Изв.вузов «ПНД», т.4, № 6, 1996 УДК 517.9:537.8

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ КОЛМОГОРОВА - ФОККЕРА - ПЛАНКА ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

С.П. Жогаль, С.И. Жогаль

Исследуются вопросы применимости метода марковских диффузионных процессов в сочетании с асимптотическими методами нелинейной механики при изучении случайных колебаний в динамических системах. Дана постановка проблемы получения аналитического решения уравнений Колмогорова - Фоккера - Планка (КФП). Сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях интегрируемости усредненных уравнений КФП, соответствующих достаточно широкому классу квазилинейных колебательных систем с одной степенью свободы, подверженных различным типам внешнего периодического воздействия и случайному возмущению параметров.

При решении различных задач науки и техники встает необходимость исследования случайных колебательных процессов в динамических системах. Теория случайных колебаний принадлежит к числу новых перспективных направлений современных прикладных наук. Одной из актуальных задач подобного класса является изучение совместного влияния различных типов периодического и случайного воздействий на колебания механических систем. При решении данной задачи весьма эффективным является метод марковских диффузионных процессов в сочетании с асимптотическими методами нелинейной механики, особенно для квазилинейных колебательных систем с одной степенью свободы. Однако применение данного метода крайне затруднено вследствие сложности задачи получения аналитического решения соответствующего уравнения Колмогорова - Фоккера - Планка (КФП). В данной работе определяется один, достаточно широкий, класс неавтономных квазилинейных колебательных систем, удовлетворяющих полученному нами достаточному условию интегрируемости соответствующих уравнений КФП.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую неавтономную механическую квазилинейную систему с одной степенью свободы:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f\,(t,x,\dot{x}) + \varepsilon^{1/2} g(t,x,\dot{x})\xi(t), \tag{1}$$

где $\varepsilon>0$ - малый параметр; ω - частота собственных колебаний системы; $\dot{\xi}(t)$ - случайный процесс типа «белого шума» единичной интенсивности; f, g - дифференцируемые функции своих аргументов, периодические по t.

Используя замену переменных

$$x(t) = a(t)\cos\phi(t),$$
$$\dot{x}(t) = -\omega a(t)\sin\phi(t), \quad \phi(t) = \omega t + \theta(t), \tag{2}$$

где $a(t)$, $\theta(t)$ - медленно меняющиеся функции времени, и, применяя формулу Ито дифференцирования сложной случайной функции, приходим к следующей системе стохастических дифференциальных уравнений, определяющих двумерный марковский случайный процесс $\{a(t), \theta(t)\}$ [1]:

$$da(t) = [-(\varepsilon/\omega)f(t,a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\sin\phi + \varepsilon g^2(t,a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\cos^2\phi/(2\omega^2 a)]dt -$$
$$- (\varepsilon^{1/2}/\omega)g(t,a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\sin\phi d\xi(t),$$
$$d\theta(t) = [-\varepsilon/(\omega a)f(t,a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\cos\phi - \varepsilon g^2(t,a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\sin\phi\cos\phi/(\omega^2 a^2)]dt -$$
$$- \varepsilon^{1/2}/(\omega a)g(t,a\cos\phi, -\omega a\sin\phi)\cos\phi d\xi(t). \tag{3}$$

Соответствующее уравнение КФП для стационарной плотности вероятностей амплитуды и фазы колебаний $w(a,\theta)$ имеет после применения к нему метода усреднения по явно входящему времени t (что вполне оправдано, поскольку система (3) имеет стандартную по Н.Н.Боголюбову форму [2]) следующий вид:

$$\partial/\partial a(K_1(a,\theta)w) + \partial/\partial\theta(K_2(a,\theta)w) =$$
$$= {}^1/_2\partial^2/\partial a^2(K_{11}(a,\theta)w) + \partial^2/\partial a\partial\theta(K_{12}(a,\theta)w) + {}^1/_2\partial^2/\partial\theta^2(K_{22}(a,\theta)w), \tag{4}$$

