Изв.вузов «ПНД», т.4, № 6, 1996 УДК 537.86

О КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ В ДИССИПАТИВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Л.А. Синицкий, О.А. Цвигун

Рассматривается диссипативная система, описываемая системой обычных дифференциальных уравнений третьего порядка, все решения которой представляют собою квазипериодические колебания, спектр и базисные частоты которых зависят от начальных условий. Поведение приведенной системы подобно поведению гамильтоновой системы. Изучена зависимость характеристик колебаний от параметров системы и начальных условий.

Для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы хорошо известны режимы, когда все начальные условия из некоторой замкнутой области фазового пространства соответствуют квазипериодическим режимам. Тогда эта область может быть представлена в виде совокупности вложенных трехмерных торов, которые плотно заполнены фазовыми траекториями квазипериодического режима. При этом движению на каждом из торов соответствуют свои базисные частоты и различные спектры. Простой пример - движение материальной точки на плоскости под действием центральной силы, имеющей потенциал

$$U(r) = r^{-\beta},$$

где r - радиус-вектор точки на плоскости, $\beta \neq 1$ [1].

Известно, что в системах третьего порядка (3/2 степеней свободы) также возможно существование квазипериодических режимов. Они изучались при рассмотрении хаоса в подобных системах [2,3], а также в связи с изучением явления прерывистой генерации [4,5].

В этих случаях квазипериодические режимы были изолированы в том смысле, что все они всюду плотно заполняют поверхность одного двухмерного тора и их спектр и базисные частоты для всех режимов одинаковы. Это означает, что для системы

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$, решение в случае квазипериодического режима имеет вид

$$x_i = \varphi_i(\omega_1 t + \xi_1, \omega_2 t + \xi_2), \qquad (2)$$

$$\varphi_i(z_1+2\pi, z_2) = \varphi_i(z_1, z_2+2\pi) = \varphi_i(z_1, z_2).$$

Постоянные ξ_1 и ξ_2 определяют континуум решений, которые, в случае иррациональности ω_1/ω_2, всюду плотно заполняют поверхность одного двухмерного тора в трехмерном фазовом пространстве. Причем, вне зависимости от ξ_1 и ξ_2, спектр колебаний и базисные частоты остаются неизменными.

В статье рассматривается возможность построения диссипативной системы, имеющей $^3/_2$ степеней свободы, для которой при всех начальных условиях реализуется квазипериодический режим. В зависимости от начальных условий изменяются базисные частоты и спектр колебаний. В этом смысле диссипативная система подобна гамильтоновой системе с двумя степенями свободы.

С точки зрения радиоэлектроники это означает существование колебаний с изменяющейся глубиной амплитудной модуляции в зависимости от выбора начальных условий.

Разумеется, что подобная система, как и гамильтоновы системы, не может быть структурно устойчивой [6]. В рассматриваемом примере существование квазипериодических режимов достигается за счет того, что диссипация в среднем за некоторый период времени равна нулю. Очевидно, такая система не соответствует автоколебательным системам общего положения.

Рассмотрим систему в виде линейного колебательного неустойчивого (устойчивого) при фиксированном $\varepsilon>0$ ($\varepsilon<0$) звена второго порядка

$$
\begin{aligned}
dx_1/dt &= x_2 + \varepsilon x_1, \\
dx_2/dt &= -x_1 + \varepsilon x_2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

которое охвачено обратной связью в виде интегрирующего звена первого порядка

$$
d\varepsilon/dt = \beta(1 - r), \tag{4}
$$

где $r = x_1^2 + x_2^2$, $\beta>0$ - параметр.

Система (3), (4) заведомо не гамильтонова, так как количество уравнений нечетно, она также неконсервативна, так как не сохраняется фазовый объем

$$
\mathrm{div}\mathbf{x} = 2\varepsilon \neq 0,
$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \varepsilon)$. Поэтому возможность существования квазипериодических решений требует специального исследования. Как будет указано ниже, фазовый объем сохраняется в среднем за достаточно большой промежуток времени.

