: World Scientific, 1989.
10. *Shapere A. and Wilczek F.* eds Geometric Phases in Physics. Singapore: World Scientific, 1989.
11. *Виницкий С.И., Дербов В.Л., Дубовик В.М., Марковски Б.Л., Степановский Ю.П.* Топологические фазы в квантовой механике и поляризационной оптике // *УФН.* 1990. Т.160, вып. 6. С.1.
12. *Кльшико Д.Н.* Геометрическая фаза Берри в колебательных процессах // *УФН.* 1993. Т.163, № 11. С.1.
13. *Ning C.Z. and Haken H.* The geometric phase in nonlinear dissipative systems // *Mod. Phys. Lett. B.* 1992. Vol.6. P.1541.
14. *Aharonov Y. and Anandan J.* Phase change during a cyclic quantum evolution // *Phys. Rev. Lett.* 1987. Vol.58. P.1593.
15. *Garrison J.C. and Chiao R.Y.* Geometrical phase from global gauge invariance of nonlinear classical field theories // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol.60. P.165.
16. *Ning S.Z. and Haken H.* Geometrical phase and amplitude accumulations in dissipative systems with cyclic attractors // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Vol.68. P.2109.
17. *Toronov V.Yu. and Derbov V.L.* Geometric phases in lasers and liquid flows // *Phys. Rev. A.* 1994. Vol.49. P.1392.
18. *Чайка М.П.* Интерференция вырожденных атомных состояний. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. 192 с.
19. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко Л.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1984.
20. *Pancharatnam S.* // *Proc. Ind. Acad. Sci. A.* 1956. Vol.44. P.247.
21. *Samuel J. and Bhandari R.* General setting for Berry's phase // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 60. P.2339.
22. *Торонов В.Ю., Дербов В.Л.* Геометрические фазы в кольцевом лазере // в печати.
23. *Sargent M. III, Scully M.O., and Lamb W.E.* // *Laser Physics.* London: Addison-Wesley, 1974.
24. *Haken H.* Laser Theory, Encyclopedia of Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1970. Vol. XXV/2c.
25. *Weiss C.O., Abraham N.B. and Hubner U.* Homoclinic and heteroclinic chaos in a single-mode laser // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 61. P.1587.
26. *Ning C.Z. and Haken H.* Detuned lasers and the complex Lorenz equations: subcritical and supercritical Hopf bifurcations // *Phys. Rev. A.* 1990. Vol.41. P.3826.
27. *Владимиров А.Г., Торонов В.Ю., Дербов В.Л.* О комплексной модели Лоренца // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 1995. Т. 3, № 6. С. 51.