где

$$K_1(a,\theta) = \mathbf{M}_t\,[-(1/\omega)f\sin\phi + g^2\cos^2\phi/(2\omega^2 a)],$$
$$K_2(a,\theta) = \mathbf{M}_t\,[-1/(\omega a)f\cos\phi - g^2\sin2\phi/(2\omega^2 a^2)],$$
$$K_{11}(a,\theta) = \mathbf{M}_t\,[(1/\omega^2)g^2\sin^2\phi], \tag{5}$$
$$K_{12}(a,\theta) = \mathbf{M}_t\,[1/(2a\omega^2)\,g^2\sin2\phi],$$
$$K_{22}(a,\theta) = \mathbf{M}_t\,[1/(a^2\omega^2)g^2\cos^2\phi].$$

Здесь $\mathbf{M}_t$ - оператор усреднения по явно входящему времени t.

Поскольку уравнение КФП является детерминированным, то сама процедура усреднения его коэффициентов сноса и диффузии не отличается от описанной в [3, с. 54-59; 4, с. 75-79] процедуры усреднения за период.

Получение аналитического решения уравнения КФП (4) для систем вида (1) в большинстве практических случаев невозможно. Для автономных систем, то есть в случае, когда

$$f(t,x,\dot{x}) = f(x,\dot{x}),$$
$$g(t,x,\dot{x}) = g(x,\dot{x}), \tag{6}$$

коэффициенты усредненного уравнения КФП будут зависеть только от амплитуды колебаний a, представляется возможным рассмотрение отдельного уравнения КФП для стационарной амплитуды колебаний, допускающего аналитическое решение [1,2]. Однако существует довольно широкий класс неавтономных систем вида (1), встречающихся при решении многих практических задач механики и математической физики, для которых удается получить аналитическое решение уравнения КФП (4). Это класс систем, соответствующие уравнения КФП которых обладают условием потенциальности [2,5,6].

2. Достаточное условие интегрируемости усредненных уравнений КФП для систем с параметрическим случайным воздействием

Рассмотрим частный случай системы (1) - систему, случайные колебания в которой могут быть описаны одним из следующих стохастических дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon h(x,\dot{x}) + \varepsilon\Sigma_{s=0}^{S} P_s \cos(\Omega_s \omega t) x^s + \varepsilon\Sigma_{k=1}^{K} R_k \cos(\zeta_k \omega t)\dot{x}^k + \varepsilon^{1/2}\sigma_l [x^{(p)}]^l \dot{\xi}(t),$$

$$l = 1,2, \ldots, L, \quad p = 0,1, \ldots, P, \qquad (7)$$

где $h(x,\dot{x})$ - дифференцируемая функция своих аргументов; P_s, R_k, σ_l, Ω_s, ζ_k, ω - положительные постоянные; $\dot{\xi}(t)$ - «белый шум» единичной интенсивности; $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

Колебательные системы, подобные (7), подверженные различным типам внешнего периодического воздействия и параметрическому случайному возмущению (здесь мы воспользовались терминологией [2; 5, с. 502-503; 7, с. 176]), довольно часто являются предметом многих прикладных исследований. Наличие параметрических случайных воздействий значительно усложняет задачу исследования колебаний в подобных системах методами марковских случайных процессов.

Класс систем вида (7), для которых выполняются достаточные условия аналитической интегрируемости соответствующего уравнения КФП (4), может быть определен с помощью полученной нами следующей теоремы.

Теорема. *Пусть для системы (7) выполняются следующие условия:*

1. $$\partial/\partial a\{a^{1-2l}\mathbf{M}_t[h(a\cos\phi, -a\omega\sin\phi)\cos\phi]\} = 0. \qquad (8)$$

2. *Для параметров внешних гармонических воздействий Ω_s выполняются лишь те из резонансных соотношений*

$$\Omega_s = s - 2n + 1, \quad n = 0,1,\ldots,[s/2], \qquad \forall s = 0,1,\ldots,S, \qquad (9)$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\Omega_s^2 = (s+1)(s - 2l + 1)(2l + 1)^{\mathrm{sign}((-1)^{p+1})}, \qquad \forall s = 0,1,\ldots,S. \qquad (10)$$

3. *Для параметров внешних гармонических воздействий ζ_k при p - четном не выполняется ни одно из резонансных соотношений*

$$\zeta_k = k - 2n + 1, \quad n = 0,1,\ldots,[k/2], \qquad \forall k = 0,1,\ldots,K, \qquad (11)$$

при p - нечетном - резонансные соотношения (11) выполняются лишь для $k=2l$.