Система (3) в полярных координатах

$$
\begin{aligned}
r &= x_1^2 + x_2^2, \\
\mathrm{tg}\varphi &= x_1/x_2
\end{aligned}
\tag{5}
$$

приводится к виду

$$
\begin{aligned}
dr/dt &= 2r\varepsilon, \\
d\varphi/dt &= 1,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

а переменные x_1, x_2 определяются равенствами

$$
\begin{aligned}
x_1 &= r^{1/2}\sin\varphi, \\
x_2 &= r^{1/2}\cos\varphi.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Из (7) следует, что переменная r равна квадрату амплитуды колебаний переменных x_1, x_2. Система уравнений (6), (4) разделяется на независимое уравнение для фазы

$$
d\varphi/dt = 1, \tag{8}
$$

которое может быть проинтегрировано

$$\varphi = t + \varphi_0, \tag{9}$$

и подсистему уравнений для переменных r, ε

$$dr/dt = 2r\varepsilon,$$
$$d\varepsilon/dt = \beta(1 - r). \tag{10}$$

Рассмотрим систему (10) на фазовой плоскости (r,ε) для уравнения

$$dr/d\varepsilon = 2r\varepsilon/[\beta(1 - r)]. \tag{11}$$

Уравнение (11) может быть проинтегрировано в квадратурах

$$\varepsilon = C - \beta(r - \ln r), \tag{12}$$

где C - постоянная интегрирования, которая при начальном условии $\varepsilon=0$, $r=r_0$ равна

$$C = \beta(r_0 - \ln r_0). \tag{13}$$

Очевидно, что (11) описывает негрубую систему, в которой существует континуум периодических решений. Из (13) следует, что это уравнение при постоянном значении C имеет два решения (рис.1)

$$0 < r_{01} < 1, \quad r_{02} > 1.$$

Соотношение (12) можем записать в виде

$$\varepsilon^2 = \beta(r_0 - r) - \beta\ln(r_0/r), \tag{14}$$

откуда следует, что фазовые траектории являются замкнутыми кривыми (рис.2), причем размер вдоль оси r определяется значениями r_{01}, r_{02}, а вдоль оси ε

$$\varepsilon_{max} = +[\beta(r_0 - 1) + \beta\ln r_0]^{1/2},$$
$$\varepsilon_{min} = -[\beta(r_0 - 1) + \beta\ln r_0]^{1/2}. \tag{15}$$

Характеристические показатели системы (10) в окрестности особой точки $r=1$, $\varepsilon=0$ чисто мнимые

$$\lambda_{1,2} = \pm i(2\beta)^{1/2}. \tag{16}$$

Следовательно, при начальных условиях r_0 близких к единице, переменные r, ε совершают гармонические колебания с периодом

$$T = \pi(2/\beta)^{1/2}. \tag{17}$$

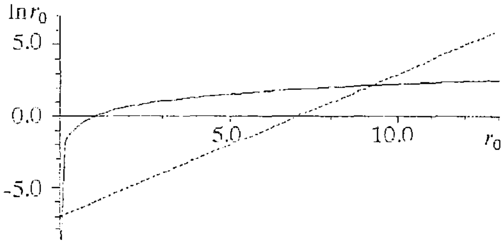

Рис. 1. Графическое решение уравнения (13) при C=0.7

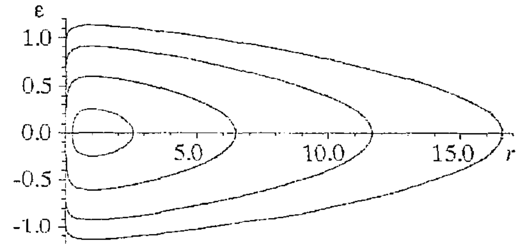

Рис. 2. Фазовый портрет системы (10) при β=0.1

В соответствии с (7) переменные x_1, x_2 имеют вид амплитудно-модулированных колебаний с глубиной модуляции

$$m = [1 - (r_{01}/r_{02})^{1/2}]/[1 + (r_{01}/r_{02})^{1/2}]. \quad (18)$$

При $r_{01}/r_{02} << 1$ глубина модуляции (18) стремится к единице, а характер движений x_1, x_2 приобретает вид прерывистых колебаний (рис. 3).

На участке, где $r \approx r_{01}$ и при $r_{01} << 1$ уравнения (8) приобретают вид

$$\begin{aligned} dr/dt &= 0, \\ d\varepsilon/dt &= \beta. \end{aligned} \quad (19)$$

Время движения t на этом участке соответствует длительности пауз между пакетами колебаний x_1, x_2. Длительность t можно приближенно оценить, положив, что участок траектории является отрезком прямой, а его длина

$$L \approx 2\varepsilon_{max}. \quad (20)$$

Проинтегрируем второе уравнение (19) на этом отрезке и получим

$$t \approx [4(\ln r_{01}^{-1} - 1)/\beta]^{1/2}. \quad (21)$$

Очевидно, что соотношение (21) имеет смысл при $r_{01} < e^{-1}$.