28. Roldan E., de Valcarcel G.J., Vilaseca R., and Mandel P. Single-mode laser phase dynamics // Phys. Rev. A. 1993. Vol.48. P.591.
29. Fowler A.C., Gibbon J.D. and McGuinness M.J. The complex Lorenz equations // Physica D. 1982. Vol.4. P.139.; Gibbon J.D. and McGuinness M.J. The real and complex Lorenz equations in rotating fluids and lasers // Physica D. 1982. Vol.5. P.108
30. Ning C.Z. and Haken H. Quaziperiodicity involving twin oscillations in the complex Lorenz equations describing a detuned laser // Z. Phys. B. 1990. Vol.81. P.457.
31. Vilaseca R., de Valcarcel G.J., and Roldan E. Physical interpretation of laser phase dynamics // Phys. Rev. A. 1990. Vol.41. P.5269.
32. Toronov V.Yu. and Derbov V.L. Geometric phase effects in laser dynamics // Phys. Rev. A. 1994. Vol.50. P.878.
33. Chyba T.H. Phase-jump instability in the bidirectional ring laser with backscattering // Phys. Rev. A. 1989. Vol.40. P.6327.
34. Skryabin D.V., Vladimirov A.D. and Radin A.M. Spontaneous phase symmetry breaking due to cavity detuning in a class-A bidirectional ring laser // Opt. Commun. 1995. Vol.116. P.109.
35. Etrich C., Mandel P., Neelen R.C., Spreuw R.J.C., and Woerdman J.P. Dynamics of a ring-laser gyroscope with backscattering // Phys. Rev. A. 1992. Vol.46. P.525.
36. Hoffer L.M. and Abraham N.B. Analysis of a coherent model for a homogeneously broadened bidirectional ring laser // Optics. Comm. 1990. Vol.74. P.261.
37. Abraham N.B., Weiss C.O. Dynamical Frequency Shifts and Intensity Pulsations in an FIR Bidirectional Ring Laser // Opt. Comm. 1988. Vol.66. P.437.
38. Khandokhin P.A. and Khanin Ya.I. Instabilities in a solid-state ring laser // J. Opt. Soc. Am. B. 1985. Vol.2, № 1. P.226.
39. Корюкин И.В., Хандохин П.А., Ханин Я.И. Частотная динамика двунаправленного кольцевого лазера с невзаимным резонатором // Квантовая электроника. 1990. Т.17, № 8. С.978.
40. Климонтович Ю.Л., Курятов В.Н., Ланда П.С. О синхронизации волн в газовом лазере с кольцевым резонатором // ЖЭТФ. 1966. Т.51, вып.1(7). С.3.
41. Мессиа А. Квантовая механика, Т.2. М.: Наука, 1979, 584 с.
42. Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
43. Тайи М.К., Салэ Б.Э.А. Сжатые состояния света // Quan. Opt. 1989. Vol.1. P.153; УФН. 1991. Т.161, № 4. С.101.
44. Ахманов С.А., Белинский А.В., Чиркин А.С. Фазовая бистабильность и мультистабильность в сосредоточенных и распределенных системах: классический и квантовый аспекты // Новые физические принципы оптической обработки информации / Под ред. С.А.Ахманова и М.А.Воронцова. М.: Наука, 1990. С. 83.
45. Смирнов Д.Ф., Трошин А.С. Новые явления в квантовой оптике: антигруппировка и субпуассоновская статистика фотонов, сжатые состояния // УФН. 1987. Т.153, вып.2. С.223.
46. Быков В.П. Сжатый свет и неклассические движения в механике // УФН. 1993. Т.163, № 9. С. 89.
47. Клышко Д.Н., Масалов А.В. Фотонный шум: наблюдение, подавление, интерпретация // УФН. 1995. Т.165, № 11. С.1249.
48. Kitano M. and Yabuzaki T. Observation of Lorentz-group Berry phases in polarization optics // Phys. Lett. 1989. Vol.142, № 6,7. P.321.
49. Голубев Ю.М. Статистика электромагнитного поля, параметрически взаимодействующего со средой // Оптика и спектроскопия. 1979. Т.46, вып. 2. С.398.
50. Wodkiewicz K., Zubairy M.S. Effect of laser fluctuations on squeezed states in a degenerate parametric amplifier // Phys. Rev. A. 1983. Vol.27. P.2003.
51. Горбачев В.Н., Занадворов П.Н. Квантовая статистика процесса генерации второй гармоники // Оптика и спектроскопия. 1980. Т. 49. С.600.
52. Milburn G. and Walls D.F. Production of squeezed states in a degenerate parametric amplifier // Opt. Comm. 1981. Vol.39, № 6. P.401.