Тогда соответствующее системе (7) усредненное уравнение КФП (4) удовлетворяет условию потенциальности

$$\partial/\partial\theta\{1/K_{11}[K_1 - {}^1\!/_2\partial K_{11}/\partial a]\} =$$

$$= \partial/\partial a\{1/K_{22}[K_2 - {}^1\!/_2\partial K_{22}/\partial\theta - \partial K_{12}/\partial a] - 2K_{12}/(K_{11}K_{22})[K_1 - {}^1\!/_2\,\partial K_{11}/\partial a]\} \qquad (12)$$

и, следовательно, может быть проинтегрировано в квадратурах [2,5].

Отметим, что резонансные соотношения (9) - (11), по-существу, означают, что все частоты воздействия являются гармониками частоты автоколебаний. Прежде, чем приступить к доказательству теоремы, сформулируем следующую лемму.

Лемма. *Условие потенциальности (12) уравнения КФП для системы (7), удовлетворяющей соотношению (8), эквивалентно следующим условиям:*

$$\begin{gathered}\partial/\partial\theta\{\mathbf{M}_t[\cos^s\phi\sin\phi\cos(\Omega_s\omega t)]\}=(s+1-2l)(2l+1)^{\mathrm{sign}((-1)^{p+1})}\mathbf{M}_t[\cos^{s+1}\phi\cos(\Omega_s\omega t)],\\ \forall s=0,1,\ldots,S,\\ \partial/\partial\theta\{\mathbf{M}_t[\sin^{k+1}\phi\cos(\zeta_k\omega t)]\}=(k+1-2l)(2l+1)^{\mathrm{sign}((-1)^{p+1})}\mathbf{M}_t[\cos\phi\sin^k\phi\cos(\zeta_k\omega t)],\\ \forall k=0,1,\ldots,K.\end{gathered}\tag{13}$$

Доказательство леммы легко получить, определив по формулам (5) коэффициенты усредненного уравнения КФП (4), соответствующего системе (7), и подставив их затем в условие потенциальности (12).

Используя утверждение леммы, а также воспользовавшись формулами для представления $\sin^k\phi$, $\cos^s\phi$ через тригонометрические функции кратных аргументов, несложно получить, что в резонансном случае при

$$\Omega_s=s-2n+1,\quad n\in\{0,1,\ldots,[s/2]\},$$

$$\zeta_k=k-2n+1,\quad n\in\{0,1,\ldots,[k/2]\},$$

$$\begin{gathered}\partial/\partial\theta\{\mathbf{M}_t[\cos^s\phi\sin\phi\cos(\Omega_s\omega t)]\}=1/2^{s+1}[\binom{s}{n}-\binom{s}{n-1}]\cos((s-2n+1)\theta)(s-2n+1),\\ \mathbf{M}_t[\cos^{s+1}\phi\cos(\Omega_s\omega t)]=1/2^{s+1}\binom{s+1}{n}\cos((s-2n+1)\theta),\\ \partial/\partial\theta\{\mathbf{M}_t[\sin^{k+1}\phi\cos(\zeta_k\omega t)]\}=(-1)^{(k+3+2n)/2}/2^{k+1}\binom{k+1}{n}\sin((k-2n+1)\theta)(k-2n+1),\\ k\text{ - нечетное},\\ \partial/\partial\theta\{\mathbf{M}_t[\sin^{k+1}\phi\cos(\zeta_k\omega t)]\}=(-1)^{(k+2n)/2}/2^{k+1}\binom{k+1}{n}\cos((k-2n+1)\theta)(k-2n+1),\\ k\text{ - четное},\\ \mathbf{M}_t[\cos\phi\sin^k\phi\cos(\zeta_k\omega t)]=(-1)^{(k+2n-1)/2}/2^{k+1}[\binom{k}{n}-\binom{k}{n-1}]\sin((k-2n+1)\theta),\\ k\text{ - нечетное},\\ \mathbf{M}_t[\cos\phi\sin^k\phi\cos(\zeta_k\omega t)]\}=(-1)^{(k+2n)/2}/2^{k+1}[\binom{k}{n}-\binom{k}{n-1}]\cos((k-2n+1)\theta),\\ k\text{ - четное},\end{gathered}\tag{14}$$

где $\binom{s}{n}=s!/[n!(s-n)!]$.