Следующие размышления приводят к оценке полного периода колебаний переменных r, ε. Поскольку период колебаний (15) в окрестности особой точки $r=1$, $\varepsilon=0$ не зависит от начального условия r_0, то можно предположить, что эта величина останется постоянным слагаемым в полном периоде колебаний для начального условия r_0, достаточно удаленного от единицы. Начальное условие влияет только на длительность движения (19) на вертикальном участке фазовой траектории. Следовательно, период колебаний r, ε для начальных условий r_0 близких к единице определяется формулой (17), а для начальных условий $0 < r_{01} << 1$ или $r_{02} >> 1$ формулой

$$T = \pi(2/\beta)^{1/2} + [4(\ln r_{01}^{-1} - 1)/\beta], \quad (22)$$

где первое слагаемое есть длительность пакета колебаний x_1, x_2, а второе - определяет длительность паузы между пакетами колебаний переменных x_1, x_2.

Для точного определения периода колебаний r и ε выполнялось численное интегрирование системы (10). Сопоставление результатов численного расчета с полученными приближенными соотношениями (21), (22) приведено на рис. 3, 4. Закон изменения x_1 во времени, полученый численным интегрированием, приведен на рис. 5.

Уравнение двухмерных торов в пространстве (x_1, x_2, ε) в соответствии с (12) имеет вид

$$\varepsilon^2 = C - \beta[(x_1^2 + x_2^2) - \ln(x_1^2 + x_2^2). \quad (23)$$

Очевидно, что сечение торов плоскостью ε=const представляет две концентрические окружности, для которых радиус внешней убывает, а внутренней возрастает по мере возрастания ε. При изменении C имеем совокупность вложенных торов, которые заполняют все фазовое пространство, причем при росте внешнего радиуса $r_{02}^{1/2}$ внутренний радиус $r_{01}^{1/2}$ стремится к нулю, то есть «внутреннее» отверстие в торах сужается и в пределе совпадает с осью ε. Сечение торов плоскостью $x_2=0$ представлено на рис. 6.

Можно показать, что приведенный пример не уникален. Аналогичным путем доказывается существование континуума квазипериодических движений для случая, когда вместо (3) рассматривается линейный колебательный контур

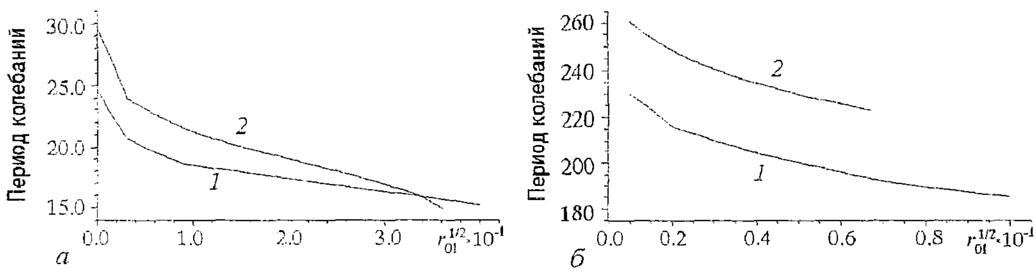

Рис. 3. Зависимость периода колебаний r, ε системы (10) от начальных условий $r=r_{01}$, $\varepsilon=0$, полученная численным интегрированием (кривая *1*) и аналитически из соотношения (22) (кривая *2*): *а* - $\beta=0.1$; *б* - $\beta=0.001$