53. *Becker W., Scully M.O. and Zubairy M.S.* Generation of a Squeezed Coherent States via a Free-Electron Laser // *Phys. Rev. Lett.* Vol.48, № 7. P.475.
54. *Sibilia G., Bertolotti M., Peurinov'a V., Peurina J., Lukus A.* Photon antibunching effect and statistical properties of single-mode emission in free-electron lasers // *Phys. Rev. A.* 1983. Vol. 28, № 1. P.328.
55. *Rai Suranjana and Chopra S.* Photon statistics and squeezing properties of a free-electron laser // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol.30, № 4. P.2104.
56. *Tänzler W., and Schütte F.J.* Antibunching in multiphoton processes // *Opt. Comm.* 1981. Vol. 37, № 6. P.447.
57. *Slusher R.E., Yurke B. and Valley J.R.* Experimental Study of Squeezed States Using Four-Wave Mixing in a Cavity Configuration// *J. Opt. Soc. Am. Ser.B.* 1984. Vol.1, № 3. P.525.
58. *Reid M.D., Walls D.F.* Generation of squeezed states via degenerate four-wave mixing // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol.31. № 3. P.1622.
59. *Slusher R.E., Yurke B., Grandgier P., La Porta A., Walls D.F., Reid M.* Squeezed-light generation by four-wave mixing near an atomic resonance // *J. Opt. Soc. Am. B.* 1987. Vol.4, № 10. P.1453.
60. *Milburg G.J., Walls D.F., Levenson M.D.* Quantum phase fluctuations and squeezing in degenerate four-wave mixing // *J. Opt. Soc. Am. Ser. B.* 1984. Vol.1, № 3. P.390.
61. *Levenson M.D., Shelby R.M., Aspect A., Reid M., and Walls D.F.* Generation and detection of squeezed states of light by nongenerate four-wave mixing in an optic fiber // *Phys. Rev. A.* 1985. Vol.32, № 3. P.1550.
62. *Slusher R.E., Hollberg L.W., Yurke B., Mertz J.C., Valley J.F.* Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave-Mixing in an Optical Cavity // *Phys. Rev. Lett.* 1985. Vol.55, № 22. P. 2409.
63. *Королькова Н.В., Чиркин А.С.* Источник неклассического излучения с неклассическими свойствами // *Квантовая электроника.* 1994. Т.21, № 12. С.1109; Удвоение частоты когерентного излучения в средах с квадратичной и кубичной оптическими нелинейностями; приближение заданного числа фотонов // *Оптика и спектроскопия.* 1993. Т.74, вып.5. С. 908.
64. *Люиселл У.* Излучение и шумы в квантовой электронике. М.: Наука, 1972. 398 с.
65. *Дамаскинский Е.В.* Вычисление фазы Берри в сжатых состояниях // *Записки научных семинаров ЛОМИ. Сер. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики.* 1989. Т.169, № 8. С.51.
66. *Karassiov V.P., Derbov V.L. and Vinitisky S.I.* Polarization coherent states in quantum optics: quasiprobability functions and geometric phases // *Proc. SPIE.* 1993. Vol.2098. P.164.
67. *Karassiov V.P., Derbov V.L., Priyutova O.M., Vinitisky S.I.* Geometric Phases of the Generalized Polarization Coherent States in Quantum Optics. VII International Conference on Symmetry methods in physics. Abstracts. Dubna, 1995. P.27.
68. *Karassiov V.P.* Polarization structure of quantum light: a new insight. 2: Generalized coherent states, squeezing and geometric phases. E-print Arcvе QUANT PH/9503011, 1995.
69. *Karassiov V.P.* Polarization structure of quantum light: a new insight. 1: General outlook // *J.Phys. A.* 1993. Vol.26. P.4345.
70. *Карасев В.П., Масалов А.В.* Состояния неполяризованного света в квантовой оптике // *Оптика и спектроскопия.* 1993. Т.74, вып.5. С. 928.
71. *Karassiov V.P.* Polarization squeezing and new states of light in quantum optics // *Phys. Lett. A.* 1994. Vol.190. P.387.
72. *Berry M.* // *J. Mod. Opt.* 1987. V.34. P.1401.
73. *Chyba T.H., Wang L.J., Mandel L., and Simon R.* // *Opt.Lett.* 1988. Vol. 13. P.562.
74. *Jordan T.F.* Berry phase and unitary transformation // *J.Math.Phys.* 1988. Vol.29, № 9. P.2042.
75. *Klyshko D.N.* Berry phase in multiphoton experiments // *Phys. Lett. A.* 1989. Vol.140, № 1,2. P.19; si ibid. 1992. Vol.163. P.349.