Исходя из соотношений (14), несложно установить, что условия (13) будут выполняться лишь в случае, если Ω_s удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\Omega_s[1-2n/(s+1)]=(2l+1)^{\mathrm{sign}((-1)^{p+1})}(s+1-2l)$$

или, окончательно, условиям

$$\Omega_s^2 = (s+1)(s-2l+1)(2l+1)^{\mathrm{sign}((-1)^{p+1})}, \qquad \forall s = 0,1,\dots,S.$$

Для выполнения условия потенциальности относительно ζ_k получаем

$$\zeta_k = (k-2l+1)(2l+1)^{\mathrm{sign}((-1)^{p+1})}\left[\binom{k+1}{n} - 2\binom{k}{n-1}\right]\binom{k+1}{n}^{-1}, \tag{15}$$

$$\forall k=1,2,\dots,K, \quad n=0,1,\dots,[k/2].$$

Следовательно, при p, четном относительно ζ_k, не могут удовлетворяться никакие из резонансных соотношений вида (11), а при p - нечетном соотношения (11) выполняются лишь для $k=2l$. Теорема доказана.

В том случае, когда некоторая система вида (7) удовлетворяет условиям доказанной теоремы, ее усредненное уравнение КФП для амплитуды и фазы стационарных колебаний будет иметь следующее точное решение:

$$w(a,\theta) = C\exp\{2\int 1/K_{11}[K_1 - {}^1\!/_2\,\partial K_{11}/\partial a]da + (K_2/K_{22})d\theta\}, \tag{16}$$

где C - постоянная нормировки [5].

3. Исследование неавтономных квазилинейных систем, подверженных случайному возмущению параметров колебаний

При решении многих прикладных задач объектом исследования выступают квазилинейные колебательные системы, испытывающие случайные изменения собственной частоты. Пусть исследуемая система описывается стохастическим дифференциальным уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon h(x,\dot{x}) + \varepsilon\sum_{s=0}^{S} P_s\cos([(s^2-1)/3]^{1/2}\omega t)x^s + \varepsilon^{1/2}\sigma x\dot{\xi}(t), \tag{17}$$

где параметры гармонических воздействий

$$\Omega_s = [(s^2-1)/3]^{1/2} \tag{18}$$

удовлетворяют резонансным соотношениям (9), (10), а дифференцируемая функция своих аргументов $h(x,\dot{x})$ - соотношению (8) ($l=1$, $p=0$). Тогда, согласно доказанной теореме, соответствующее усредненное уравнение КФП обладает свойством потенциальности и его точное решение может быть получено по формуле (16)

$$W(a,\theta) = C\exp\{\int\{-16\omega/(\sigma^2a^2)\mathbf{M}_t[h(a\cos\phi, -a\omega\sin\phi)\sin\phi] -$$

$$- 16\omega/\sigma^2\sum_{s=0}^{S} P_s a^{s-2}/2^{s+1}\left[\binom{s}{n} - \binom{s}{n-1}\right]\sin([(s^2-1)/3]^{1/2}\theta) + 1/a\}da +$$

$$+\{-16\omega/(3\sigma^2a)\mathbf{M}_t[h(a\cos\phi, -a\omega\sin\phi)\cos\phi] -$$

$$- 16\omega/(3\sigma^2)\sum_{s=0}^{S} P_s a^{s-1}/2^{s+1}\binom{s+1}{n}\cos([(s^2-1)/3]^{1/2}\theta)\}d\theta, \tag{19}$$

где $n = {}^1\!/_2\{s + 1 - [(s^2-1)/3]^{1/2}\}$.