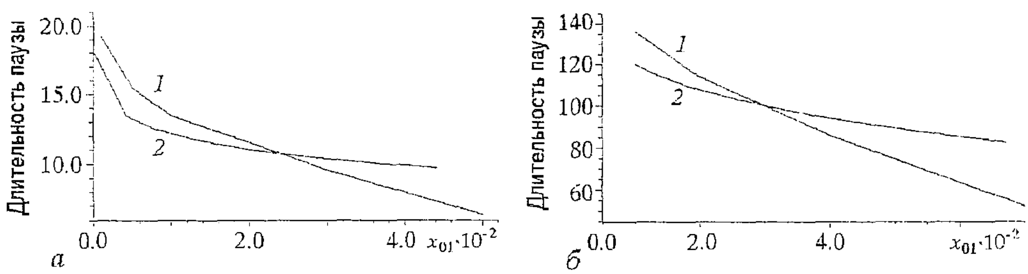

Рис. 4. Длительность паузы между пакетами колебаний переменной x_1 системы (3),(4) в зависимости от начальных условий $x_1=x_{01}$, $x_2=0$, $\varepsilon=0$, полученная численным интегрированием (кривая *1*) и аналитически из соотношения (21) (кривая *2*): *а* - $\beta=0.1$; *б* - $\beta=0.001$

$$d^2x/dt^2 + \varepsilon dx/dt + x = 0, \tag{24}$$

при сохранении уравнения обратной связи в виде (4), где $r = x^2 + (dx/dt)^2$.

Для автогенератора Ван-дер-Поля

$$d^2x/dt^2 - \varepsilon(1 - x^2)dx/dt + x = 0 \tag{25}$$

доказательство существования континуума квазипериодических режимов аналитическим путем найти не удалось.

Однако для системы уравнений

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= +x_2 + \varepsilon(1 - x_1^2 - x_2^2)x_1, \\ dx_2/dt &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2 - x_2^2)x_2 \end{aligned} \tag{26}$$

доказательство приведено в [7].

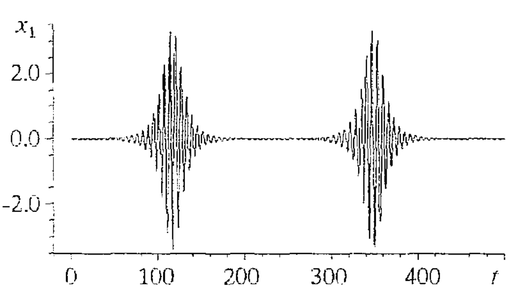

Рис. 5. Закон изменения переменной x_1 системы (3), (4) во времени при $\beta=0.001$ и начальных условиях $x_1=0.01$, $x_2=0$, $\varepsilon=0$

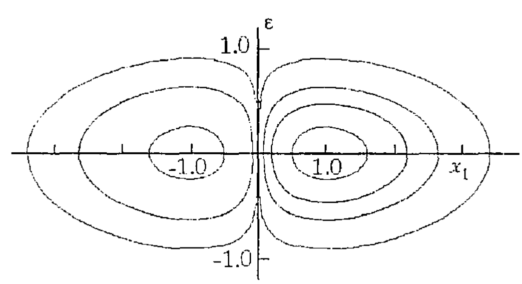

Рис. 6. Сечения торов в фазовом пространстве системы (3),(4) при $\beta=0.1$ плоскостью $x_2=0$

Библиографический список

1. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
2. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
3. *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
4. *Белкин М.К., Кравченко Г.И.* Сверхрегенераторы. М.: Радио и связь, 1983.
5. *Дворников А.А., Уткин Г.М.* Автогенераторы в радиотехнике. М.:Радио и связь, 1991.
6. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. *Синицкий Л.А., Цвигун О.А.* Квазигармонические колебания и импульсная генерация в автоколебательных системах третьего порядка // Электронное моделирование. 1996. № 4. С. 48.

Львовский государственный университет Украина

Поступила в редакцию 25.12.96
после переработки 25.03.97

ON QUASI-PERIODIC SOLUTIONS IN DISSIPATIVE DYNAMICAL SYSTEMS OF THE THIRD ORDER

L.A. Sinitsky, O.A. Tsvigun

Quasi-periodic solutions of the third order dissipative system are considered. Their fundamental frequencies and spectrum depend on initial conditions. Behavior of such system is similar to Hamiltonian system having two degrees of freedom. Dependence of amplitudes and frequencies of system's parameters is considered.

Синицкий Лев Аронович - доктор технических наук, профессор Львовского государственного университета. Окончил Ленинградский институт авиационного приборостроения (1948). Автор 150 научных работ, в том числе семи монографий. Область научных исследований - теория электрических цепей.

Цвигун Олег Алексеевич - аспирант Львовского государственного университета. Окончил физический факультет Львовского государственного университета (1996). Автор научных работ. Область научных исследований - теория электрических цепей.