76. Chiao R.Y., Jordan T.F. Lorentz-group Berry phases in squeezed light // Phys. Lett. A. 1988. Vol.132, № 2,3. P.77.
77. Agarwal G.S., Simon R. // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42, № 11. P. 6924.
78. Hannay J. // J. Phys. A: Math. Gen. 1985. V.18. P.221; sl Berry M.V. // J. Phys. A: Math. Gen. 1985. V.18. P.15.
79. Maamache M., Provost J.-P. and Vallée // J. Phys. A: Math. Gen. 1991. Vol. 24. P.685.
80. Giavarini G., Gozzi E., Rohrich D. and Thacker W.D. // Phys. Rev. D. 1989. Vol. 39, № 10. P.3007.
81. Желобенко Д.П., Штерн А.И. Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.
82. Ott E., Grebogi C., and Yorke J.A. Controlling Chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64, № 11. P.1196.
83. Арнольд В.И. Математические методы классической механики, М.: Наука, 1974; Теория катастроф, М.: Наука, 1990.
- Abraham R., Marsden J.E. Foundations of mechanics, 2nd ed., Reading, MA: Benjamin, 1978

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 14.06.96
после переработки 2.12.96

GEOMETRIC PHASES IN THE DYNAMICS OF NONLINEAR OPTICAL SYSTEMS

V.Yu. Toronov, V. L. Derbov, O.M. Priyutova

Fundamentals of geometric phase theory in general-type dynamical systems and some particular results on geometric phases in semiclassical and quantum models of laser physics and nonlinear optics are reviewed. The emphasis is made on the physical meaning rather than on formal mathematical background to make the presentation clear for a wide circle of researchers in the field of nonlinear dynamics.



Торонов Владислав Юрьевич - 1963 года рождения, окончил Московский инженерно-физический институт (1986). Защитил кандидатскую диссертацию по исследованию конечномерных моделей динамики лазеров (1992). Доцент физического факультета Саратовского государственного университета. Круг интересов - самоорганизация, хаос, квантовая динамика, геометрические свойства динамических систем.



Дербов Владимир Леонардович - 1949 года рождения, окончил физический факультет СГУ (1972). После окончания аспирантуры работал в НИИ механики и физики при СГУ. Защитил кандидатскую диссертацию по теории взаимодействия интенсивных лазерных полей с многоуровневыми релаксирующими системами. С 1983 года - доцент кафедры теоретической физики, а с 1985 года по настоящее время - доцент кафедры оптики СГУ. Автор более 70 теоретических работ в области нелинейной лазерной спектроскопии молекул, нелинейной динамики распространения лазерных пучков и импульсов. В последние годы интенсивно исследует проблему геометрических фаз в лазерных и оптических динамических системах.



Приотова Ольга Михайловна - родилась в 1970 году. Окончила Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского в 1992 году. После окончания аспирантуры (1996) работает научным сотрудником Института проблем точной механики и управления РАН. Область научных интересов - нелинейная оптика, дифференциальная геометрия. Имеет 10 научных публикаций.



Редакционная коллегия обращается к заинтересованным читателям нашего журнала с предложением принять участие в формировании содержания *специального выпуска «Нелинейная динамика в образовании»*. Предполагается публикация статей об идеологии преподавания нелинейной динамики, программы уникальных курсов и спецкурсов, подборок задач или отдельных задач и других материалов, которые представляются интересными и соответствующими теме.

Срок присылки до 1 июня 1997 года.

Предъявленные материалы должны быть оформлены согласно правилам оформления рукописей для нашего журнала.

Наш адрес: 410026 Саратов, Астраханская, 83, СГУ,
редакция журнала «Изв. вузов. ПНД».

Оперативная связь по телефону: (845-2)51-42-98

по электронной почте: and@college.saratov.su

Редактор выпуска
чл.-корр. РАН, профессор

Д.И. Трубецков