В качестве конкретного примера рассмотрим систему Ван-дер-Поля, находящуюся под воздействием параметрического гармонического воздействия в главной резонансной области и случайных возмущений частоты автоколебаний, математической моделью которой служит следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(\alpha - \beta x^2)\dot{x} - \varepsilon\Delta x + \varepsilon P x^2 \cos\omega t + \varepsilon^{1/2}\sigma x\xi(t), \tag{20}$$

где

$$\varepsilon\Delta = \omega_0^2 - \omega^2, \tag{21}$$

ω_0 - собственная частота системы; ω - частота внешнего гармонического воздействия; Δ - некоторая постоянная.

Данная система удовлетворяет условиям теоремы и, следовательно, $W(a,\theta)$ может быть непосредственно определена по формуле (16)

$$W(a,\theta) = Ca^{(\sigma^2+8\alpha\omega^2)/\sigma^2}\exp\{-(\beta\omega^2/\sigma^2)a^2 - (2\omega P/\sigma^2)a\sin\theta + 8\omega\Delta/(3\sigma^2)\theta\}. \tag{22}$$

Для периодичности по θ необходимо рассматривать только нулевую расстройку Δ=0.

Аналогичный результат был получен в [2,8] с помощью метода разложения $W(a,\theta)$ по квазициклической координате, применение которого требует крайне трудоемких математических выкладок и зачастую приводит к представлению $W(a,\theta)$ в виде бесконечного ряда разложения по степеням амплитуды a. Следует также отметить, что для систем, не удовлетворяющих условиям доказанной выше теоремы, на основе метода, предложенного в [8], не удалось получить представления $W(a,\theta)$ в виде конечного ряда.

При наличии случайных возмущений коэффициента линейного затухания система будет удовлетворять условиям теоремы, если она описывается уравнением вида

$$\ddot{x}+\omega^2 x = \varepsilon h(x,\dot{x})+\varepsilon\sum_{s=2}^{S} P_s\cos([3(s^2-1)]^{1/2}\omega t)x^s+[R_1\cos\omega t+R_2\cos 3\omega t]\dot{x}^2+\varepsilon^{1/2}\sigma\dot{x}\xi(t), \tag{23}$$

где функция $h(x,\dot{x})$ такая, что выполняется условие (8) (l=1, p=1).

В том случае, когда функция $h(x,\dot{x})$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{M}_t[h(a\cos\phi, -a\omega\sin\phi)\cos\phi] = 0, \tag{24}$$

являющемуся более жестким, чем (8), или же когда она представима в виде ряда по степеням амплитуды a^i с показателями $i\geq 2$, $W(a,\theta)$ может быть представлена в удобной для приложений форме

$$W(a,\theta) = Ca^{-5/3}\exp\{-16/(3\sigma^2\omega)\int_0^a (1/a^2)\mathbf{M}_t[h(a\cos\phi, -a\omega\sin\phi)\sin\phi]da -$$

$$- 1/(3\sigma^2\omega)\sum_{s=2}^{S} P_s a^{s-1}/[(s-1)2^{s-3}][\binom{s}{n} - \binom{s}{n-1}]\sin([3(s^2-1)]^{1/2}\theta) -$$

$$- R_1 a(\omega\sin\theta)/\sigma^2 + R_2 a(\omega\sin 3\theta)/(3\sigma^2)\}. \tag{25}$$

Рассмотрим следующую конкретную систему, удовлетворяющую условиям теоремы:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(\alpha - \beta x^2)\dot{x} + \varepsilon P x^2\cos 3\omega t + \varepsilon(R_1\cos\omega t + R_2\cos 3\omega t)\dot{x}^2 + \varepsilon^{1/2}\sigma\dot{x}\xi(t), \tag{26}$$

Совместная плотность вероятностей амплитуды a и фазы θ стационарных колебаний определяется, согласно (25), следующим образом:

$$W(a,\theta) = Ca^{(8\alpha-5\sigma^2)/(3\sigma^2)}\exp\{-\beta a^2/(3\sigma^2) - 2Pa(\sin 3\theta)/(3\omega\sigma^2) -$$

$$- R_1 a(\omega\sin\theta)/\sigma^2 + R_2 a(\omega\sin 3\theta)/(3\sigma^2)\}. \qquad (27)$$

Для нахождения наиболее вероятных значений амплитуды и фазы стационарных колебаний из (27) получаем следующую систему:

$$2\beta a^2 + 3R_1\omega a\sin\theta + [2P/\omega - R_2\omega]a\sin 3\theta + 5\sigma^2 - 8\alpha = 0,$$

$$R_1\omega a\cos\theta + [2P/\omega - R_2\omega]a\cos 3\theta = 0. \qquad (28)$$

Если, например, $R_1=0$, то из (28) получаем, что наиболее вероятное значение амплитуды стационарных колебаний удовлетворяет соотношению

$$a = (R_2\omega^2 - 2P)/(4\beta\omega) + \{[(R_2\omega^2 - 2P)/(4\beta\omega)]^2 + (8\alpha - 5\sigma^2)/(2\beta)\}^{1/2}, \qquad (29)$$

из которого следует, что, во-первых, в системе возможна взаимокомпенсация периодических воздействий в том случае, когда

$$P = R_2\omega^2/2,$$

и, во-вторых, если возможен выбор коэффициента α таким образом, чтобы

$$\alpha = 5\sigma^2/8 + 1,$$

то можно добиться гашения воздействия флуктуаций, и в системе будут наблюдаться колебания с той же амплитудой, что и в детерминированной неавтономной системе Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1-\beta x^2)\dot{x} + \varepsilon P x^2\cos 3\omega t + R_2\cos 3\omega t\dot{x}^2.$$

Библиографческий список

1. *Коломиец В.Г.* Об усреднении в стохастических уравнениях Ито // Мат.физика и нелинейная механика. 1987. Вып.7(41). С. 1.

2. *Митропольский Ю.А., Нгуен Ван Дао, Нгуен Донг Ань.* Нелинейные колебания в системах произвольного порядка. Киев: Наукова думка, 1992. 344 с.

3. *Ланда П.С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: Наука, 1980. 360 с.

4. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969. 288 с.

5. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 560 с.

6. *Жогаль С.И.* Достаточное условие интегрируемости уравнений Колмогорова - Фоккера - Планка для неавтономных квазилинейных систем с непараметрическим случайным воздействием // Вестник Белорусского госуниверситета. Сер.1. 1995. № 1. С. 62.

7. *Диментберг М.Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.

8. *Нгуен Донг Ань.* Взаимное влияние различных типов случайных и

периодических возбуждений на колебательные нелинейные системы. Автореф. дисс. ... доктора физ.- мат. наук. Киев, 1986. 32 с.

Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины, республика Беларусь

Поступила в редакцию 4.12.96
после переработки 14.03.97

ON INTEGRATION OF KOLMOGOROV - FOKKER - PLANCK EQUATIONS FOR NON-AUTONOMOUS QUASILINEAR SYSTEMS HAVING PARAMETRIC RANDOM EFFECT

S.P. Zhogal, S.I. Zhogal

The sufficient conditions of analytic integration of Kolmogorov - Fokker - Planck equations for the quasilinear oscillatory systems with different types of external periodic forces and random disturbances of parameters are investigated in this paper.

Жогаль Сергей Петрович - родился в 1962 году в деревне Белев Житковичского района Гомельской области (Беларусь). Окончил Гомельский государственный университет им.Ф.Скорины (1985). Защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук на тему «Влияние случайных возмущений на некоторые сложные колебательные системы, описываемые дифференциально-функциональными уравнениями» в Киевском государственном университете им. Т.Г. Шевченко (1991). Работает доцентом кафедры математических проблем управления Гомельского государственного университета. Автор 26 публикаций.

Жогаль Светлана Ивановна - родилась в 1963 году в деревне Перелевка Ветковского района Гомельской области (Беларусь). Окончила Гомельский государственный университет им.Ф.Скорины (1985). Защитила диссертацию на соискание степени кандидата технических наук на тему «Моделирование и исследование колебательных режимов квазилинейных систем при широкополосных случайных возмущениях» в Гомельском государственном университете им. Ф. Скорины (1996). Работает старшим преподавателем кафедры прикладной математики и теории надежности Белорусского государственного университета транспорта. Автор 14 публикаций.